

## ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG TRONG VIỆC TÍNH HỆ CƯỜNG ĐỘ ỨNG SUẤT

Vũ Công Hòa, Nguyễn Công Đạt

Trường Đại Học Bách Khoa, ĐHQG - HCM

(Bài nhận ngày 28 tháng 06 năm 2010, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 18 tháng 10 năm 2010)

**TÓM TẮT:** Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số được ứng dụng rất hữu hiệu trong cơ học khi dự đoán và mô hình hóa ứng xử cơ học của vật liệu và của kết cấu. Tuy nhiên trong một số trường hợp phương pháp phần tử hữu hạn trở nên phức tạp như việc mô phỏng sự di chuyển của những miền không liên tục, dẫn đến việc chia lại lưới phần tử. Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (PP-PTHHMR) cho ta một cách thức mới trong việc mô hình hóa vết nứt trên nền tảng phương pháp phần tử hữu hạn. Phương pháp này cho phép vết nứt được thể hiện một cách độc lập với lưới phần tử, do đó không cần phải chia lại lưới phần tử khi mô hình vết nứt lan truyền. Bài báo này đề cập tới việc hiện thực hóa phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng trong tính toán hệ số mật độ ứng suất, một tham số quan trọng trong việc dự đoán được hướng của vết nứt ngay khi vết nứt không còn phát triển.

**Từ khóa:** Phương pháp phần tử hữu hạn, Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng, hệ số cường độ ứng suất, Abaqus.

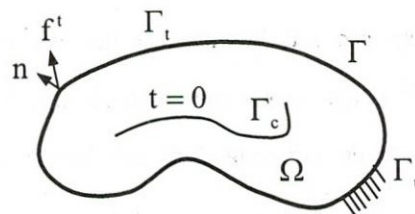
### 1. GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây PP-PTHHMR xuất hiện như một kỹ thuật hiệu quả trong việc phân tích những vấn đề của vết nứt. Nó ngày càng được sử dụng rộng rãi như một phương pháp khả thi trong mô hình vết nứt phát triển dưới giả thuyết của cơ học rạn nứt đàn hồi tuyến tính [1, 2, 3, 4]. Nguyên tắc của PP-PTHHMR ở chỗ kết hợp những hàm mở rộng vào những phần tử suy biến để tính chuyển vị ở gần đỉnh vết nứt.

So sánh với PP-PTHH cổ điển, PP-PTHHMR cung cấp những thuận lợi trong việc mô phỏng sự lan truyền của vết nứt. Phương pháp này dựa trên sự mở rộng của bậc tự do của những nút bị chia cắt bởi vết nứt.

### 2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Khảo sát một miền  $\Omega$  có biên là  $\Gamma$  bao gồm  $\Gamma_u, \Gamma_t, \Gamma_c$  với  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$



**Hình 1.** Trạng thái cân bằng của vật có vết nứt

Với:  $\Gamma_u$  là biên của chuyển vị,  $\Gamma_t$  là biên của ngoại lực,  $\Gamma_c$  là bề mặt kéo tự do (vết nứt),  $t$  là thời gian.

Khi đó phương trình cân bằng được viết :

$$\nabla \sigma + f^b = 0 \text{ trong miền } \Omega \quad (1)$$

Điều kiện biên như sau:

$$\sigma \cdot n = f^t \text{ trên biên } \Gamma_t$$

$\bar{u} = \bar{u}$  là trường chuyển vị trên biên  $\Gamma_u$   
 $\sigma \cdot n = 0$  trên biên  $\Gamma_\sigma$   
 với  $\sigma$  là tensor ứng suất,  $f^b$  là lực khối,  $f^t$  là ngoại lực,  $n$  là pháp vector đơn vị.

### 3. XẤP XỈ TRONG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG (PP-PTHHMR)

Ý tưởng cơ bản của PP-PTHHMR là mở rộng không gian hữu hạn phần tử bằng cách cộng thêm những hàm mở rộng.

