

Phân tích bài toán cơ nhiệt bằng phân tích đẳng hình học cho dạng kết cấu sử dụng vật liệu phân lớp chức năng

Nguyễn Duy Khương, Nguyễn Mạnh Tiến, Võ Trung Chiến, Nguyễn Xuân Hùng, Vũ Công Hòa

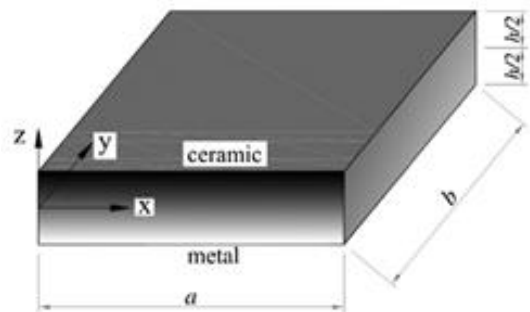
Tóm tắt— Mục đích của bài báo này là ứng dụng phương pháp đẳng hình học (IGA) để phân tích ứng xử cơ nhiệt cho kết cấu làm từ vật liệu phân lớp chức năng (FGM). Phương pháp đẳng hình học được xây dựng trên nền tảng hàm cơ sở NURBS với ưu điểm mô tả hình học chính xác cùng với việc xấp xỉ hàm bậc cao một cách hiệu quả. Vật liệu FGM là một dạng vật liệu composite tiên tiến có thuộc tính vật liệu theo dõi liên tục theo quy luật phân bố hàm mũ trên phương bề dày. Các kết quả thu được sẽ kiểm chứng với kết quả được công bố trước đó và kết quả từ phần mềm thương mại COMSOL.

Từ khóa— FGM, IGA

1 GIỚI THIỆU

Vật liệu phân lớp chức năng (Functionally Graded Materials – FGM) là vật liệu composite có vi cấu trúc không đồng nhất mà thay đổi liên tục về cơ tính giữa các lớp vật liệu. Vật liệu FGM được kết hợp từ kim loại và gốm nên nó có ưu điểm là kết hợp được cả tính dẻo của kim loại và tính cách nhiệt cách điện của gốm. FGM được sử dụng trong các ngành công nghiệp hiện đại như: hàng không vũ trụ, công nghệ hạt nhân, truyền thông, năng lượng, ... Phân tích ứng xử cơ

hiệt trong vật liệu FGM là vấn đề quan trọng vì vật liệu này thường làm việc trong môi trường áp lực và nhiệt độ cao. Hình 1 minh họa tấm FGM trong hệ tọa độ Đề-các (x, y, z).



Hình 1. Mô hình hình học tấm FGM

Hiện tại đã có nhiều nghiên cứu về phân tích bài toán Cơ nhiệt trong vật liệu FGM được công bố trên các tạp chí. Các phương pháp số được sử dụng cũng rất đa dạng như phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM), phương pháp không lưới (Meshless), lý thuyết cắt bậc 3 (the third-order shear deformation theory). Các tác giả Afsar và Go sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để phân tích bài toán cơ nhiệt cho mô hình đĩa tròn xoay được làm từ FGM [1]; nhóm tác giả Hosseini, Sladek, áp dụng phương pháp không lưới (MLPG) phân tích cơ nhiệt cho ống trụ rỗng làm từ vật liệu FGM dựa trên mô hình Green–Naghdi [2], nhóm tác giả A.H. Akbarzadeh, M. Abbasi, M.R. Eslami sử dụng lý thuyết cắt bậc 3 để phân tích bài toán cơ nhiệt cho tấm hình vuông FGM [3]. Đẳng hình học (Isogeometric Analysis- IGA) là một phương pháp tính toán hiện đại được giới thiệu bởi Hughes [4].

Phương pháp đẳng hình học là sự kết hợp giữa thiết kế với hỗ trợ máy tính (Computer Aided

Bài báo đã nhận vào ngày 15 tháng 3 năm 2017, đã được phân biên chỉnh sửa vào ngày 01 tháng 11 năm 2017.

