LỚP CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN ITÔ-HERMITE

Dương Tôn Đảm, Dương Ngọc Hảo

Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 20 tháng 05 năm 2009, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 11 tháng 11 năm 2010)

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của lớp các quá trình ngẫu nhiên Itô – Hermite. Các kết quả được trình bày qua các định lý, có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu giải tích Malliavin nói riêng và trong giải tích ngẫu nhiên nói chung.*

Từ khóa*: Itô process, Itô's rule, Itô-Hermite process.*

1. GIỚI THIỆU

Các đa thức Hermite trong giải tích tất định có những tính chất rất đặc biệt, trong đó có tính trực giao; tập các đa thức Hermite lập thành một cơ sở trực giao cho không gian Hilbert các hàm thoả mãn điều kiện cho trước. Trong giải tích ngẫu nhiên, vai trò của các đa thức Hermite trong khai triển Wiener – Itô chaos là rất quan trọng [2], [5]. Phần đầu của bài này chúng tôi đưa ra khái niệm về quá trình Itô-Hermite và chỉ ra rằng chúng tạo nên một tập con của lớp các quá trình Itô, sau đó chứng minh một số công thức đặc biệt của quá trình Itô-Hermite.

2. QUÁ TRÌNH ITÔ VÀ CÔNG THỨC ITÔ

2.1. Định nghĩa 2.1 (Qúa trình Itô)

Cho không gian xác suất được lọc $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P\right)$ trên đó ta xác định quá trình Wiener $m-$chiều $W_t = \left(W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^m\right)$ với $W_t^i, i = 1,2,\ldots,m$ là các quá trình $\mathcal{F}_t$-Wiener một chiều, độc lập với nhau.

Ta nói rằng $X_t = \left(X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^n\right)$ là quá trình Itô $n-$chiều nếu các quá trình $X_t^i, i = 1,2,\ldots,n$ $\mathcal{F}_t$- thích nghi và thoả mãn hệ thức :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t F_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t G_s^{ij} dW_s^j \quad (1)$$

trong đó $F_s^i ; G_s^{ij}$ là các quá trình $\mathcal{F}_t$- đo được dần và thoả điều kiện

$$\int_0^t \left|F_s^i\right| ds < \infty; \int_0^t \left(G_s^{ij}\right)^2 ds < \infty \ hc \ \forall t < \infty; \forall i,j \quad (2)$$

Khi X_t là quá trình Itô thì từ (1) ta có thể viết

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t B_s dW_s \quad (3)$$

hoặc dạng vi phân Itô là

$$dX_t = A_t dt + B_t dW_t \quad (4)$$

với

$$A_s = \left(A_s^1, A_s^2, \ldots, A_s^n\right); \ B_s = \left(B_s^{ik}\right)_{n \times m}$$

Công thức Itô:

Cho X_t^1, X_t^2 là hai quá trình Itô một chiều. Áp dụng công thức Itô cho hai quá trình ngẫu nhiên này, ta có phép toán "cộng" và "nhân" như sau:

$$X_t^1 + X_t^2 = X_0^1 + X_0^2 + \int_0^t \left\{F_t^1 + F_t^2\right\} ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \left\{G_s^{1j} + G_s^{2j}\right\} dW_s^j \tag{5}$$

$$X_t^1 . X_t^2 = X_0^1 . X_0^2 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \left\{X_s^1 G_s^{2j} + X_s^2 G_s^{1j}\right\} dW_s^j + \int_0^t \left\{X_s^1 F_s^2 + X_s^2 F_s^1 + \sum_{j=1}^m G_s^{1j} G_s^{2j}\right\} ds \tag{6}$$

2.2. Nhận xét:

• Quá trình Itô đóng kín đối với các phép toán "cộng" và "nhân" nêu trên.Từ đó ta đi đến được nhận xét : *Tập các quá trình ngẫu nhiên Itô cùng với hai phép toán cộng và nhân như trên lập thành một trường.*

• Để quá trình Itô dạng (4) tạo nên martingale thì điều kiện cần và đủ là :

