THIẾT LẬP CÔNG THỨC BÁN THỰC NGHIỆM TÍNH HỆ SỐ MA SÁT CỦA DÒNG CHẢY RỐI TRONG ĐƯỜNG ỐNG TRÒN

Lê Văn Dực

Trường Đại Học Bách Khoa, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 01 tháng 02 năm 2010, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 03 tháng 06 năm 2010)

TÓM TẮT: *Trên cơ sở định luật ma sát rối, lý thuyết độ dài xáo trộn của Prandtl, và quan điểm "vận tốc tường" của Bakhmeteff, sự phân bố vận tốc điểm u trên mặt cắt ướt được xác định trong trường hợp chảy rối thành trơn và thành hoàn toàn nhám. Lưu lượng Q và vận tốc trung bình V được tìm thấy sau khi thực hiện tích phân* $Q=\iint_{\omega} u.d\omega$. *Dựa vào tính chất của dòng đều, mối quan hệ giữa V, hệ số ma sát λ và vận tốc cắt* u^* *được thiết lập. Khử* u^* *sẽ tìm được V là hàm của* R_e *(Reynolds) hoặc độ nhám tương đối e/D. Từ đó, công thức tính λ có thể được xác định. Dạng công thức này giống với dạng công thức thực nghiệm của Nikuradse, chỉ có sai lệch nhỏ ở các hệ số và sai số giữa chúng không quá 1% đối với trường hợp chảy rối thành trơn ; và không quá 2% đối với trường hợp chảy rối thành hoàn toàn nhám. Qua kết quả này, tính đúng đắn của lý thuyết độ dài xáo trộn của Prandtl hầu như được khẳng định.*

Từ khoá: *Hệ số ma sát λ, lý thuyết độ dài xáo trộn của Prandtl, vận tốc tường của Bakhmeteff, chảy rối thành trơn, chảy rối thành hoàn toàn nhám, vận tốc cắt* u^*, *số Reynolds* R_e.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đối với dòng chảy ổn định trong ống tròn, ta có thể tìm thấy mối quan hệ sau đây giữa các đại lượng vật lý:

$$F(\frac{\Delta H_w}{L}, V, D, \rho, e, \mu, g) = 0$$

Trong đó: ΔH_w: tổn thất dọc đường (m); V: vận tốc trung bình mặt cắt (m/s); D: đường kính ống (m); ρ: khối lượng riêng của chất lỏng (kg/m^3); e: độ nhám tuyệt đối của thành ống (m); μ: hệ số nhớt động lực học của chất lỏng (Pa.s); g: gia tốc trọng trường (m/s^2).

Dùng phương pháp phân tích thứ nguyên, chọn V, D và ρ làm ba đại lượng lặp lại, ta sẽ đạt được công thức Darcy:

$$\Delta H_w = \lambda.\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

$$\text{Với } \lambda = f(R_e, \frac{e}{D}) \quad (2)$$

$$R_e = V.D.\frac{\rho}{\mu} \quad (3)$$

Như vậy việc xác định quan hệ hàm giữa hệ số ma sát (tổn thất dọc đường) λ, và các tham số: số Reynolds (R_e) và độ nhám tương đối e/D là vấn đề cần thiết và quan trọng. Thí nghiệm Reynolds cho chúng ta biết: dòng chảy trong ống tròn có thể xảy ra hai trạng thái:

1.1.Chảy tầng

Khi số R_e < 2320, ứng suất ma sát của dòng chảy tuân theo định luật ma sát nhớt của Newton:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (4)$$

Trong đó: τ: ứng suất ma sát của dòng chảy (Pa); u: vận tốc tại điểm trên trục y (y là trục vuông góc với phương dòng chảy) (m/s); y: khoảng cách từ thành ống đến điểm tính (m).