Nguyễn Duy Khương, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM, Việt Nam (e-mail: ndkhuong@hcmut.edu.vn)

Nguyễn Mạnh Tiến, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM, Việt Nam (e-mail: nguyenmanhtien94@gmail.com)

Võ Trung Chiến, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM, Việt Nam (e-mail: votrungchien94@gmail.com)

Nguyễn Xuân Hùng, Trường Đại học Công nghệ Tp.HCM, Việt Nam (e-mail: ngx.hung@hutech.edu.vn)

Vũ Công Hòa, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM, Việt Nam (e-mail: vuconghoa@hcmut.edu.vn)

Design-CAD) và phân tích phần tử hữu hạn (Finite Element Analysis-FEA). Phương pháp đẳng hình học (IGA) sử dụng hàm cơ sở Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) để có được hình học chính xác. Nó sử dụng hàm cơ sở này cho cả mô hình hình học chính xác và xấp xỉ hữu hạn. Ngoài ra, IGA còn có lợi thế tăng hay giảm bậc của lưới rất hiệu quả và cùng với kỹ thuật chèn knot để có thể kiểm soát độ liên tục một cách linh hoạt.

Bài báo này có bố cục như sau: phần tiếp theo mô tả chi tiết hơn về vật liệu phân lớp chức năng cùng và các phương trình sử dụng trong phân tích bài toán cơ nhiệt, kết quả số sẽ được thể hiện ở phần 3 và phần 4 sẽ là phần kết luận.

2 CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1 Vật liệu phân lớp chức năng (FGM)

Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) là vật liệu composite mới được cấu tạo từ hai hay nhiều lớp vật liệu mà thuộc tính của vật liệu thay đổi liên tục theo kích thước của cấu trúc và tính chất của vật liệu. FGM có quy luật hàm số theo phương bề dày của cấu trúc lớp vật liệu. Ta có hàm biểu diễn tính chất vật liệu [3].

$$P(z) = (P_c - P_m) \times V_c(z) + P_m \quad (1)$$

trong đó: P_c, P_m là thuộc tính vật liệu của gốm và kim loại lần lượt ở mặt trên và mặt dưới. P có thể đại diện cho mô-đun đàn hồi, hệ số Poisson, hệ số giãn nở nhiệt, hệ số dẫn nhiệt ...

Với $V_c(z)$ là hàm vị trí theo bề dày tấm.

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (2)$$

trong đó: z là chiều sâu phân lớp vật liệu; h là chiều dày tấm; n là số mũ của hàm $V_c(z)$.

2.2 Phương pháp đẳng hình học

Để tìm hiểu hàm NURBS trước tiên ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm hàm B-Spline vì hàm NURBS được xây dựng từ hàm B-Spline.

2.2.1 Vectơ knot

Vectơ knot là một tập số thực không giảm trong không gian tham số, được viết $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, trong đó $\xi_i \in \mathbb{R}$ là knot thứ i , i là chỉ số của vectơ knot,

$i = 1, 2, \dots, n + p + 1$, p là bậc của B-Spline, n số hàm cơ sở sử dụng để xây dựng B-Spline. Hàm cơ sở B-Spline liên tục C^∞ trong khoảng knot $[\xi_i, \xi_{i+1})$ và liên tục C^{p-1} trong knot riêng biệt. Một giá trị knot có thể xuất hiện nhiều hơn một lần và số lần giá trị knot xuất hiện trong knot vector được gọi là bội của knot đó. Cụ thể tại một knot có bội là k thì độ liên tục C^{p-k} .

2.2.2 Hàm cơ sở

Hàm cơ sở B-spline $N_{i,p}(\xi)$ được định nghĩa công thức đệ quy Cox-de Boor bắt đầu với hằng số [5]

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{neu } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{cac truong hop con lai} \end{cases} \quad (3)$$

Hàm cơ sở B-Spline được định nghĩa theo công thức đệ quy Cox-de Boor khi [5]

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i,p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i,p+1} - \xi}{\xi_{i,p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4)$$

2.2.3 Đường cong B-Spline và đường cong NURBS

Đường cong B-Spline và NURBS bậc p lần lượt được biểu diễn như sau [5].

$$C_B(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (5)$$

$$C_N(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i \quad (6)$$

trong đó

$N_{i,p}$ là hàm cơ sở B-Spline với $i = 1, 2, \dots, n$.