$A_t = 0 \quad h.c.$

3. QUÁ TRÌNH ITO-HERMITE

Định nghĩa 3.1. *Đa thức Hermite $H_n(t,x)$ là đa thức xác định như sau:*

$$H_0(t,x) := 1$$

$$H_1(t,x) := x$$

$$H_n(t,x) = \frac{1}{n}\left[xH_{n-1}(t,x) - tH_{n-2}(t,x)\right]$$

với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (7)

Định nghĩa 3.2: *Ta gọi $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)$ là quá trình Itô- Hermite (hay còn gọi là quá trình Hermite suy rộng), trong đó $\delta(x)$ là hàm bình phương khả tích trên $[0,T]$ với*

$$\|\delta\|_T^2 := \int_0^T \delta^2(s)\,ds < \infty,$$

và $G_T^\delta := \int_0^T \delta(s)\,dW_s$ *là tích phân Wiener.*

Có thể thấy ngay rằng lớp các quá trình Itô-Hermite này là tập con của tập các quá trình ngẫu nhiên Itô.

Định lý 3.1: *Cho $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)$ là quá trình Itô-Hermite, khi đó*

(i). $$H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)\,dW_s \tag{8}$$

(ii). $$E\left\{H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right\} = 0 \tag{9}$$

(iii). $E\left\{\left[H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right]^2\right\} = E\int\limits_0^T\left[H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\right]^2\delta^2(s)\,ds$ (10)

(iv). $E\left\{H_n\left(\|\delta_1\|_T^2, G_T^{\delta_1}\right).H_m\left(\|\delta_2\|_T^2, G_T^{\delta_2}\right)\right\} = 0,\ \forall m,n\in\mathbb{N}, m\neq n$ (11)

Chứng minh:

(i) và (ii) được chứng minh chi tiết trong

bài báo[1]

Chứng minh (iii): Áp dụng đẳng cự Itô ta có

$$E\left\{\left[H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right]^2\right\} = E\left[\int\limits_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)\,dW_s\right]^2$$

$$= E\int\limits_0^T\left[H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\right]^2\delta^2(s)\,ds$$

Chứng minh (iv): Trước hết ta nhận xét rằng

$$H_1\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int\limits_0^T \delta(s)\,dW_s$$

$$H_2\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int\limits_0^T H_1\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)dG_s^\delta = \int\limits_0^T H_1\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)\,dW_s$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^s \delta(s)\delta(t)\,dW_t\,dW_s$$

...

$$H_n\left(\|\delta_T^2\|, G_T^\delta\right) = \int\limits_0^T\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2}\prod_{k=1}^n\delta(t_k)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_{n-1}}\,dW_{t_n}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $m < n$. Đặt

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^n\delta(t_k) \tag{12}$$

$$h(s_1, \ldots, s_{n-m}, t_1, t_2, \ldots, t_m) = \prod_{k=1}^{n-m}\delta(s_k).\prod_{j=1}^m\delta(t_j) \tag{13}$$

Áp dụng tính đẳng cự Itô ta có

$$E\left\{H_n\left(\|\delta_1\|_T^2, G_T^{\delta_1}\right).H_m\left(\|\delta_2\|_T^2, G_T^{\delta_2}\right)\right\}$$

$$= E\left\{\left[\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2} g(t_1,t_2,\ldots,t_m)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_m}\right]\right.$$

$$\left.\left[\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{s_2} h(s_1,\ldots,s_{n-m},t_1,t_2,\ldots,t_m)\,dW_{s_1}\ldots dW_{t_m}\right]\right\}$$

$$= \int_0^T E\left\{\left[\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2} g(t_1,t_2,\ldots,t_m)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_m}\right]\right.$$

$$\left.\left[\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{s_2} h(s_1,\ldots,s_{n-m},t_1,t_2,\ldots,t_m)\,dW_{s_1}\ldots dW_{t_m}\right]\right\}dt_m$$

$=\ldots$

$$= \int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2} E\left[g(t_1,t_2,\ldots,t_m)\right.$$

$$\left.\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{s_2} h(s_1,\ldots,s_{n-m},t_1,t_2,\ldots,t_m)\,dW_{s_1}\ldots dW_{s_{n-m}}\right]dt_1\ldots dt_m$$