Khảo sát một điểm  $x$  thuộc miền phần tử, xấp xỉ chuyển vị tại điểm  $x$  được tính như sau [1]:

$$u^h(x) = u^{fem} + u^{enr} = \sum_{I \in N_e} N_I(x) \cdot u_I + \sum_{J \in N^{enr}} \bar{N}_J(x) \cdot \psi(x) \cdot a_J \quad (2)$$

Trong (2):  $u^{fem} = \sum_{I \in N_e} N_I(x) \cdot u_I$ ;  $u^{enr} = \sum_{J \in N^{enr}} \bar{N}_J(x) \cdot \psi(x) \cdot a_J$

Với:  $u^h(x)$  là xấp xỉ chuyển vị tại điểm  $x$ ;  $u_I$  là chuyển vị nút liên tục;  $a_J$  là chuyển vị nút không liên tục;  $N_I(x)$  và  $\bar{N}_J(x)$  là các hàm dạng tương ứng;  $\psi(x)$  là hàm mở

rộng tại các nút không liên tục;  $N_e$  là tập các nút của phần tử;  $N^{enr}$  là tập các nút bị mở rộng.

Trong trường hợp mô hình vết nút phẳng ta có được xấp xỉ [2]:

$$u^h(x) = \sum_{I \in N} N_I(x) \cdot u_I + \sum_{J \in N^{dis}} \bar{N}_J(x) \cdot H_J \cdot a_J + \sum_{K \in N^{asympt}} \bar{N}_K(x) \cdot \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha K} \cdot b_{\alpha K} \quad (3)$$

Ở đây:  $N$  là tập các nút không mở rộng;  $N^{dis}$  tập các nút bị chia cắt bởi vết nứt;  $N^{asympt}$  là tập các nút chứa đỉnh vết nứt;  $b_{\alpha K}$  là bậc tự do mở rộng dưới ảnh hưởng của

hàm  $F_{\alpha K}$  tại nút K được định nghĩa như sau:

$$F_{\alpha K} = F_\alpha(x) - F_\alpha(x_K) \quad (4)$$

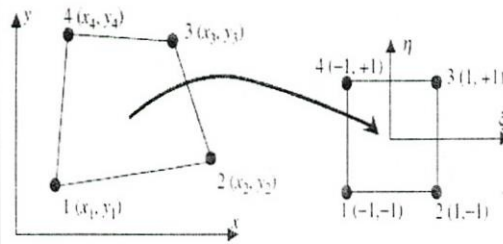
Khi đó trường chuyển vị

$$u^h = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_I^{fem} & N_I^{enr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_I^{fem} & u_I^{enr} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

Điều này được thể hiện rõ hơn thông qua phần tử tứ giác với hàm dạng tuyến tính. Đây là một phần tử thông dụng trong PP-PTHHMR vì việc tính toán dựa trên phần tử này không quá

phức tạp và chính xác hơn so với phần tử tam giác nói chung.

Xét một phần tử tứ giác



Hình 2. Phân tử tứ giác trong hệ tọa độ tổng thể và hệ tọa độ địa phương.

Ta có các hàm dạng trong tọa độ phần tử tương ứng:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) ; N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) ; N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

Lúc này trường chuyển vị:

$$u_i^h = u_i^{fem} + u_i^{enr} \quad (7)$$

$$u_i^h = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^{fem} & N_i^{enr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{fem} & u_i^{enr} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

$$N_i^{fem} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$N_i^{enr} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 & \bar{N}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_1 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{Với: } \bar{N}_i = N_i \psi_i, \psi_i(x_i) = \psi(x_i) - \psi(x_{id}) \quad (11)$$

$$\text{Khi đó: } \mathbf{u}_i^{fem} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{x4} & u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{y4} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_i^{enr} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} & a_{x4} & a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} & a_{y4} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

#### 4. RỜI RẠC HÓA PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG

Theo thuyết cân bằng năng lượng [1]:

$$W^{in} = W^{ext} \quad (14)$$

Tương đương:

$$\int_{\Omega} \sigma d\varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} f^b \delta u d\Omega + \int_{\Gamma} f^t \delta u d\Gamma \quad (15)$$

Việc hiện thực hóa phương trình trên sử dụng PP-PTHMMR thu được phương trình sau:

$$K u^h = f \quad (16)$$

Với  $K$  là ma trận cứng tổng thể;  $u^h$  là vector bậc tự do nút bao gồm bậc tự do mở rộng và  $f$  là vector ngoại lực.