B_i là các điểm điều khiển.

R_i^p là hàm cơ sở NURBS. R_i^p được biểu diễn như sau [5]

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (7)$$

2.2.4 Khối B-Spline và Khối NURBS

Khối B-Spline và NURBS lần lượt được biểu diễn như sau [5].

$$S_B(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (8)$$

$$S_N(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) B_{i,j,k} \quad (9)$$

trong đó

$N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)$ là ba hàm cơ sở B-Spline với $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l$.

$B_{i,j,k}$ là tọa độ các điểm điều khiển $m \times n \times l$.

$R_{i,j,k}^{p,q,r}$ là hàm cơ sở NURBS. $R_{i,j,k}^{p,q,r}$ được biểu diễn như sau [5]

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}} \quad (10)$$

2.2.5 Trường chuyển vị và trường nhiệt độ dựa trên xấp xỉ hàm NURBS

IGA lấy ý tưởng chính từ FEM dùng phần tử đẳng tham số do đó biến xấp xỉ trong đẳng hình học được biểu diễn như:

$$u = \tilde{u}; t = \tilde{t} \quad (11)$$

Khác với FEM IGA sử dụng hàm cơ sở NURBS để xây dựng hình học chính xác đồng thời sử dụng hàm cơ sở NURBS làm công cụ tính toán trực tiếp trên mô hình hình học chính xác. Trong IGA, trường chuyển vị và trường nhiệt độ lần lượt được biểu diễn theo [5]

$$u = \sum_{i=1}^n R_i u_i \quad (12)$$

$$T = \sum_{i=1}^n R_i T_i \quad (13)$$

trong đó: R_i hàm cơ sở NURBS, u_i, T_i lần lượt là chuyển vị và nhiệt độ tại điểm điều khiển i , n số lượng điểm điều khiển.

2.3 Các phương trình sử dụng trong phân tích bài toán cơ nhiệt

Trường nhiệt độ dưới sự ảnh hưởng của nhiệt độ, hệ số đối lưu và tải nhiệt được biểu diễn như sau [5]

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -\kappa \nabla \mathbf{T} \text{ trong } \Omega_{phy} \\ \mathbf{T} = \mathbf{T} \text{ trong } \Gamma_D^{th} \\ -\kappa \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{n}} = q_n \text{ trong } \Gamma_H^{th} \\ -\kappa \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{n}} = h(T - T_a) \text{ trong } \Gamma_C^{th} \end{cases} \quad (14)$$

Trong đó $\kappa, \nabla T, T, q_n, h$ và T_a lần lượt là, ma trận dẫn nhiệt, vectơ gradient của nhiệt độ, Nhiệt độ trên biên Dirichlet, Tải nhiệt (HeatFlux), hệ số đối lưu và nhiệt độ trong môi trường đối lưu.

Trường cơ học dưới sự ảnh hưởng của tải nhiệt độ được biểu diễn như sau: [6].

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \text{ trong } \Omega_{phy} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \text{ trong } \Omega_{phy} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \text{ trong } \Omega_{phy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \gamma(T - T_0) \mathbf{I} \text{ trong } \Omega_{phy} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u} \text{ trong } \Gamma_D^{el} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \text{ trong } \Gamma_N^{el} \end{cases} \quad (15)$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}, b, C, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{th}, \gamma, T_0, u$ và $\hat{\mathbf{t}}$ lần lượt là tensor ứng suất, tải cơ áp đặt lên mô hình, tensor vật liệu, tensor biến dạng tổng, tensor biến dạng nhiệt, hệ số giãn nở nhiệt, nhiệt độ tham chiếu, chuyển vị trên biên Dirichlet, tải kéo trên biên Neumann.

