LỜI GIẢI SỐ BÀI TOÁN SÓNG NƯỚC DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI MIỀN VÀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trịnh Anh Ngọc, Huỳnh Thân Phúc

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 21 tháng 03 năm 2011, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 03 tháng 04 năm 2012)

TÓM TẮT: *Trong bài này, phương pháp biến đổi miền kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn để giải số bài toán sóng nước. Một thí dụ số được trình bày để minh chứng hiệu quả của phương pháp.*

Từ khóa : *phương pháp phần tử hữu hạn, giải số bài toán sóng nước.*

MỞ ĐẦU

Bài toán sóng nước có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành kỹ thuật và trong đời sống. Vì thế, việc mô hình hóa và giải số cho bài toán này đã và đang được quan tâm, nghiên cứu rộng rãi. Đã có nhiều giải pháp được đề nghị nhằm giải quyết bài toán này. Có thể kể ra đây hai trong số các đề nghị đó:

- Phương pháp Lagrange-Euler tùy ý [1,2,4]).

- Phương pháp biến đổi miền, miền vật lý được đưa về miền tính toán cố định.

Trong [6], A. Pawell và các đồng sự đã dùng phương pháp biến đổi miền, áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp số cho phương trình vi phân để giải quyết bài toán sóng mặt tự do. Trong bài báo này, cũng dựa trên phương pháp biến đổi miền, nhưng áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn và các phương pháp Euler để giải số. Cũng cần nhấn mạnh ở đây, trong [6], các tác giả chỉ biến đổi tọa độ theo phương *X*, còn phương *Y* vẫn giữ nguyên. Như vậy, miền của bài toán vẫn bị thay đổi theo thời gian do sự chuyển động của mặt tự do. Trong bài này, chúng tôi biến đổi miền theo cả hai phương *X* và *Y*.

PHƯƠNG PHÁP

Bài báo được tổ chức như sau

Mục 2 giới thiệu mô hình bài toán, và cách biến đổi bài toán về bài toán có miền xác định cố định. Mục 3 trình bày lược đồ tính toán, giải bài toán bằng phương pháp lặp theo bước thời gian. Ở mỗi bước lặp, giải tuần tự hai bài toán: (1) bài toán biên cho phương trình đạo hàm riêng cấp 2 theo hai biến không gian (x, y); (2) bài toán biên-giá trị đầu cho phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 theo một biến không và thời gian (x, t). Tiếp theo, giới thiệu phương pháp rời rạc hóa cho hai bài toán, bài toán (1) dùng phương pháp phần tử hữu hạn (phần tử tứ giác 4-nút), bài toán (2) dùng phương pháp đường (line method) dẫn về bài toán Cauchy cho hệ phương trình vi phân vectơ cấp 1, có thể giải bằng các phương pháp số thông dụng như phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến. Mục 4 cho một thí dụ số để minh chứng tính hiệu quả của phương pháp. Cuối cùng là kết luận và hướng phát triển.

KẾT QUẢ

Bài toán

Thùng hình hộp chữ nhật chứa đầy chất lỏng (nước), đáy nằm ngang, mặt trên là mặt thoáng, các mặt bên vuông góc với đáy. Một mặt bên có thể chuyển động tịnh tiến song song với mặt đối diện. Ở trạng thái tĩnh khối chất lỏng có độ sâu *h* (Hình 1). Bài toán đặt ra là tìm chuyển động của khối chất lỏng, đặc biệt, chuyển động của mặt thoáng khi biết chuyển động của mặt bên.

Giả thiết chuyển động của chất lỏng không thay đổi theo phương *Z*. Mặt bên chuyển động theo phương *OX*, phương trình: $X = a(t)$. Mặt thoáng có phương trình: $Y = \eta(X,t)$. Miền vật lý của bài toán tại thời điểm *t* (Hình 2):

$$\Omega_t = \left\{ (X,Y) \middle| a(t) \le X \le K, -h \le Y \le \eta(X,t) \right\}$$