Trong PP-PTHMMR thì  $K$ ,  $f$  được định nghĩa như sau:

$$K = \begin{bmatrix} K^{fc-fc} & K^{fc-en} \\ K^{en-fc} & K^{en-en} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Với

$$K^{fe-fe} = \int_{\Omega} B^{fe^T} C B^{fe} d\Omega \quad K^{en-en} = \int_{\Omega} B^{en^T} C B^{en} d\Omega \quad (18)$$

$$K^{fe-en} = \int_{\Omega} B^{fe^T} C B^{en} d\Omega = \int_{\Omega} B^{en^T} C B^{fe} d\Omega = K^{en-fe}$$

$$f = [f_i^u \quad f_i^a \quad f_i^{b_1} \quad f_i^{b_2} \quad f_i^{b_3} \quad f_i^{b_4}]^T$$

$$f_i^u = \int_{\Gamma_i} N_i f^t d\Gamma + \int_{\Omega} N_i f^b d\Omega$$

$$f_i^a = \int_{\Gamma_i} N_i H f^t d\Gamma + \int_{\Omega} N_i H f^b d\Omega \quad (19)$$

$$f_i^{b_\alpha} = \int_{\Gamma_i} N_i F_\alpha f^t d\Gamma + \int_{\Omega} N_i F_\alpha f^b d\Omega$$

$(\alpha = 1, 2, 3, 4)$

Với B là ma trận đạo hàm của hàm dạng:

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad B_i^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad B_i^\alpha = \begin{bmatrix} (N_i F_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_\alpha)_{,y} \\ (N_i F_\alpha)_{,y} & (N_i F_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$(\alpha = 1 \div 4)$

Xét trong trường hợp phân tử tứ giác. Ta có tensor biến dạng :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = D u_i^h(x) \quad (21)$$

Với D là toán tử đạo hàm, khi đó:

$$\varepsilon = D N_i u_i^h = B u_i^h \quad (22)$$

Kết hợp hai trường hợp cơ bản và mở rộng ta có được :

$$B = [B_i^{fcm} \quad B_i^{enr}] \quad (23)$$

$$B_i^{fcm} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \end{bmatrix}; \quad B_i^{enr} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & \bar{N}_{3,x} & \bar{N}_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{2,y} & \bar{N}_{3,y} & \bar{N}_{4,y} \\ \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{2,y} & \bar{N}_{3,y} & \bar{N}_{4,y} & \bar{N}_{1,x} & \bar{N}_{2,x} & \bar{N}_{3,x} & \bar{N}_{4,x} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Công việc còn lại của việc tính toán là định nghĩa những hàm mở rộng  $\Psi$  [5].

#### 4.1. Hàm Heaviside $\psi(x) = H(\xi)$

Hàm của xấp xỉ  $u^h(x)$  được viết lại ở dạng:

$$u^h = \sum_{I \in N} N_I u_I + \sum_{J \in N^{enr}} (\bar{N}_J H(\xi) - \bar{N}_J H(\xi_J)) a_J \quad (25)$$



$H_{,i} = 1$  tại vết nứt,  $H_{,i} = 0$  tại những nơi khác. Suy ra công thức (20) được viết lại như sau:

$$B_i^a = \begin{bmatrix} N_{i,x}H & 0 \\ 0 & N_{i,y}H \\ \dot{N}_{i,y}H & N_{i,x}H \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\phi(x)_{,i} = [N_{1,i} \ N_{2,i} \ N_{3,i} \ N_{4,i}] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (i = x, y) \quad (27)$$

### 4.3. Hàm mở rộng gần đỉnh vết nứt

$$\psi(x) = F_\alpha(r, \theta)$$

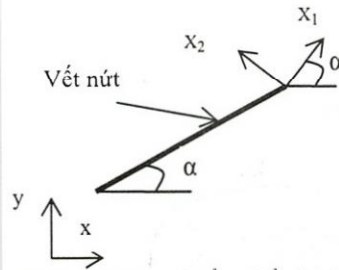
### 4.2. Hàm dốc $\psi(x) = |\phi(x)|$

Đạo hàm của  $\psi(x)$  được tính

$$(\psi(x))_{,i} = \text{sign}(\phi(x))\phi_{,i}(x)$$

Đạo hàm của  $\phi(x)$  theo hai biến  $x, y$  được tính như sau:

Hàm mở rộng tại đỉnh vết nứt được định nghĩa ở dạng hệ trục tọa độ  $(r, \theta)$  gắn với đỉnh vết nứt.