Phương trình dạng yếu dùng phân tích bài toán trường cặp đôi cơ nhiệt được biểu diễn như sau:

$$\begin{bmatrix} K^u & K^{uT} \\ 0 & K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^u \\ F^T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K^u u = F^u - K^{uT} T \\ K^T T = F^T \end{cases} \quad (16)$$

trong đó:

K^u là ma trận độ cứng phần tử. K^u được biểu diễn như sau:

$$K^u = \int B_u^T D_u B_u \quad (17)$$

Với B_u, D_u lần lượt ma trận gradient cơ của hàm cơ sở và ma trận các hằng số vật liệu đàn hồi (ma trận gradient cơ và ma trận hằng số vật liệu đàn hồi được mô tả rõ ở công thức 5.32 và công thức 5.71 tài liệu [5] trang 251 và trang 263).

K^T là ma trận hệ số dẫn nhiệt phần tử. K^T được biểu diễn như sau:

$$K^t = \int_{\Omega} B_i^T D_i B_i d\hat{\Omega} + \int_{\Gamma} N_i^T h N_i d\hat{\Gamma} \quad (19)$$

Với B_i, D_i, N_i, h lần lượt là ma trận gradient nhiệt của các hàm cơ sở, ma trận các hằng số vật liệu nhiệt, ma trận hàm dạng của hàm cơ sở và hệ số đối lưu (tương tự như ma trận gradient cơ và ma trận hằng số vật liệu đàn hồi thì các ma trận gradient nhiệt của các hàm cơ sở, ma trận các hằng số vật liệu nhiệt, ma trận hàm dạng của hàm cơ sở cũng được mô tả rõ ở tài liệu [5]).

K^{uu} là ma trận độ cứng phân tử cặp đôi cơ nhiệt. K^{ut} được biểu diễn như sau:

$$K^{ut} = - \int_{\Omega} B_u^T \beta N^T \quad (18)$$

Với $\beta = D_u \alpha$ ($\alpha = [\alpha_x \alpha_y \alpha_z 000]^T$ là véctơ giãn nở nhiệt).

3 KẾT QUẢ SỐ

3.1 Bài toán cơ nhiệt cho tấm hình vuông FGM

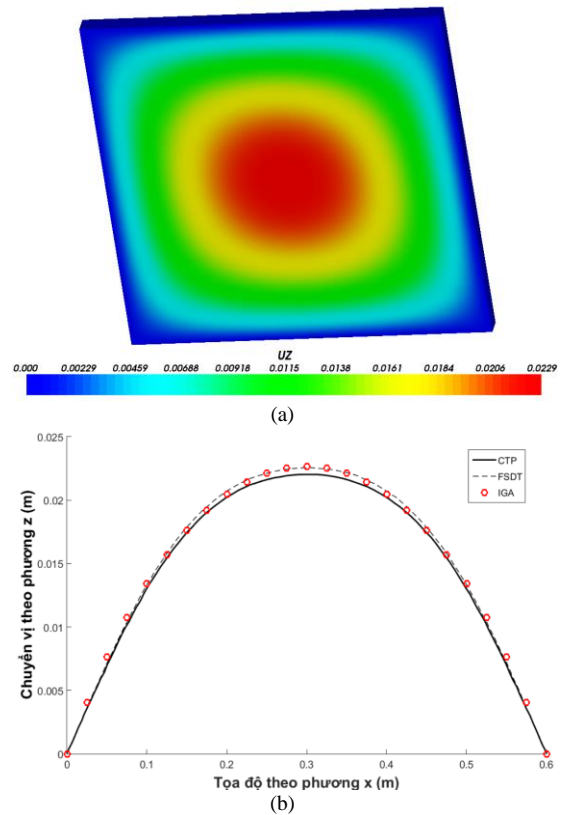
Để kiểm chứng tính chính xác của phương pháp, bài toán tấm hình vuông ($a=b=0,6m, h=0,03m$) làm từ vật liệu Ti-6Al-4V/ZrO₂ được khảo sát. Tấm hình vuông có quy luật phân bố vật liệu theo phương z tuân theo hàm phân bố vật liệu (1) với số mũ $n=2$ và thông số vật liệu cho như bảng 1. Điều kiện biên bài toán bao gồm : đối với điều kiện biên cơ học tấm tựa đơn 4 mặt bên (SSSS) ; đối với điều kiện biên nhiệt : chịu tác động của tải nhiệt (heatflux) $q_h = 10^6 W/m^2$ ở mặt trên và mặt dưới chịu tác động tải đối lưu $h_c = 10^4 W/m^2K$ tại nhiệt độ môi trường $T_c = 0K$.