Dựa vào định luật này và phương trình cơ bản của dòng chảy đều trong ống tròn, ta có thể tìm ra quy luật phân bố của vận tốc u. Bằng cách tích phân, Q= $\iint_{\omega} u.d\omega$, ta có thể xác định được Q và V. Chuyển công thức tính V về dạng công thức Darcy, ta có thể xác định được:

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \qquad (5)$$

1.2.Chảy rối

Khi số R_e > 2320, ứng suất ma sát của dòng chảy tuân theo định luật ma sát rối của Prandtl [1]:

$$\tau = \tau_{nhớt} + \tau_{rối} = (\mu+\eta)\ \frac{du}{dy} \qquad (6)$$

Với, η : hệ số nhớt rối (Pa.s)

Dựa vào kết quả thí nghiệm của Nikuradse và lý thuyết lớp biên của Prandtl, dòng chảy rối có thể chia làm ba khu vực:

1.2.1.Chảy rối thành trơn

Khi mà các mố nhám bị che phủ bởi lớp mỏng chảy tầng sát thành rắn (e < δ, với δ là bề dày lớp mỏng chảy tầng). Tổn thất năng lượng của dòng chảy phụ thuộc chủ yếu vào tính nhớt, rối do bản thân dòng chảy tạo ra, nghĩa là $\lambda = f(R_e)$.

1.2.2.Chảy rối thành hoàn toàn nhám

Khi mà bề dày lớp mỏng chảy tầng (δ) nhỏ hơn nhiều so với bề cao các mố nhám (e). Khi đó các mố nhám có tác động chủ yếu đến tính chất rối của dòng chảy, nghĩa là: λ =f(e/D).

1.2.3.Chảy rối thành nhám

Chảy rối thành nhám là khu quá độ giữa chảy rối thành trơn và chảy rối thành hoàn toàn nhám. Khi đó sự rối do tính nhớt, rối do bản thân dòng chảy (R_e), và do các mố nhám (e/D) đều có tác động đáng kể đến tính chất rối của dòng chảy,

nghĩa là: $\lambda = f(R_e, e/D)$.

Sau đây chúng ta dựa vào định luật ma sát rối của Prandtl để tính toán xác định hệ số ma sát λ trong hai trường hợp:

- Chảy rối thành trơn,
- Chảy rối thành hoàn toàn nhám.

2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA DÒNG CHẤT LỎNG THỰC CHẢY ĐỀU

Dựa trên tính chất của dòng chảy đều, và theo định luật Newton II: tổng các ngoại lực tác động vào một đoạn dòng chảy, chiếu lên phương dòng chảy bằng 0, chúng ta rút ra được phương trình dòng chảy đều có dạng sau:

$$\tau_o = \gamma.R.J \qquad (7)$$

Trong đó, τ_o: ứng suất ma sát tại thành ống (Pa); γ: trọng lượng riêng của chất lỏng ($\frac{N}{m^3}$);

J: độ dốc thủy lực = $\left(\dfrac{\Delta H_w}{L}\right)$; R: bán kính thủy lực (m), trong trường hợp đường ống tròn.

Ta có: R = D/4 , suy ra D = 4.R; thế D vào công thức Darcy (1), suy ra:

$$J = \frac{\Delta H_w}{L} = \frac{\lambda . V^2}{8.R.g}$$

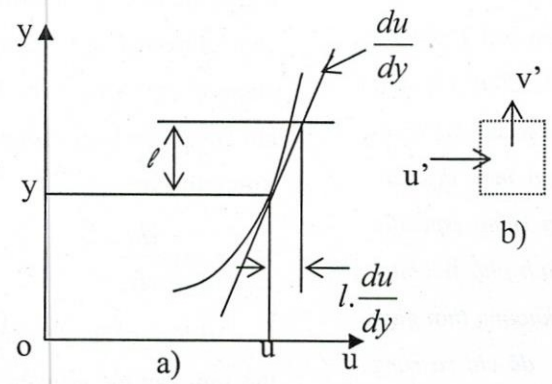
Thế J vào công thức (7), ta được:

$$\tau_o = \rho . \frac{\lambda}{8} . V^2 \text{, hay } \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = u^* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} . V \quad (8)$$

u^* có thứ nguyên là L/T, cùng thứ nguyên với vận tốc và được gọi là "vận tốc cắt" (shear velocity).

3. SỰ PHÂN BỐ VẬN TỐC TRONG DÒNG CHẢY RỐI

Sự khác nhau giữa dòng chảy tầng và dòng chảy rối là trong dòng chảy rối xuất hiện 2 thành phần vận tốc mạch động (velocity fluctuation): u' theo phương dòng chảy; và v' theo phương thẳng góc với dòng chảy (xem Hình 1).