Hình 3. Hệ tọa độ tổng thể và hệ tọa độ địa phương.

$$F_\alpha(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (28)$$

Đạo hàm của  $F_\alpha(r, \theta)$  trong hệ trục  $(r, \theta)$

$$\begin{aligned} F_{1,r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} & F_{1,\theta} &= \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} & F_{2,r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} & F_{2,\theta} &= -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ F_{3,r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} & F_{3,\theta} &= \sqrt{r} \left( \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \\ F_{4,r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta & F_{4,\theta} &= \sqrt{r} \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta + \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Trong hệ trục tọa độ  $(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
 F_{1,x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} & F_{1,x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} & F_{2,x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} & F_{2,x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 F_{3,x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} & F_{3,x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right) & F_{4,x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \theta & & \\
 F_{4,x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right) & & & & & & 
 \end{aligned} \quad (30)$$

Cuối cùng trong hệ trục tổng thể ta thu được

$$F_{\alpha,x} = F_{\alpha,x_1} \cos \alpha - F_{\alpha,x_2} \sin \alpha \quad F_{\alpha,y} = F_{\alpha,x_1} \sin \alpha + F_{\alpha,x_2} \cos \alpha \quad (31)$$

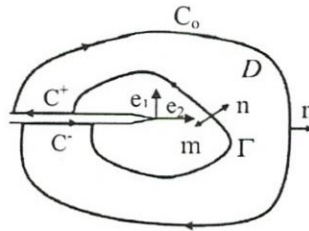
Trong (31):  $\alpha$  là góc hợp bởi vết nứt và trục x

### 5. TÍNH HỆ SỐ MẬT ĐỘ ỨNG SUẤT DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TƯƠNG TÁC

Hệ số mật độ ứng suất là một tham số quan trọng trong việc phân tích vết nứt phát triển. Hệ số mật độ ứng suất được đo bằng sự thay đổi ứng suất tại vùng lân cận đỉnh vết nứt. Vì vậy hệ số mật độ ứng suất có vai trò quan trọng trong việc biết được hướng của vết nứt ngay

khi vết nứt không còn lan truyền. Phương pháp tích phân tương tác là một kỹ thuật rất hữu hiệu trong việc lập trình để tính hệ số mật độ ứng suất.

Xét một vết nứt trong tọa độ đề-các, với  $\Gamma$  là chu tuyến bao quanh đỉnh vết nứt.



Hình 4. Tích phân J xung quanh đỉnh vết nứt.

Tích phân J theo chu tuyến  $\Gamma$  được định nghĩa như sau [3]:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} \left[ W \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (32)$$

Với  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  là lực kéo trên chu tuyến  $\Gamma$ ;  $n_j$  pháp vector ngoài của  $\Gamma$ ;  $W$  là mật độ năng lượng biến dạng.

Trong phương pháp tích phân tương tác, một trường hỗ trợ được đặt thêm vào đối tượng chứa vết nứt cùng với trường hiện có. Lúc này tích phân J là tổng của hai trường này.

$$J = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}) (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{aux}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}) \frac{\partial (u_i + u_i^{aux})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (33)$$

Trong (33):  $\sigma_{ij}$  là các thành phần ứng suất;  $\sigma_{ij}^{aux}$  là các thành phần ứng suất bổ trợ;  $\varepsilon_{ij}$  là các thành phần biến dạng;  $\varepsilon_{ij}^{aux}$  à các thành phần biến dạng bổ trợ.

$$M = \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W^M \sigma_{1j} \right] n_j d\Gamma \quad (35)$$

$$\text{và } W^M = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij} \quad (36)$$

( $J^{act}$  là tích phân J thực;  $J^{aux}$  là tích phân J bổ trợ;  $M$  được gọi là tích phân tương tác và  $W^M$  được gọi là năng lượng tương tác)

Từ mối quan hệ của tích phân J và hệ số mật độ ứng suất, ta có:

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2); \quad (37)$$

$$M = \frac{2}{E} (K_I \cdot K_I^{aux} + K_{II} \cdot K_{II}^{aux})$$

Ở đây:  $K_I$  và  $K_I^{aux}$  là hệ số cường độ ứng suất và hệ số cường độ ứng suất trạng thái bổ trợ theo dạng nứt mode I;  $K_{II}$  và  $K_{II}^{aux}$  là hệ số cường độ ứng suất và hệ số cường độ ứng suất trạng thái bổ trợ theo dạng nứt mode II.