BẢNG 1.
THÔNG SỐ VẬT LIỆU TI-6AL-4V/ ZrO₂

Thông số Vật liệu	Ti-6AL-4V	ZrO ₂
$E (Gpa)$	66,2	117
ν	0,322	0,322
$k (W / mK)$	18,1	2,036
$\alpha (10^{-6} / K)$	10,3	7,11

Trong mục này, mô hình tấm hình vuông FGM với thuộc tính vật liệu thay đổi theo phương z , hàm vật liệu $V_c(r)$ ứng với số mũ $n = 2$ được khảo sát. Kết quả chuyển vị theo phương z cho bài toán sử dụng lưới IGA bậc 4 có $12 \times 12 \times 1$ phần tử được biểu diễn trong hình 2.a, đồ thị so sánh

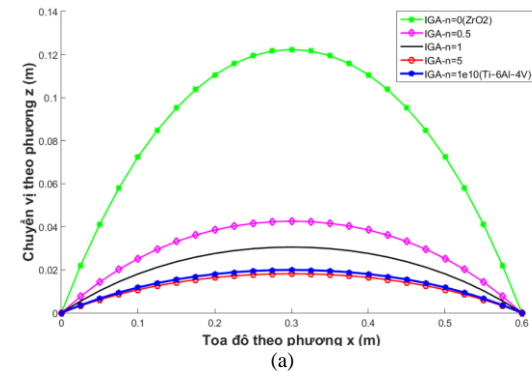
kết quả với lời giải từ bài báo [3] được biểu diễn ở hình 2.b.

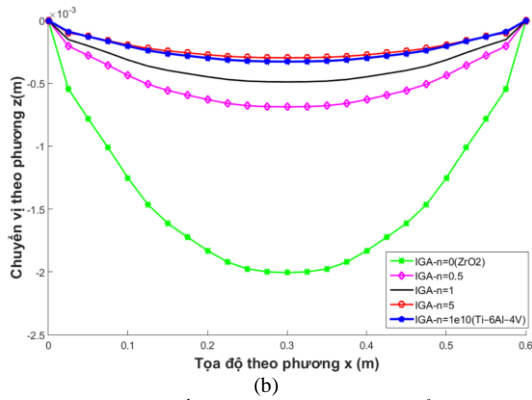


Hình 2. Kết quả chuyển vị theo phương z (a) và đồ thị so sánh chuyển vị theo phương z (b)

Hình 3.a biểu diễn chuyển vị theo phương z trong tấm với thông số vật liệu thay đổi theo quy luật phân bố hàm mũ có n trong hàm V_c ứng với $n = 0$ (sứ); 0,5; 1; 5; 10^{10} (kim loại).

Tương tự với mô hình hình học và điều kiện biên nhiệt ở bài toán trên, tấm FGM hình vuông ngàm 4 mặt bên (CCCC) được khảo sát. hình 3.b biểu diễn chuyển vị theo phương z trong tấm với số mũ thay đổi lần lượt $n = 0$ (sứ); 0,5; 1; 5; 10^{10} (kim loại).