Hình 1. Ký hiệu sử dụng cho lý thuyết độ dài xáo trộn Prandtl [1]

Áp dụng phương trình động lượng đối với phân tố diện tích song song với phương dòng chảy, ta có thể rút ra được ứng suất rối do mạch động (τ_t) như sau:

$$\tau_t = \rho . u' . v' \quad (9)$$

Áp dụng phương trình liên tục đối với một phân tố diện tích vuông song song với u' và v' (Xem Hình 1.b), ta có thể rút ra được:

$$u' \approx v' \quad (10)$$

Theo Prandtl:

$$u' \equiv l . \frac{du}{dy} \quad (11)$$

Với l là chiều dài xáo trộn (mixing length), tức là đoạn đường di chuyển của phần tử chất lỏng theo phương vuông góc với dòng chảy trước khi thực hiện sự trao đổi động với các phần tử khác ở vị trí mới. Thế (11) vào (9), lưu ý đến (10), ta được:

$$\tau_t = \rho . l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad (12)$$

Quan sát bản chất vật lý của dòng chảy rối, ta có thể nhận thấy độ dài xáo trộn tỉ lệ với khoảng cách y (theo phương vuông góc dòng chảy, tính từ mép thành rắn) ([1]), vì thế ta đặt:

$$l = K.y \qquad 13)$$

K: "hằng số phổ thông" (universal constant) trong dòng chảy rối, hoặc là hằng số Von Karman (hay hằng số Kapa).

Hiện nay, có khá nhiều nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm để khẳng định tính chất đúng đắn của hằng số này. Những kết luận chia làm 3 hướng: hằng số K bằng 0,4; nhỏ hơn 0,4 một ít, và lớn hơn 0,4 một ít. Trong đó, kết quả nghiên cứu thực nghiệm của Y. Zhang và cộng sự công bố ngày 05/12/2008 [2] dựa vào bộ dữ liệu CASES-97, về việc đo đạc khảo sát sự biến đổi của tốc độ gió theo độ cao, nhiệt độ không khí, và độ ẩm riêng (specific humidity) thu thập tại gần thành phố Wichita, tiểu bang Kansas, USA, trong khoảng thời gian từ 06/4/1997 đến 24/05/1997, đã chỉ ra rằng đối với không khí:

+Dưới điều kiện không phân tầng (neutral stratification), hằng số K = 0,4;

+Dưới điều kiện phân tầng (non-neutral stratification):

- Phân tầng ổn định (stable condition), K > 0,4

- Phân tầng không ổn định (unstable condition), K<0,4.

+ Do đó, nếu quan tâm đến sự phân tầng, một cách tổng quát, giá trị trung bình của K = 0,384 – 0,390.

Thế (13) vào (12), ta được:

$$\sqrt{\frac{\tau_t}{\rho}} = K.y.\frac{du}{dy} \qquad (14)$$

3.1 Sự phân bố vận tốc trong lớp mỏng chảy tầng

Tận dụng khái niệm về chiều dài xáo trộn, ở đây sự phân bố vận tốc rối được xem xét cho trường hợp tấm phẳng và thành trong đường ống. *Đối với dòng chảy rối trên bề mặt tấm phẳng trơn, ứng suất cắt trong lưu chất là hằng số,* τ_o (xem [1]). Khi đó, phương trình (6) có thể áp dụng được, nhưng η sẽ tiến tới 0 ở sát bề mặt thành rắn; còn μ trở nên không đáng kể khi xa khỏi bề mặt này. Nếu η không đáng kể trong phạm vi lớp mỏng chảy tầng có chiều dày y=δ, khi đó μ hoàn toàn khống chế, thì phương trình (6) trở thành:

$$\tau_o = \mu\frac{du}{dy}$$

Vì lớp mỏng chảy tầng có δ rất bé nên có thể xem vận tốc u tuyến tính với y (với y≤ δ), nên:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y}, \text{ do đó: } \frac{\tau_o}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}.\frac{u}{y} = \nu.\frac{u}{y}$$

ở đây, ν (m^2/s) được gọi là hệ số nhớt động học của chất lỏng, mà $\frac{\tau_o}{\rho} = (u^*)^2$, do đó

$$\frac{u}{u^*} = u^*.\frac{y}{\nu} \qquad \text{với } y \le \delta \ (15)$$

3.2 Sự phân bố vận tốc trong khu vực chảy rối

Khi y > δ. Trong công thức (6), μ xem như không đáng kể, nên sử dụng công thức (14), ta có:

$\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$ = K.y.$\frac{du}{dy}$ = u^*, do đó

$$\frac{du}{u^*} = \frac{1}{K}.\frac{dy}{y}$$

Sau khi lấy tích phân, ta được:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(y) + Const \qquad (16)$$

3.2.1 Trong khu vực chảy rối thành trơn

Theo Bakhmeteff, gọi u_w: "vận tốc tường" (wall velocity) là vận tốc của lưu chất ở biên lớp mỏng chảy tầng, y = δ. Do đó δ và u_w sẽ thoả 2 phương trình (15) và (16).

$$\frac{u_w}{u^*} = \frac{u^*.\delta}{\nu} = N = \frac{1}{K}Ln(\delta) + const,$$

suy ra

δ = $\frac{N.\nu}{u^*}$; và const = N - $\frac{1}{K}Ln(\delta)$

Do đó, const=N-$\frac{1}{K}Ln(\frac{N.\nu}{u^*})$=N-$\frac{1}{K}Ln(\frac{\nu}{u^*})$-$\frac{1}{K}Ln(N)$

Thế vào (16), ta được:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(\frac{y.u^*}{\nu}) + N - \frac{1}{K}Ln(N)$$

Hay $\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(\frac{y.u^*}{\nu}) + A$ (17)

A= $N - \frac{1}{K}Ln(N)$, với $N = \frac{u^*.\delta}{\nu}$

(18) .

Dựa trên số liệu thí nghiệm Nikuradse, trong khu chảy rối thành trơn, $\frac{u}{u*}$ được vẽ theo Ln$\left(\frac{y.u*}{\nu}\right)$, từ đó xác định được A. Kết quả cho: K = 0,40 và A=5,5 (xem thêm ở [1]).

3.2.2 Trong khu vực chảy rối thành hoàn toàn nhám

Gọi u_w là vận tốc tương ứng với y_w = m.e. Với e là chiều cao tiêu biểu của mố nhám, m hệ số hình dạng phụ thuộc loại mố nhám. Thế vào phương trình (16), ta được:

$\frac{u_w}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(m.e) + const$; suy ra

$$const = \frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{K}Ln(m) - \frac{1}{K}Ln(e)$$

Khử const ở phương trình (16), ta được:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(\frac{y}{e}) + \frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{K}Ln(m)$$

Hay: $\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(\frac{y}{e}) + B$ (19)

Với: B = $\frac{u_w}{u^*} - \frac{1}{K}Ln(m)$ (20)

Đối với thí nghiệm của Nikuradse, độ nhám nhân tạo là cát có đường kính hằng số (e) đã qua sàng lọc, gắn dính vào thành trong của ống, kết quả thí nghiệm chỉ ra rằng: K = 0,4 và B = 8,48 (chi tiết tham khảo Victor L. Streeter [1])

4. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC TÍNH λ

4.1 Trong khu chảy rối thành trơn

Sự phân bố vận tốc tuân theo luật (17):

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K} Ln(\frac{y.u^*}{\nu}) + A$$

Trên diện tích ướt hình tròn, xét vi phân diện tích hình vành khăn, cách tâm một đoạn (r_o –y), có bề dày dy. Ta có: $d\omega = 2\pi(r_o - y).dy$, suy ra :

$$\frac{dQ}{u^*} = \frac{u}{u^*}.d\omega = \left(\frac{1}{K} Ln\left(y.\frac{u^*}{\nu}\right) + A\right).2\pi(r_o-y).dy$$

$$\frac{Q}{u^*} = \iint_\omega \frac{dQ}{u^*}$$

$$= 2\pi \int_0^{r_o} \left[A.r_o - A.y + \frac{r_o}{K} Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) - \frac{y}{K} Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) \right].dy$$

Với : $\int Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) dy = y.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) - y$; và

$$\int y.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) dy = \frac{1}{2} y^2.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) - \frac{1}{4} y^2$$

Suy ra :

$$\frac{Q}{u^*} = 2\pi \left[A.r_o.y - \frac{A}{2} y^2 + \frac{r_o}{K} y.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) - \frac{r_o}{K} y - \frac{1}{2K} y^2.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right) + \frac{1}{4K} y^2 \right]_0^{r_o}$$