Đối với từng dạng vết nứt ta chọn  $K_I^{aux} = 1$ ;  $K_{II}^{aux} = 0$  cho dạng nứt thứ nhất (mode I), và ngược lại cho dạng nứt thứ hai (mode II). Khi đó:

Dạng rút gọn của công thức (33) là:

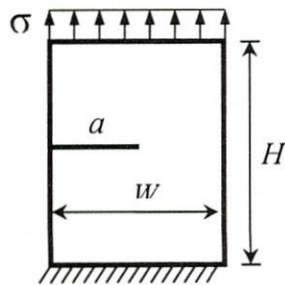
$$J = J^{act} + J^{aux} + M \quad (34)$$

$$K = \frac{E'}{2} M \quad (38)$$

Trong công thức (38),  $E' = E$  khi có trạng thái ứng suất phẳng và  $E' = \frac{E}{1-\nu}$  khi có trạng thái biến dạng phẳng. Với E là mô-đun đàn hồi dọc (Young's modulus) và  $\nu$  là hệ số poisson.

## 6. KẾT QUẢ VÀ SO SÁNH

Trong phần này giới thiệu việc sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng để mô phỏng một ví dụ điển hình của cơ học nứt. Một tấm có kích thước (0.08 x 0.04) m như hình 5, chịu kéo với ứng suất  $\sigma = 1000$  MPa cạnh dưới cố định theo phương y, các tham số vật liệu là  $E = 117.10^3$  MPa,  $\nu = 0.34$ .



Hình 5. Tấm hình chữ nhật chịu kéo

Theo lý thuyết hệ số mật độ ứng suất  $K_I$  được tính như sau [1]:

$$K_I = C \sigma \sqrt{\pi a} \quad (39)$$

$$C\left(\frac{a}{W}\right) = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{W}\right) + 10.55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (40)$$

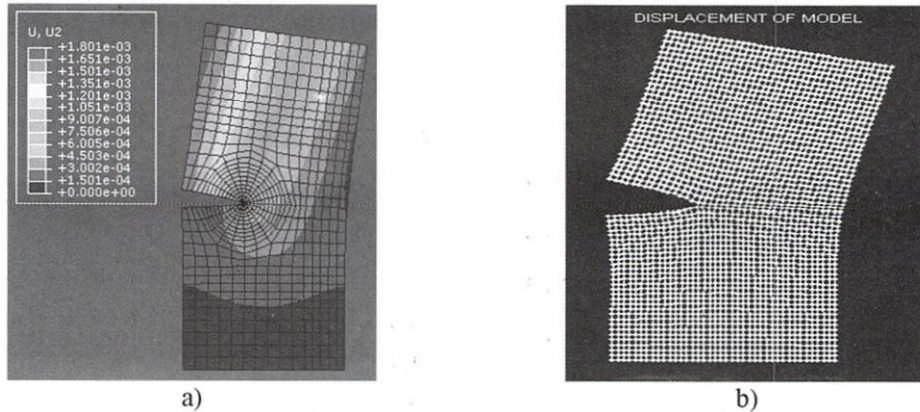
khí  $a = 0.015m$  thì hệ số mật độ ứng suất theo lý thuyết bằng  $428.3 \text{ Mpa}\sqrt{m}$ . Để tiện cho việc so sánh một tấm hình chữ nhật chịu kéo được chia với nhiều lưới phần tử khác nhau bởi phần tử tứ giác, để tiếp cận với kết quả chính xác.

Trên hình 6 chuyển vị theo phương Y của tấm được giải bằng Abaqus và XFEM, một

Trong đó  $a$  là chiều dài vết nứt,  $W$  là chiều rộng tấm, và  $C$  là hệ số thực nghiệm [1]

phần mềm khá mạnh trong lĩnh vực cơ học phi tuyến trên nền tảng phương pháp phần tử hữu hạn.

Bảng 1 và hình 7 so sánh chuyển vị lớn nhất theo phương y ( $U_{Ymax}$ ) của tấm với nhiều lưới phần tử khác nhau khi giải bằng Abaqus và XFEM.



Hình 6. Chuyển vị theo phương Y của tấm giải bằng a) Abaqus và b) XFEM.