,

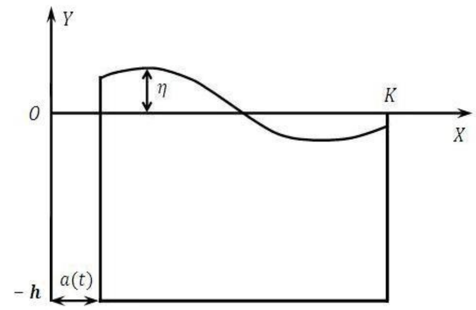
với biên:

$\Gamma_b : a(t) \le X \le K, Y = -h$;

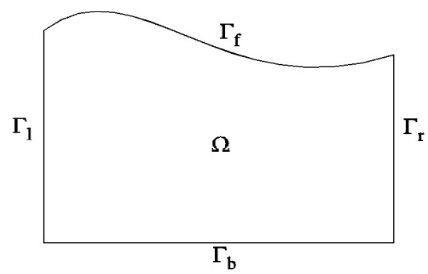
$\Gamma_f : a(t) \le X \le K, Y = \eta(X,t)$;

$\Gamma_l : X = a(t), -h \le Y \le \eta(a(t),t)$;

$\Gamma_r : X = K, -h \le Y \le \eta(K,t)$.



Hình 1. Mô hình bài toán sóng nước 2-chiều



Hình 2. Miền vật lý

Phương trình chủ đạo

Giả thiết: chất lỏng không nén được, không nhớt, không xoáy, nên tồn tại hàm thế vận tốc $\Phi = \Phi(X,Y,t)$. Phương trình không nén được cho phương trình xác định hàm thế:

$$\Delta\Phi = 0. \qquad (1)$$

Điều kiện biên

Dùng giả thiết không thấm trên hai biên cứng cố định Γ_b, Γ_r và biên cứng di động Γ_l với vận tốc $(\dot{a}(t), 0)$, ta có:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = 0 \quad \text{trên } \Gamma_b, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = 0 \quad \text{trên } \Gamma_r, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \dot{a}(t) \quad \text{trên } \Gamma_l. \qquad (4)$$

Trên mặt thoáng Γ_f sử dụng hai điều kiện:

- Điều kiện động học liên quan đến hình học của biên,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial \eta}{\partial X}; \qquad (5)$$

- Điều kiện động lực học mô tả chuyển động của mặt thoáng, thu được từ phương trình Bernoulli,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} + g\eta(X,t) = 0, \qquad (6)$$

Trong đó g là gia tốc trọng trường.

Như [6], đưa vào hàm $W(X,t) = \Phi(X, \eta(X,t), t)$ là hình chiếu của hàm thế vận tốc lên mặt thoáng của chất lỏng. Từ (5), (6) ta thu được:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right], \qquad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)^2\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right] - g\eta.$$

(8)

Như vậy, điều kiện biên của hàm Φ trên Γ_f có thể lấy là

$$\Phi = W \quad \text{trên } \Gamma_f. \qquad (9)$$

Điều kiện đầu

Lúc đầu chất lỏng đứng yên, nên điều kiện đầu cho hàm W:

$$W(X,0) = 0. \qquad (10)$$

Mặt thoáng nằm ngang nên

$$\eta(X,0) = 0. \qquad (11)$$

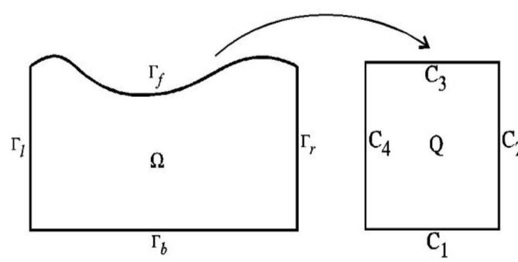
Biến đổi bài toán

Dùng phép biến đổi tọa độ

$(X,Y) \mapsto (x,y)$,

$$x = \frac{X - a(t)}{K - a(t)}, \quad y = \frac{Y + h}{\eta(X,t) + h}. \qquad (12)$$

Khi đó, miền Ω_t thành miền cố định $Q = [0,1] \times [0,1]$. Các biên $\Gamma_b, \Gamma_r, \Gamma_f, \Gamma_l$ lần lượt thành C_1, C_2, C_3, C_4 của Q (Hình 3).