Với : $\lim_{y \to 0} \left(y.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right)\right) = 0$, và

$$\lim_{y \to 0} \left(y^2.Ln\left(\frac{y.u^*}{\nu}\right)\right) = 0$$

Suy ra : $\frac{V}{u^*} = \frac{Q}{\pi.r_o^2 u^*} = A - \frac{3}{2K} + \frac{1}{K} Ln\left(\frac{r_o.u^*}{\nu}\right)$

Thế $u^* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}.V$ (công thức (8)), suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(A - \frac{3}{2K} + \frac{1}{K} Ln\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right)\right) + \frac{1}{K\sqrt{8}} Ln\left(R_e \sqrt{\lambda}\right) \quad (21)$$

Theo thí nghiệm của Nikuradse K=0,4; A=5,5 ; suy ra :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0{,}88.Ln\left(R_e \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}91$$

Đổi ra logarithm thập phân, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0262.\log\left(R_e \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}91 \quad (22)$$

Công thức thực nghiệm của Nikuradse [3] tương ứng :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0.\log\left(R_e\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8 \qquad (23)$$

ở đây, điều kiện áp dụng đối với công thức Nikuradse là: $3x10^3 < R_e < 10^6$;

4.2 Trong khu chảy rối thành hoàn toàn nhám

Sự phân bố vận tốc tuân theo công thức (19):

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K}Ln(\frac{y}{e}) + B$$

Chứng minh tương tự như trên, ta rút ra được kết quả như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(B - \frac{3}{2K} - \frac{1}{K}Ln(2)\right) + \frac{1}{K\sqrt{8}}Ln\left(\frac{D}{e}\right)$$

(24)

Trong trường hợp của thí nghiệm Nikuradse, khu chảy rối thành hoàn toàn nhám: K=0,4 và B=8,48, suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}06 + 0{,}88Ln\left(\frac{D}{e}\right)$$

Dưới dạng logarithm thập phân :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}06 + 2{,}03.\log\left(\frac{D}{e}\right) \qquad (25)$$

Công thức thực nghiệm của Nikuradse [3] tương ứng :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}14 + 2\log\left(\frac{D}{e}\right) \qquad (26)$$

Ta có kết quả tính toán và so sánh trong Bảng 1 & Bảng 2, và được thể hiện trong Hình 2. và Hình 3.

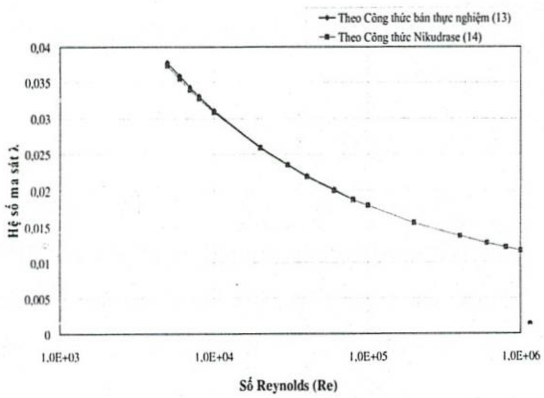
5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở định luật ma sát rối và lý thuyết độ dài xáo trộn của Prandtl, ta có thể xác định được các công thức tính hệ số ma sát λ trong hai khu vực chảy rối thành trơn, $\lambda = f(R_e)$ và chảy rối thành hoàn toàn nhám, $\lambda = f(e/D)$.

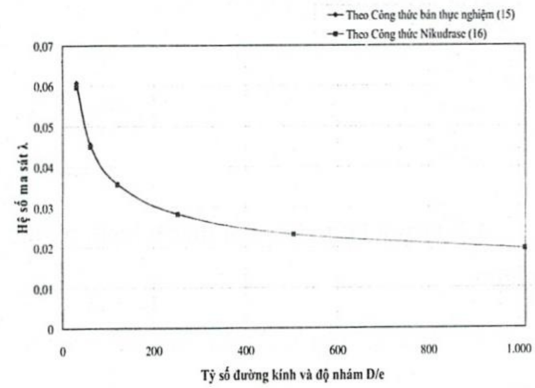
Các công thức này giống với các công thức thực nghiệm của Nikuradse về mặt dạng thức, chỉ sai lệch nhỏ các hệ số, với sai số không vượt quá 1% đối với trường hợp chảy rối thành trơn; và không quá 2% đối với trường hợp chảy rối thành hoàn toàn nhám.