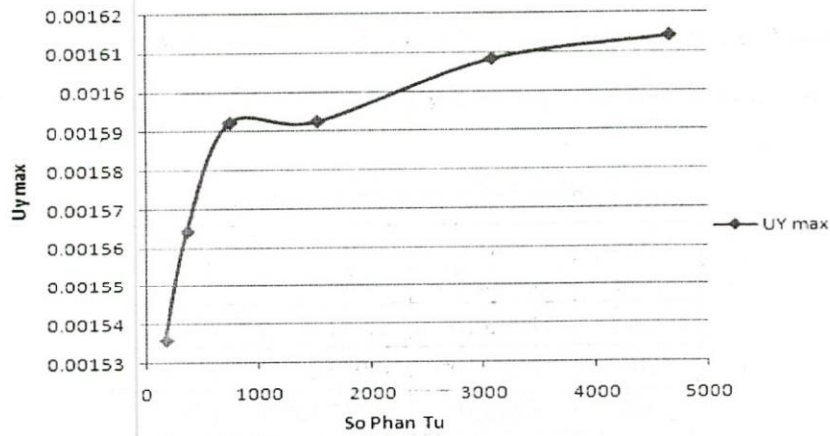
Bảng 1. Chuyển vị lớn nhất theo phương y

Số phần tử	$U_Y \text{ max}$ (Abaqus)	$U_Y \text{ max}$ (PTHHMR)	Sai Số (%)
171	$1,801.10^{-3}$	$1,5360.10^{-3}$	14,714
361	$1,801.10^{-3}$	$1,5643.10^{-3}$	13,143
741	$1,801.10^{-3}$	$1,5921.10^{-3}$	11,599
1521	$1,801.10^{-3}$	$1,5924.10^{-3}$	11,582
3081	$1,801.10^{-3}$	$1,6082.10^{-3}$	10,705
4661	$1,801.10^{-3}$	$1,6140.10^{-3}$	10,381



Bảng 2. Ứng suất lớn nhất theo phương y

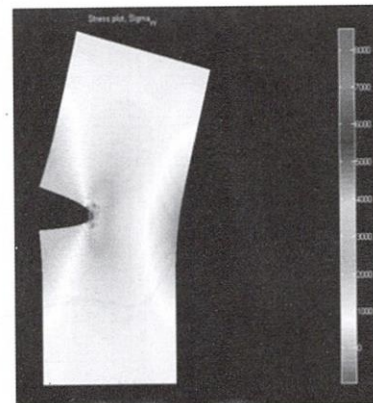
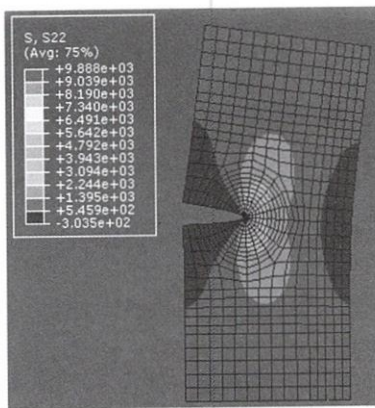
Số phần tử	$\sigma_{YY} \max$ (Abaqus)	$\sigma_{YY} \max$ (PTHHMR)
171	$9,888.10^3$	$2,8355.10^3$
361	$9,888.10^3$	$4,7754.10^3$
741	$9,888.10^3$	$6,7139.10^3$
1521	$9,888.10^3$	$7,4157.10^3$
3081	$9,888.10^3$	$8,0143.10^3$
4661	$9,888.10^3$	$10,033.10^3$



Hình 7. Quan hệ giữa tổng số phần tử và chuyển vị lớn nhất  $U_{Ymax}$

Bảng 2 và hình 9 so sánh ứng suất lớn nhất theo phương Y ( $\sigma_{YY} \max$ ) của tấm với nhiều

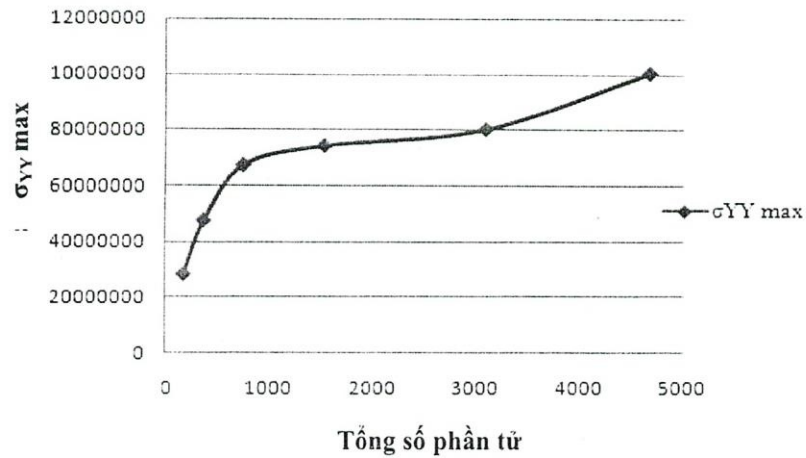
lưới phần tử khác nhau khi giải bằng Abaqus và XFEM.