$= 0$ (vì kỳ vọng của quá trình Itô bằng không)

Định lý 3.2. *Cho* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *là các hàm thực, khi đó*

$$E\left\{H_n\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^{\delta}\right)\right\} = H_n(f,g) \tag{14}$$

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh công thức (14) bằng qui nạp

Khi $n=1$, $H_1(t,x)=x$ nên

$$\begin{aligned} E\left\{H_1\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^{\delta}\right)\right\} &= E\left(g+G_T^{\delta}\right) \\ &= g + \underbrace{E\left(\int_0^T \delta(s)\,dW_s\right)}_{0} \\ &= g = H_1(f,g) \end{aligned}$$

Giả sử (14) đúng tới $n-1$, khi đó theo công thức (7) ta có

$$E\left\{H_n\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{E\left[\left(g+G_T^\delta\right)H_{n-1}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]-\left(f+\|\delta\|_T^2\right)E\left[H_{n-2}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{gH_{n-1}(f,g)+E\left[G_T^\delta H_{n-1}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]-fH_{n-2}(f,g)-\|\delta\|_T^2 H_{n-2}(f,g)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{gH_{n-1}(f,g)-fH_{n-2}(f,g)+\underbrace{E\left[G_T^\delta H_{n-1}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]-\|\delta\|_T^2 H_{n-2}(f,g)}_{0}\right\}$$

$$=H_n(f,g)$$

Vì

$$E\left[G_T^\delta H_{n-1}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]=E\left\{\int_0^T \delta(s)\,dW_s \int_0^T H_{n-2}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\delta(s)\,dW_s\right\}$$

$$=\int_0^T \delta^2(s)\,E\left[H_{n-2}\left(f+\|\delta\|_T^2, g+G_T^\delta\right)\right]ds$$

$$=\int_0^T \delta^2(s)\,ds.H_{n-2}(f,g)$$

$$=\|\delta\|_T^2 H_{n-2}(f,g)$$

Vậy định lý được chứng minh.

Nhận xét:

- Qúa trình Itô-Hermite là martingale.
- Công thức

Error! Reference source not found. có thể coi như trường hợp riêng của

Error! Reference source not found..

4.KẾT LUẬN

Nghiên cứu các quá trình Itô-Hermite là một trong những kiến thức nền quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết giải tích Malliavin. Các kết quả trong định lý 2.1 có thể mở rộng sang trường hợp nhiều chiều.

ITÔ – HERMITE RANDOM PROCESS

Duong Ton Dam, Duong Ngoc Hao
University of Information Technology, VNU-HCM

ABSTRACT: *In this paper, we study some properties of Itô-Hermite random process which are necessary to study Malliavin calculus. Main results are in the following theorems:*

Key words: *Itô process, Itô's rule, Itô-Hermite process.*

Theorem 1. Let $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)$ be an Itô-Hermite random process, we have

$$(1).\ H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)\,dW_s$$

$$(2).\ E\left\{H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right\} = 0$$

$$(3).\ E\left\{\left[H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right]^2\right\} = E\int_0^T \left[H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\right]^2 \delta^2(s)\,ds$$

$$(4).\ E\left\{H_n\left(\|\delta_1\|_T^2, G_T^{\delta_1}\right).H_m\left(\|\delta_2\|_T^2, G_T^{\delta_2}\right)\right\} = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Theorem 2. *If $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are real deterministic functions, then*

$$E\left\{H_n\left(f + \|\delta\|_T^2, g + G_T^\delta\right)\right\} = H_n(f, g)$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1].Dương Tôn Đảm, *Một số công thức vi phân hàm ngẫu nhiên*, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ số 06/2009. (2009)

[2].Dương Tôn Đảm, *Tính toán ngẫu nhiên với quá trình dạng Hermite*, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ số 06/2008. (2008)

[3].B.K. Oskendan, *Stochastic differential equations: An Introduction with Application,* Springer. (1995)

[4].A .Friedman, *Stochastic differential equation and Application,* Dover Publication Inc. (2006)

[5].B. Oksendal, *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics, Institute of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration*, Norway. (1997).