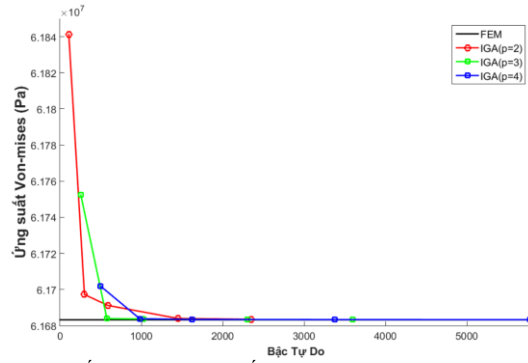


Hình 3. ứng với hệ số mũ n khác nhau tại các điểm có tọa độ (x, 0,3, 0) SSSS (a) và CCCC (b)

3.2 Bài toán ống trụ rỗng 3D FGM

Xét bài toán ống trụ rỗng 3D FGM với mô hình hình học có bán kính ngoài $r_o = 1\text{ m}$, bán kính trong $r_i = 0,5\text{ m}$ và bề dày $h = 1\text{ m}$. Thuộc tính vật liệu thay đổi theo phương hướng kính với quy luật hàm mũ. Quy luật thay đổi của các thông số vật liệu mô-đun đàn hồi, hệ số giãn nở nhiệt, hệ số dẫn nhiệt và hệ số Poisson lần lượt là $E = E_0 r^n$, $\alpha = \alpha_0 r^n$, $k = k_0 r^n$ và $\nu = \text{const}$ với $n = 2$, $E_0 = 299,92\text{ GPa}$, $\alpha_0 = 3,24 \times 10^{-6}\text{ K}$, $k_0 = 8,33 \times 10^{-3}\text{ W/mK}$ và $\nu = 0,22$. Điều kiện biên bài toán bao gồm: thành trong chịu tác dụng nhiệt độ $T_i = 500\text{ K}$ và thành ngoài chịu tác dụng nhiệt độ $T_o = 100\text{ K}$.

Để chọn được mức lưới phù hợp cho bài toán, chúng tôi tiến hành khảo sát giá trị ứng suất von-mises tại điểm có tọa độ $x = 0,75\text{ m}$, $y = 0\text{ m}$ và $z = 0\text{ m}$ ở các mức lưới có số bậc tự do khác nhau. Các kết quả thu được so sánh với lời giải xấp xỉ của phần mềm COMSOL dùng mô hình lưới có 540239 bậc tự do và giá trị ứng suất von-Mises $\sigma_{EQV}(0,75;0;0) = 6,1683279713580448 \times 10^7\text{ Pa}$. Hình 4 mô tả tốc độ hội tụ của lưới IGA bậc 2, bậc 3, bậc 4. Bảng 2 mô tả kết quả của ứng suất von-mises tại vị trí khảo sát với nhiều mô hình lưới khác nhau. Qua kết quả này có thể chỉ ra rằng, lưới bậc 4 cho tốc độ hội tụ tốt nhất vì với cùng một số lượng bậc tự do thì lời giải dùng lưới bậc 4 tốt hơn nhiều so với bậc 2 và 3. Vì thế, hàm xấp xỉ bậc 4 sẽ được dùng để phân tích bài toán cơ nhiệt của mô hình ống trụ rỗng 3D FGM.



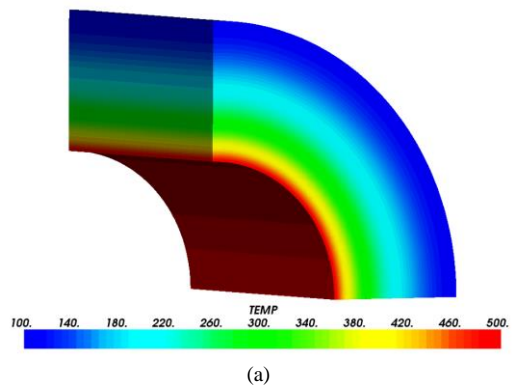
Hình 4. Tốc độ hội tụ ứng suất von-mises của các mô hình lưới cho bài toán ống trụ rỗng 3D FGM

BẢNG 2.