Hình 3. Phép biến đổi miền

Ký hiệu: $\varphi(x,y,t) = \Phi(X,Y,t)$, $w(x,t) = W(X,t)$, $s(x,t) = \eta(X,t)$

Ma trận Jacobi của phép biến đổi:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K - a(t)} & 0 \\ \frac{-y}{[s(x,t)+h][K-a(t)]}\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{1}{s(x,t)+h} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Biến đổi phương trình và điều kiện

Phương trình (1) thành

$$A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \qquad (14)$$

trong đó

$$A = G_{11}^2,\ B = G_{11}G_{21},\ C = G_{21}^2 + G_{22}^2,\ D = G_{11}\frac{\partial G_{21}}{\partial x} + G_{21}\frac{\partial G_{21}}{\partial y}. \quad (15)$$

Phương trình (7)-(8) thành:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \dot{a}(t)(1-x)G_{11}\frac{\partial s}{\partial x} + G_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left[1 + G_{11}^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right] - G_{11}^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{a}(t)(1-x)G_{11}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{G_{11}^2}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{G_{22}^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\left[1 + G_{11}^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right] - gs. \quad (17)$$

Điều kiện biên:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,0,t) = 0 \text{ trên } C_1, \quad (18)$$

$$G_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,y,t) + G_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,y,t) = 0 \text{ trên } C_2, \quad (19)$$

$$\varphi(x,1,t) = w(x,t) \text{ trên } C_3, \quad (20)$$

$$G_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,y,t) + G_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y,t) = \dot{a}(t) \text{ trên } C_4. \quad (21)$$

Điều kiện đầu:

$$w(x,0) = 0,\ s(x,0) = 0. \quad (22)$$

Phương pháp tính

Lược đồ tính toán

Bài toán biến đổi chứa hai bài toán con:

(a) bài toán gồm phương trình (14) với điều kiện biên (18)-(21), và

(b) bài toán gồm hệ phương trình (16)-(17) với điều kiện đầu (22).

Việc giải đồng thời hai bài toán này gặp rất nhiều khó khăn do các hệ số của phương trình đạo hàm riêng (14) không phải là hằng số mà phụ thuộc vào các dữ liệu cho trước $K, h, a(t)$ và hàm $s(x,t)$ chưa biết. Cũng vậy, phương trình xác định $s(x,t)$ có mặt hàm cần tìm $\varphi(x,y,t)$ và một dẫn xuất của nó, $w(x,t)$. Để vượt qua khó khăn này ta dùng phương pháp lặp giải liên tiếp (a) và (b).

Phân hoạch khoảng thời gian khảo sát $[0,T]$ thành N khoảng con $[t_{m-1}, t_m]$, với

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Khởi đầu, biết $w_0(x) := w(x,0) \equiv 0,\ s_0(x) := s(x,0) \equiv 0$

Bước thứ m ($m \geq 1$), đã biết $w_{m-1}(x) := w(x,t_{m-1}),\ s_{m-1}(x) := s(x,t_{m-1})$ (*)

(1) Giải bài toán $\left(a_m\right)$

Tìm $\varphi_{m-1}(x,y) := \varphi(x,y,t_{m-1})$ nghiệm bài toán (a), trong đó các hệ số *A, B, C, D* trong phương trình (14), các điều kiện biên (18)-(21) được tính với $a(t), s(x,t)$ được thay bằng $a(t_{m-1}), s_{m-1}(x)$.

(2) Giải bài toán $\left(b_m\right)$

Tìm $w(x,t)$, $s(x,t)$ nghiệm bài toán (b) trong miền $[0,1]\times[t_{m-1},t_m]$, với điều kiện đầu

$$w(x,t_{m-1}) = w_{m-1}(x),\ \ s(x,t_{m-1}) = s_{m-1}(x)$$

Ở đây các thành phần ma trận Jacobi, $G_{11}, G_{22}, \partial\varphi/\partial y$ được tính với $a(t), s(x,t)$ được thay bằng $a(t_{m-1}), s_{m-1}(x)$ và φ được thay bằng $\varphi_{m-1}(x,y)$.

(3)Tính $w_m(x) := w(x,t_m)$, $s_m(x) := s(x,t_m)$.

Nếu $m+1<N$ trở lại (1), ngược lại thì dừng.