a)

b)

Hình 8. Ứng suất trong tấm theo phương Y giải bằng a) Abaqus và b) XFEM

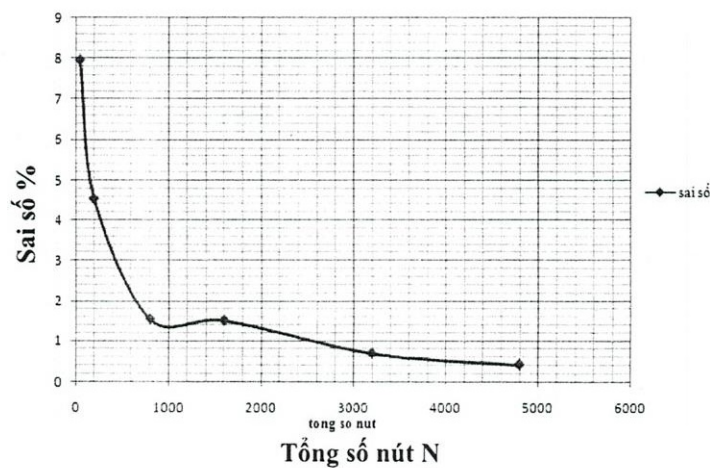


Hình 9. Đồ thị quan hệ giữa tổng số phần tử và ứng suất lớn nhất theo trục Y ( $\sigma_{YY \max}$ ).

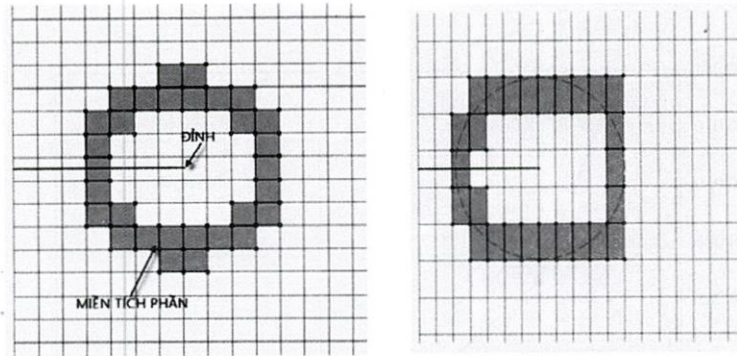
Bảng 3 và hình 10 so sánh hệ số mật độ ứng suất với các lưới phần tử khác nhau và hệ số mật độ ứng suất theo lý thuyết

Bảng 3. Hệ số mật độ ứng suất  $K_I$

Số nút	$K_I$ (lý thuyết)	$K_I$ (xấp xỉ)	Sai số (%)
50	$4.283.10^2$	$3.942.10^2$	7.966
200	$4.283.10^2$	$4.089.10^2$	4.532
800	$4.283.10^2$	$4.217.10^2$	1.547
1600	$4.283.10^2$	$4.218.10^2$	1.511
3200	$4.283.10^2$	$4.253.10^2$	0.695
4800	$4.283.10^2$	$4.265.10^2$	0.4144



Hình 10. Đồ thị đánh giá sai số % của hệ số mật độ ứng suất  $K_I$  so với lý thuyết dựa trên tổng số nút N.



Lưới (20 x 40)

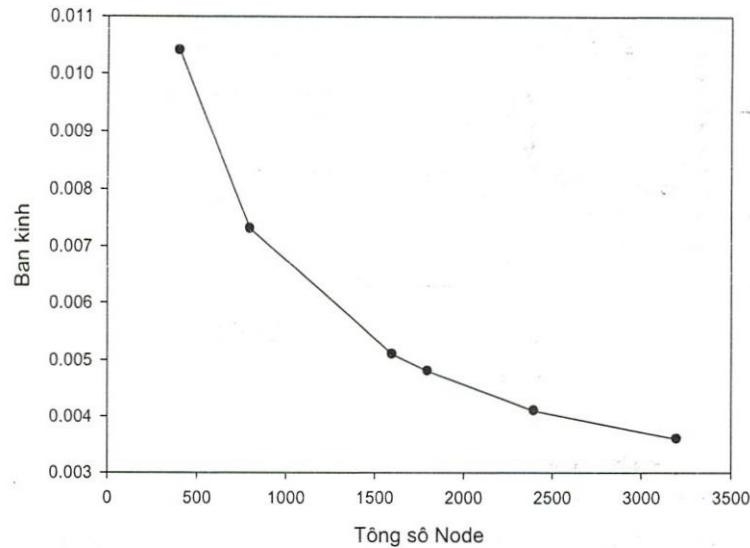
Lưới (20 x 20)