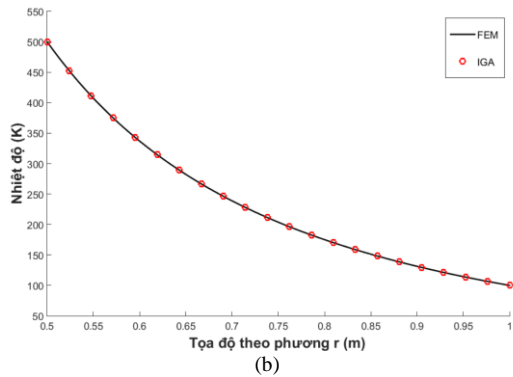
KẾT QUẢ ỨNG SUẤT VON-MISES TƯƠNG ỨNG VỚI TỪNG MÔ HÌNH LƯỚI TẠI ĐIỂM (0,75; 0; 0)

Phương pháp	Mật độ lưới	Bậc tự do	Ứng suất von-Mises
Bậc 2 - IGA	1x1x1	1081	61841232,56
	3x3x1	300	61697272,37
	5x5x1	588	61691220,84
	9x9x1	1452	61684001,83
	12x12x1	2352	61683544,65
Bậc 3 - IGA	1x1x1	256	61752353,39
	3x3x1	576	61683919,06
	5x5x1	1024	61683733,55
	9x9x1	2304	61683386,25
Bậc 4 - IGA	1x1x1	3600	61683358,49
	1x1x1	500	61701831,93
	3x3x1	980	61683864,14
	5x5x1	1620	61683477,12
	9x9x1	3380	61683387,61
	12x12x1	5780	61683334,31

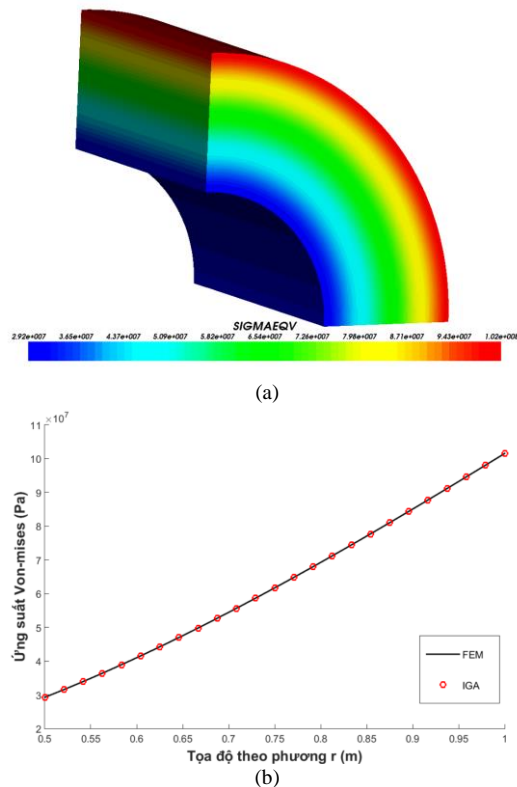
Do bài toán đối xứng ở hình học, vật liệu và điều kiện biên nên chúng tôi sẽ khảo sát ở 1/4 mô hình. Hình 5.a mô tả kết quả phân bố nhiệt độ của bài toán và đồ thị so sánh kết quả phân bố nhiệt của IGA so với phần mềm thương mại COMSOL được thể hiện ở hình 5.b. Tương tự ở hình 6.a thể hiện kết quả ứng suất von-Mises của bài toán và hình 6.b biểu diễn đồ thị so sánh kết quả ứng suất von-mises với phần mềm thương mại COMSOL.



(a)



Hình 5. Kết quả phân bố nhiệt độ (a) và đồ thị so sánh phân bố nhiệt độ (b) của bài toán



Hình 6. Kết quả ứng suất von-Mises (a) và đồ thị so sánh ứng suất von-Mises (b) của bài toán