Lưu ý, từ nay về sau khi thiết lập các công thức liên quan đến các bài toán bên trong vòng lặp: các hệ số *A, B, C, D,* các điều kiện biên của bài toán $\left(a_m\right)$; các thành phần ma trận Jacobi, $G_{11}, G_{22}, \partial\varphi/\partial y$ của bài toán $\left(b_m\right)$ sẽ được tính theo các qui định kể trên dù vẫn giữ nguyên ký hiệu cũ.

Rời rạc hóa bài toán $\left(a_m\right)$

Công thức biến phân nửa yếu

Đưa vào không gian hàm $V = \left\{\psi \in H^1(Q) \middle| \psi(x,1) = 0\right\}$

Lấy $\psi \in V$ tùy ý, tích vô hướng với hai vế phương trình (14), ta được sau một số biến đổi

$$-A\int_Q \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dQ - \int_Q \frac{\partial\left(C\psi\right)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dQ - G_{11}\int_Q\left[\frac{\partial\left(G_{21}\psi\right)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\left(G_{21}\psi\right)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]dQ$$

$$+\int_Q D\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}dQ + \dot{a}(t)G_{11}\int_0^1\psi(0,y)dy - G_{11}\int_0^1 G_{21}\psi\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=0}dx = 0\,. \tag{23}$$

Lưu ý đến nhận xét về các hệ số *A, B, C, D* và các điều kiện biên.

Gọi $\tilde{\varphi} \in H^1(Q)$ là hàm thỏa điều kiện biên không thuần nhất trên C_3, $\tilde{\varphi}(x,1,t) = w(x,t)$. Đặt $\phi = \varphi - \tilde{\varphi}$ thì $\phi \in V$ thỏa (rút ra từ phương trình (23))

$$A\int_Q \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}dQ + G_{11}\int_Q\left[\frac{\partial\left(G_{21}\psi\right)}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\left(G_{21}\psi\right)}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]dQ + \int_Q\frac{\partial\left(C\psi\right)}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}dQ - \int_Q D\psi\frac{\partial\phi}{\partial y}dQ$$

$$+G_{11}\int_0^1 G_{21}\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{y=0}dx = \dot{a}(t)G_{11}\int_0^1\psi(0,y)dy - G_{11}\int_0^1 G_{21}\psi\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right|_{y=0}dx + F\,, \tag{24}$$

trong đó

$$F=-A\int_{Q}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}dQ-G_{11}\int_{Q}\left[\frac{\partial(G_{21}\psi)}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}+\frac{\partial(G_{21}\psi)}{\partial y}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right]dQ$$

$$-\int_{Q}\frac{\partial(C\psi)}{\partial y}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}dQ+\int_{Q}D\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}dQ.$$

Ký hiệu vế trái và vế phải (24) lần lượt là $a(\phi,\psi)$ và $l(\psi)$. Bài toán biến phân: với $t>0$ (cố định), tìm $\phi\in V$ thỏa $a(\phi,\psi)=l(\psi)$ với mọi $\psi\in V$.

Công thức phần tử hữu hạn

Dùng phần tử Q_4 tứ giác 4-nút. Trong phần tử *e* bất kỳ, xấp xỉ

$$\phi^e=\sum_{k=1}^{4}\phi_k^e N_k^e=\mathbf{N}^e\mathbf{d}^e,$$

trong đó $\mathbf{N}^e=[N_1^e,N_2^e,N_3^e,N_4^e]$ là ma trận hàm dạng, $\mathbf{d}^e=[\phi_1^e,\phi_2^e,\phi_3^e,\phi_4^e]^T$ là vectơ chuyển dịch phần tử.

Các hàm C,D,G_{21} cũng được xấp xỉ bằng cùng một cách như hàm ϕ:

$$C^e=\sum_{k=1}^{4}C_k^e N_k^e,\ D^e=\sum_{k=1}^{4}D_k^e N_k^e,\ G_{21}^e=\sum_{k=1}^{4}G_k^e N_k^e$$

trong đó C_k^e,D_k^e,G_k^e lần lượt là giá trị của C,D,G_{21} tại nút thứ *k* của phần tử *e*.