Các kết quả trên đây, một lần nữa khẳng định tính đúng đắn của định luật ma sát rối và lý thuyết độ dài xáo trộn của Prandtl.

Trong khu chảy rối thành nhám, λ phụ thuộc cả hai tham số R_e và e/D, ta chưa giải quyết được vì bài toán khá phức tạp.



Hình 2. So sánh hệ số ma sát λ giữa công thức bán thực nghiệm và công thức của Nikuradse, khu chảy rối thành trơn.



Hình 3. So sánh hệ số ma sát λ giữa công thức bán thực nghiệm và công thức của Nikuradse, khu chảy rối thành hoàn toàn nhám.

Bảng 1.Tính toán và so sánh λ giữa công thức bán thực nghiệm & công thức thực nghiệm của Nikuradse, trường hợp chảy rối thành hoàn toàn nhám.

$\frac{D}{e}$	λ (tính) (25)	λ (Nikuradse) (26)	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}(\%)$
30	0,0607	0,0596	1,81%
61,2	0,0455	0,0450	1,11%
120	0,0358	0,0356	0,56%
252	0,0284	0,0283	0,35%
504	0,0233	0,0233	0,00%
1014	0,0195	0,0195	0,00%

Bảng 2. Tính toán và so sánh λ theo công thức bán thực nghiệm & công thức thực nghiệm của Nikuradse, trường hợp chảy rối thành trơn.

R_e	λ (tính) (22)	λ (Nikuradse) (23)	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}(\%)$
$5x10^3$	0,0378	0,0374	1,00%
$6x10^3$	0,0359	0,0355	0,99%
$7x10^3$	0,0343	0,0340	0,88%
$8x10^3$	0,0331	0,0328	0,91%
$1x10^4$	0,0311	0,0309	0,65%
$2x10^4$	0,0260	0,0259	0,39%

$3x10^4$	0,0236	0,0235	0,64%
$4x10^4$	0,0220	0,0219	0,46%
$6x10^4$	0,0201	0,0200	0,50%
$8x10^4$	0,0188	0,0188	0,00%
$1x10^5$	0,0180	0,0180	0,00%
$2x10^5$	0,0156	0,0156	0,00%
$4x10^5$	0,0137	0,0137	0,00%
$6x10^5$	0,0127	0,0127	0,00%
$8x10^5$	0,0121	0,0121	0,00%
$1x10^6$	0,0116	0,0116	0,00%

DERIVING THE SEMI-EMPIRICAL FORMULA TO COMPUTE THE FRICTION FACTOR λ FOR TURBULENT FLOW IN PIPE

Le Van Duc
University of Technology, VNU-HCM

***ABSTRACT**: Based on law of shear stress in turbulent flow, Prandtl's mixing length theory, and Bakhmeteff's point of view on "wall velocity", turbulent velocity distribution u on wetted area can be derived for smooth pipe and complete turbulence, rough pipe. Discharge Q and average velocity V are obtained, after the integration, $Q=\iint_{\omega} u.d\omega$ is done. Relying on the properties of uniform flow, relationship between V, friction factor λ, and shear velocity u^* is set up. After eliminating u*, velocity V is obtained as a function of Reynolds number R_e or relative roughness e/D. Finally, the value of friction factor λ can be derived as a function of R_e or e/D for the two above-mentioned cases. These formations of λ formulas are almost same as the experimental ones introduced by Nikuradse with minor deviations in the factors and their relative errors do not exceed 1% for smooth pipe, and 2% for complete turbulence, rough pipe. Through this research result, the rightness of Prandtl's mixing length theory is almost asserted.*

***Keywords:** friction factor λ, Prandtl's mixing length theory, Bakhmeteff's wall velocity, smooth pipe, complete turbulence, rough pipe, shear velocity u^*, Reynolds number.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Streeter, Victor L. *Fluid Mechanics*, Fourth Edition, New York, McGraw-Hill Book Company. (1966).

[2]. Y. Zhang, J. Ma, Z. Cao, *The Von Karman constant retrieved from CASES-97 dataset using a variational method*, Publised by Copernicus Publications on behalf of the European Geosciences Union, Atmospheric Chemistry Physics., 8, 7045-7053, (2008).

[3]. Bộ môn Cơ lưu Chất, *Giáo trình Cơ Lưu Chất*, Đại Học Bách Khoa – ĐHQG Tp. HCM, Lưu hành nội bộ. (2006).