Hình 11. Chu tuyến tích phân J

Bảng 4: Quan hệ giữa bán kính chu tuyến và tổng số nút

Tổng số nút	Bán kính chu tuyến	$\frac{K_I - K_{I, XFEM}}{K_I} (\%)$
400	$10.4 \cdot 10^{-3}$	2.8229
800	$7.3 \cdot 10^{-3}$	1.6036
1600	$5.1 \cdot 10^{-3}$	3.1759
1800	$4.8 \cdot 10^{-3}$	3.1397
2400	$4.1 \cdot 10^{-3}$	2.5076
3200	$3.6 \cdot 10^{-3}$	1.7101

Tổng số nút	Tích phân J		
	Giải tích	XFEM	Sai số (%)
400	1.380	1.303	5.580
800	1.380	1.336	3.188
1600	1.380	1.293	6.304
1800	1.380	1.294	6.232
2400	1.380	1.311	5.000
3200	1.380	1.333	3.406



Hình 12. Quan hệ giữa tổng số nút N và bán kính chu tuyến R.

## 7. KẾT LUẬN

Việc áp dụng phương pháp số để giải quyết các vấn đề của cơ học rạn nứt là cần thiết trong thực tế. Thông qua sự hỗ trợ của máy tính và PP – PTHHMR, những mô hình vết nứt được giải quyết một cách thuận lợi, nhanh chóng. Ví dụ như hệ số mật độ ứng suất  $K_{IC}$  trước đây được tính thông qua thực nghiệm,

nhưng điều này đã được khắc phục thông qua phương pháp phân tử hữu hạn mở rộng bằng chương trình mô phỏng trên máy tính. Bài báo này dừng lại ở chỗ chỉ mô phỏng một ví dụ cơ bản của cơ học nứt. Trong các nghiên cứu kế tiếp theo sự tính toán và mô phỏng sự lan truyền các dạng mô hình vết nứt sẽ được tiếp tục phát triển.

## APPLYING OF EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD FOR CALCULATING STRESS INTENSITY FACTOR

Vu Cong Hoa, Nguyen Cong Dat

University of Technology, VNU – HCM

**ABSTRACT:** Finite element method is a very powerful numerical method to predict and model mechanical behavior of material and structure. However, in some cases finite element method is more complicated like the modeling of moving discontinuities, lead to the need of updating the mesh to match the geometry of discontinuity. Extended finite element method (XFEM) is a new technique, which can



help us to model crack independently of the mesh; hence it is no need to remesh during propagation of the crack. In this paper, an extended finite element method is used to calculate stress intensity factor. It's important parameter when we predict the direction of crack in the event of crack stops propagation.

**Keywords:** finite element method, extended finite element method, stress intensity factor, Abaqus.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Mohammadi S., *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of structure*, Blackwell Publishing, 24-115 (2008).
- [2]. Moës N., Sukumar N., Moran B., Belytschko T., An Extended Finite Element Method for Two and Three Dimensional Crack Modeling, in *ECCOMAS 2000*, Barcelona, Spain, (9/2000).
- [3]. Carlos Cueto-Felgueroso, Implementation Domain Integral Approach for J Integral Evaluations, *Transactions*, SMiRT 16, Washington DC, 1355, (8/2001).
- [4]. Vinh P. N., Timon R., Stéphane B., Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Mathematics and Computers in Simulation* 79 (3), 763-813 (2008).
- [5]. Bodas S., *Extended Finite Element Method and Level Set Method with Applications to Growth of Cracks and Biofilms*, Ph.D thesis, Northwestern University (2003).
- [6]. Ferreira A. J. M., *Matlab Codes for Finite Element Analysis Solids and Structure*, Springer Publisher, 143-160 (2008).
- [7]. Chessa J., *Programing the Finite Element Method with Matlab*, Northwestern University (2002).