+ Ma trận độ cứng phần tử: $\mathbf{k}^e=[k_{ij}^e]$, trong đó

$$k_{ij}^e=A\int_e\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}dxdy+\int_e\frac{\partial\left(C^eN_i^e\right)}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}dxdy$$

$$+G_{11}\int_e\left[\frac{\partial\left(G_{21}^eN_i^e\right)}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}+\frac{\partial\left(G_{21}^eN_i^e\right)}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}\right]dxdy+\int_e D^eN_i^e\frac{\partial N_j^e}{\partial y}dxdy \quad (25)$$

nếu phần tử không có cạnh nằm trên biên C_1. Nếu có thì phải thêm vào từ liên quan đến điều kiện biên, $G_{11}\int_0^1 G_{21}\psi\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right|_{y=0}dx$.

Trong thực hành, việc thêm vào này được thực hiện ở giai đoạn áp đặt điều kiện biên.

+ Vector tải phần tử gồm ba từ. Từ liên quan đến hàm $\tilde{\varphi}$ được tính với $\tilde{\varphi}$ được xấp xỉ như hàm φ,

$$\tilde{\varphi}^e=\sum_{k=1}^{4}\tilde{\varphi}_k^e N_k^e.$$

Trong thực hành, ta chọn hàm $\tilde{\varphi}$ chỉ khác không trong các phần tử có một cạnh nằm trên C_3 nên

$$G_{11}\int_0^1 G_{21}\psi \left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\right|_{y=0} dx = 0,$$

Từ liên quan đến F có dạng giống như $a(\tilde{\varphi},\psi)$ nhưng sai khác dấu trừ nên

$$\mathbf{p}^e = -\mathbf{k}^e[\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\tilde{\varphi}_3,\tilde{\varphi}_4]^T$$

Từ còn lại liên hệ đến

$$\dot{a}(t)G_{11}\int_0^1 \psi(0,y)dy$$

chỉ được thêm khi phần tử có cạnh nằm trên C_4. Việc thêm vào này cũng được thực hiện ở giai đoạn áp đặt điều kiện biên.

Sau khi lắp ghép ta nhận được phương trình phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{KD} = \mathbf{P}, \tag{26}$$

trong đó **K, P, D** lần lượt là ma trận độ cứng, vector tải và chuyển dịch toàn cục.

Rời rạc hóa bài toán (b_m)

Khoảng thời gian $[t_{m-1},t_m]$. Chọn các điểm x_i trên đoạn $[0,1]$ trùng với các nút trên trục x. Dùng phương pháp đồng vị (collocation) rời rạc hóa theo biến không gian. Các phương trình của bài toán (b_m) rời rạc thành:

$$\frac{\partial s}{\partial t}(x_i,t) = \dot{a}(t_{m-1})(1-x_i)G_{11}(t_{m-1})\Sigma_1 s(x_i,t) + G_{22}(x_i,t_{m-1})\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_i,t_{m-1})\left[1+G_{11}(t_{m-1})^2\left(\Sigma_1 s(x_i,t)\right)^2\right]$$

$$-G_{11}(t_{m-1})^2\Sigma_1 w(x_i,t)\Sigma_1 s(x_i,t), \tag{27}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_i,t) = \dot{a}(t_{m-1})(1-x_i)G_{11}(t_{m-1})\Sigma_1 w(x_i,t) - \frac{G_{11}(t_{m-1})^2}{2}\left(\Sigma_1 w(x_i,t)\right)^2$$

$$+\frac{G_{22}(x_i,t_{m-1})^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_i,t_{m-1})\right)^2\left[1+G_{11}(t_{m-1})^2\left(\Sigma_1 s(x_i,t)\right)^2\right] - gs(x_i,t), \tag{28}$$

trong đó Σ_1 là toán tử sai phân hữu hạn, xấp xỉ đaọ hàm cấp một theo biến x. Ngoài ra, khi giải bài toán (a_m), ta còn dùng đến sai phân hữu hạn để xấp xỉ đạo hàm cấp hai, ký hiệu Σ_2. Với bước thời gian chọn đủ bé phép xấp xỉ dùng ở đây là chấp nhận được.

Điều kiện đầu:

$$s(x_i,t_{m-1}) = s_b(x_i),\;\; w(x_i,t_{m-1}) = w_b(x_i) \tag{29}$$

trong đó $s_b(x_i), w_b(x_i)$ là giá trị đầu hoặc giá trị nhận được từ bước tính trước.