4 KẾT LUẬN

Qua việc phân tích một số bài toán ở trên, ta có thể nhận thấy rằng phân tích dạng hình học dựa vào hàm cơ sở NURBS là công cụ tính toán hiệu quả cho việc phân tích bài toán cơ nhiệt ba chiều. Phương pháp này cho phép xây dựng hình học chính xác, đồng thời có thể điều khiển lưới một cách dễ dàng bằng cách nâng bậc (nâng tính liên tục giữa các phần tử) cũng như tăng mật độ lưới để có được kết quả hội tụ nhanh nhất. Phân tích dạng hình học sử dụng hàm xấp xỉ bậc cao và có

tính liên tục bậc cao giữa các phần tử. Nhờ vào tính chất này mà ta có thể mô hình bài toán với số bậc tự do thấp nhưng vẫn đạt được lời giải hội tụ so với nghiệm tham khảo, được thể hiện ở hình 4. Điều này giúp ta giảm tải nguyên khi tính toán. Vì thế, IGA hứa hẹn được sử dụng hiệu quả để phân tích bài toán cơ nhiệt quá độ với mô hình vật liệu FGM và nhiều mô hình vật liệu có tính chất phức tạp khác, vốn những loại bài toán này đòi hỏi rất lớn về tài nguyên máy tính để lưu trữ kết quả thay đổi theo thời gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.M. Afsar, J. Go, "Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk", *Applied Mathematical Modelling*, no. 34, pp. 3309-3320, 2014.
- [2] S.M. Hosseini, J. Sladek, V. Sladek, "Meshless local Petrov–Galerkin method for coupled thermoelasticity analysis of a functionally graded thick hollow cylinder", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, no. 35, pp. 827–835, 2011.
- [3] A.H. Akbarzadeh, M. Abbasi, M.R. Eslami, "Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory", *Thin-Walled Structures*, no. 53, pp. 141-155, 2012.
- [4] Hughes et al., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, no. 194, pp. 4135-4195, 2005.
- [5] N. X. Hùng, "Phân Tích Dạng Hình Học", NXB ĐHQG-TPHCM, Vietnam, 2015, trang 251-263.
- [6] N. Zander, S. Kollmannsberger, M. Ruess, Z. Yosibash and E. Rank, "The Finite Cell Method for linear thermoelasticity", *Computers and Mathematics with Applications*, no. 64, p. 3527–3541, 2012.

Nguyễn Duy Khương đã tốt nghiệp cao học ngành Cơ học Kỹ thuật tại Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM vào năm 2010. Là cán bộ giảng dạy tại trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM từ năm 2011 đến nay.

Nguyễn Mạnh Tiến được sinh ra tại Tây Ninh, Việt Nam năm 1994. Tốt nghiệp đại học chuyên ngành Cơ Kỹ Thuật tại Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM năm 2017.

Võ Trung Chiến sinh ra tại Khánh Hòa, Việt Nam năm 1994. Tốt nghiệp chuyên ngành Cơ Kỹ Thuật tại Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM năm 2017. Lĩnh vực quan tâm nghiên cứu là tối ưu hóa và phân tích đẳng hình học.

Nguyễn Xuân Hùng hiện giữ chức danh Phó Giáo sư vào năm 2013, tốt nghiệp Tiến sỹ ngành Cơ học Tính toán tại Đại học Liege (Bi), hiện là Giám đốc Trung tâm Nghiên cứu liên ngành thuộc

Đại học Công nghệ Tp.HCM (HUTECH) và cũng là thành viên của Viện Khoa học phục hồi Sau đại học Đại học Y Đài Loan (Trung Quốc) đầu năm 2015.

Vũ Công Hòa đạt chức danh Phó Giáo sư vào năm 2016, hiện đang là Chủ nhiệm bộ môn Cơ Kỹ thuật, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM

Analyze thermo-mechanical problem by isogeometric analysis for structures used functionally graded material

Nguyen Duy Khuong, Nguyen Manh Tien, Vo Trung Chien, Nguyen Xuan Hung, Vu Cong Hoa

Abstract— The objective of this paper is apply isogeometric analysis (IGA) to analyze thermoelastic behavior of functionally graded material (FGM) structures. IGA is built on NURBS basis functions used to model exact geometries with higher-order approached functions. The FGM is a type of advanced composite material has material properties is continuous distributed variation through thickness direction. The results are verified with other numerical results and results from COMSOL commercial software.

Index Terms— FGM, IGA