Ký hiệu:

$$S(t) = \begin{bmatrix} s(x_1,t) & s(x_2,t) & \cdots & s(x_n,t) \\ w(x_1,t) & w(x_2,t) & \cdots & w(x_n,t) \end{bmatrix}$$

trong đó n là số nút trên đoạn $[0,1]$. Bài toán rời rạc (27)-(28) với điều kiện đầu (29) có thể viết dưới dạng vector:

$$\frac{dS}{dt} = \mathrm{H}(S,t), \tag{30}$$

$$S(t_{m-1}) = \begin{bmatrix} s_b(x_1) & s_b(x_2) & \cdots & s_b(x_n) \\ w_b(x_1) & w_b(x_2) & \cdots & w_b(x_n) \end{bmatrix} \quad (31)$$

trong đó $\mathrm{H} = [H_1, H_2]$ với H_1, H_2 lần lượt là vế phải của (27), (28).

Bài toán (30)-(31) có thể giải xấp xỉ bằng các phương pháp số quen thuộc như phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến.

Áp dụng số

Một chương trình tính được viết bằng Matlab để giải số bài toán với dữ liệu được cho như sau:

$$g = 9.81 \ (m/s^2), \ K = 10 \ (m),$$

$$T = 2 \ (s),$$

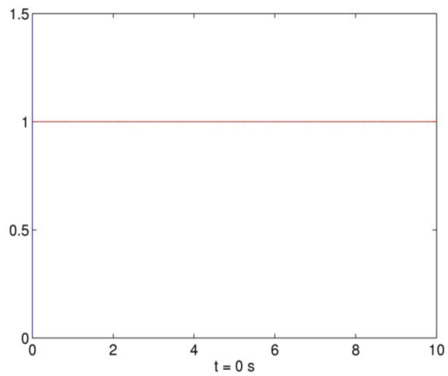
$$a(t) = \begin{cases} 0.25 - (t-0.5)^2 & \textit{nếu} \quad 0 < t < 0.5 \\ 0.25 & \textit{nếu} \quad t \geq 0.5 \end{cases} \ (s)$$

Thử nghiệm cho thấy chương trình tính toán ổn định với bước thời gian *dt* được chọn đủ bé so với *dx, dy*. Kết quả tính toán với: $dx = dy = 0.1 \ (m)$, $dt = 0.05 \ (s)$, được cho trên hình 4. Ta thấy có sự di chuyển của sóng từ mặt kích động về phía bờ bên trái cũng như sự phản xạ sóng ở bờ này. Việc bỏ qua hiệu ứng của sức căng bề mặt cùng với thủ tục làm trơn nghiệm ảnh hưởng không nhỏ đến nghiệm ở vùng kề sát hai bờ. Kết quả tính toán thu được có thể dễ dàng xử lý bằng các thủ tục hậu nghiệm cho phép xác định vận tốc truyền kích động trên bề mặt.

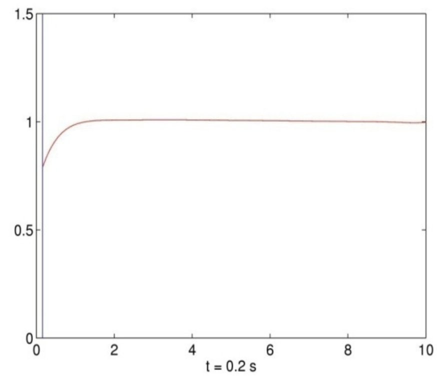
KẾT LUẬN

Trong bài này, phương pháp biến đổi miền được áp dụng để đưa bài toán xác định trên miền thay đổi (theo thời gian) về bài toán xác định trên miền cố định. Phương trình đạo hàm riêng của bài toán dẫn xuất, vì thế, không còn có dạng đối xứng đơn giản như phương trình gốc. Tuy nhiên, vì miền cố định nên lưới phần tử hữu hạn chỉ cần chọn một lần cho tất cả; điều này cho phép tiết kiệm đáng kể thời gian tính toán so với phương pháp Lagrange – Euler tùy ý. Kết quả tính thu được trong bài này đã được so sánh (phù hợp) với kết quả tính bằng phương pháp Lagrange – Euler tùy ý của tác giả đầu và L.T. Khuyên [5]. Về mặt định tính kết quả cũng cho thấy phù hợp với kết quả của Goring tìm được dựa trên mô hình nước nông [3], của A. Huerta và W.K. Liu [4] bằng phương pháp Lagrange – Euler tùy ý.

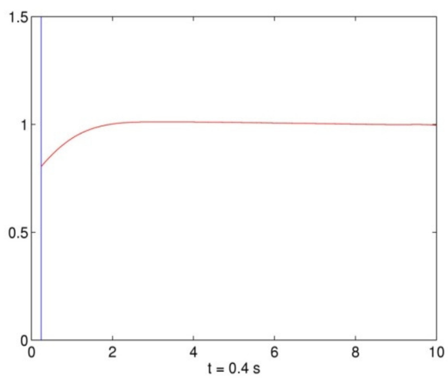
Trường hợp bài toán với đáy di động có thể thiết lập hoàn toàn tương tự. Như đã biết hiện tượng sóng thần diễn ra trong tự nhiên thường là do đáy đại dương biến đổi đột ngột, do đó, việc đặt bài toán như vậy rất có ý nghĩa. Tất nhiên, việc mở rộng phương pháp ở đây nhằm mô phỏng số hiện tượng sóng thần đòi hỏi phải nghiên cứu thêm về ảnh hưởng của phép biến đổi miền lên độ chính xác của phương pháp tính do một kích thước (phương ngang) lớn so với kích thước còn lại (độ sâu).



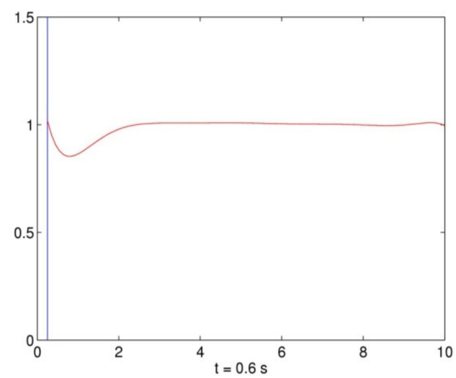
(a) Biên tự do lúc t=0s



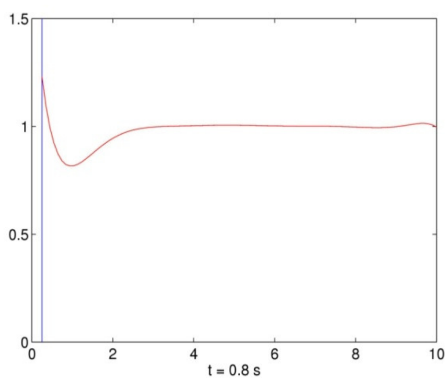
(b) Biên tự do lúc t=0.2s



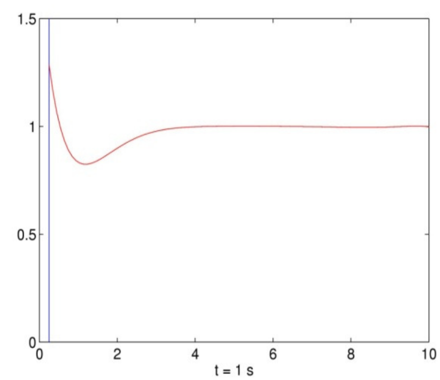
(c) Biên tự do lúc t=0.4s



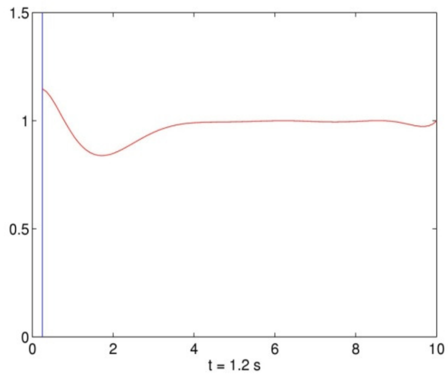
(d) Biên tự do lúc t=0.6s



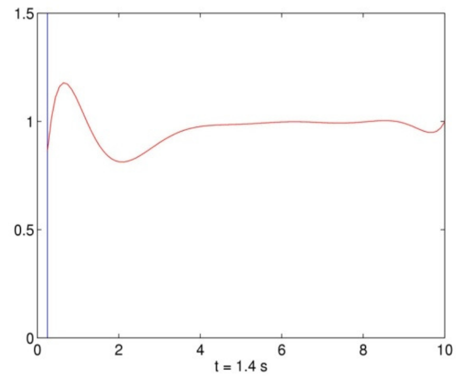
(e) Biên tự do lúc t=0.8s



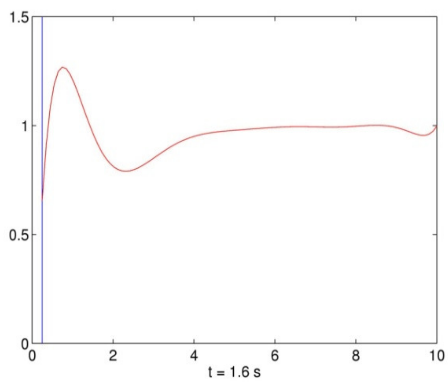
(f) Biên tự do lúc t=1s



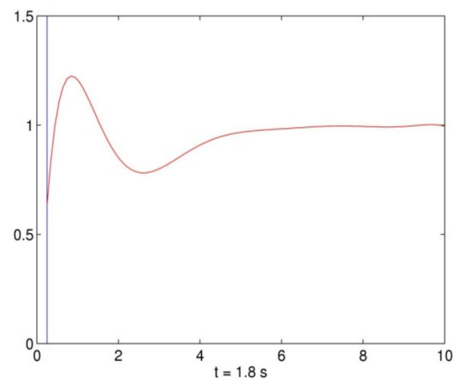
(g) Biên tự do lúc t=1.2s



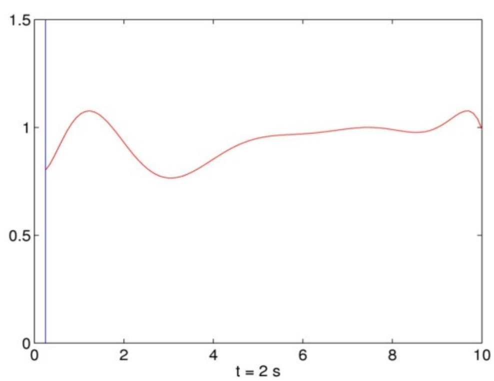
(h) Biên tự do lúc t=1.4s



(i) Biên tự do lúc t=1.6s



(j) Biên tự do lúc t=1.8s



(k) Biên tự do lúc t=2s

Hình 4. Kết quả bằng hình ảnh sau khi chạy chương trình.

THE NUMMERICAL SOLUTION OF WATER WAVE PROBLEMS USING DOMAIN TRANSFORMATION AND FINITE ELEMENT METHOD

Trinh Anh Ngoc, Huynh Than Phuc

University of Science, VNU-HCM

ABSTRACT: *In this paper, the domain transform method associated with finite element method is used in order to solve water wave problems. A numerical example is presented to show the effect of method.*

Key words: *finite element method, water wave problems.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. K. J. Bai, S.M. Choo, S.K. Chung, D.Y. Kim, Numerical slutions for nonlinear free surface flows by finite element methods, *Appl. Math. Comput*, 163, 941-959 (2005).

[2]. J. Donea, A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems,* Wiley, Chichester, (2003).

[3]. D. G. Goring, *Tsunamis - The Propagation of long waves onto a shelf* (thesis), California Institute of technology Pasadena, California, (1979).

[4]. A. Huerta, W.K. Liu, Viscous flow with large free surface motion, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 69, 277-324 (1988).

[5]. T. A. Ngọc, L. T. Khuyên, *Tính toán dòng chảy có mặt tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn Lagrange – Euler tùy ý* (báo cáo tại Hội nghị khoa học lần thứ 7, 26/11/2010, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM.

[6]. A. Pawell, R. B. Guenther, A nummerical solution to afree surface wave problem, Topological methods in Nonlinear Analysis, *Journal of the Juliusz Schauder Center,* Vol. 6, 399-416 (1995).