

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN DẦM LIÊN HỢP CÓ XÉT ĐẾN TƯƠNG TÁC BÁN PHẦN

Lê Lương Bảo Nghi, Bùi Công Thành
Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 12 tháng 08 năm 2008, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 30 tháng 03 năm 2009)

TÓM TẮT: Bài báo trình bày việc phân tích phi tuyến dầm thép-bê tông liên hợp có xét đến tương tác bán phần do biến dạng của liên kết chống cắt bằng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên chuyển vị. Ứng xử phi tuyến của vật liệu và liên kết chống cắt cũng được xét đến. Trong phương pháp này, phần tử hữu hạn cho dầm liên hợp có 8 bậc tự do được thiết lập dựa trên mô hình động học của Newmark. Áp dụng số cho bài toán dầm liên hợp nhịp đơn giản và nhịp liên tục. Các kết quả phân tích được so sánh với thí nghiệm để đánh giá độ tin cậy của phương pháp. Thực hiện một số khảo sát để xem xét mức độ ảnh hưởng của tương tác bán phần, ứng xử phi tuyến của vật liệu và liên kết chống cắt đến ứng xử của dầm liên hợp.

1. GIỚI THIỆU

Trong ngành công nghiệp xây dựng, dầm thép-bê tông liên hợp được sử dụng rất phổ biến đặc biệt trong cầu và trong hệ thống sàn của các cao ốc. Dầm liên hợp (gọi tắt dầm LH) xét ở đây gồm một bản bê tông liên kết với dầm thép bởi các liên kết chống cắt tại bề mặt tiếp xúc giữa hai thành phần. Hiện tượng xuất hiện sự trượt giữa bản bê tông và dầm thép do biến dạng của liên kết chống cắt được gọi là tương tác bán phần, đây là một thuộc tính tự nhiên của dầm LH và nó ảnh hưởng khá rõ rệt đến ứng xử của dầm LH.

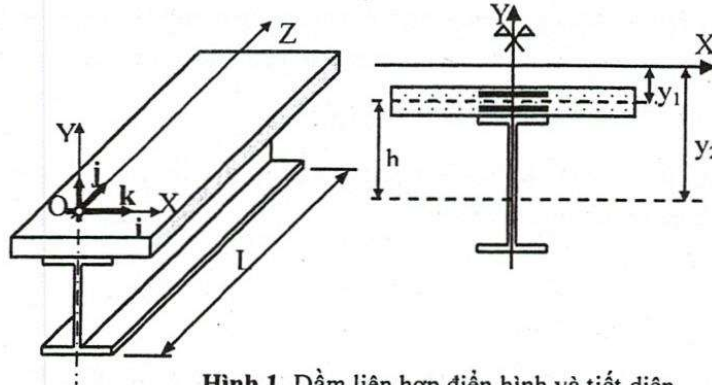
Một trong những nghiên cứu sớm nhất về dầm LH là những thí nghiệm và đề xuất mô hình lý thuyết cho dầm LH của Newmark [1]. Kể từ đó, nhiều nghiên cứu về mặt thực nghiệm cũng như lý thuyết về ứng xử dầm LH đã được báo cáo. Các nghiên cứu thực nghiệm như: thí nghiệm về dầm LH của Chapman [2], Ansourian [3]... Các nghiên cứu về mặt lý thuyết như: phân tích dầm LH bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) dựa trên chuyển vị của Arizumi [4]; phương pháp PTHH hỗn hợp của Ayoub [5], Dall'Asta; bằng mô hình phần tử hữu hạn "chính xác" của Faella [6], phương pháp PTHH dựa trên lực của Ayoub [7]; phương pháp ma trận độ cứng trực tiếp của Ranzi [9,10]....

Bài báo này trình bày phương pháp PTHH dựa trên chuyển vị để phân tích phi tuyến dầm LH có xét đến tương tác bán phần và ứng xử phi tuyến của vật liệu cũng như liên kết chống cắt. Phương pháp này sử dụng mô hình động học của Newmark để thiết lập phương trình cân bằng. Mô hình này là sự kết hợp của hai dầm Euler-Bernoulli (một cho bản bê tông và một cho dầm thép) bằng các liên kết chống cắt có độ cứng hữu hạn phân bố dọc theo chiều dài dầm. Thiết lập ma trận độ cứng cho phần tử dầm LH với 8 bậc tự do (BTD). Áp dụng số cho bài toán dầm LH nhịp đơn giản và nhịp liên tục. So sánh kết quả với số liệu thí nghiệm để đánh giá độ tin cậy của phương pháp. Đồng thời thực hiện một số khảo sát số để xem xét mức độ ảnh hưởng của tương tác bán phần, ứng xử phi tuyến của vật liệu và liên kết, nứt trong bản bê tông đến ứng xử của dầm LH.

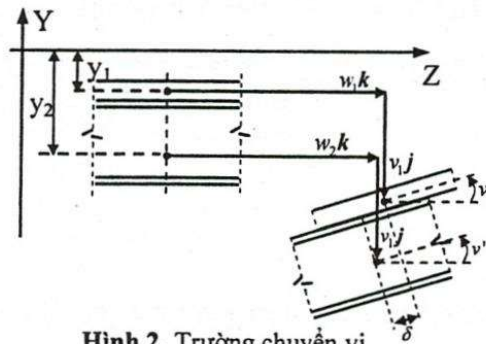
2. MÔ HÌNH ĐỘNG HỌC VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

Xét dầm liên hợp điển hình như trong hình 1. A_1, A_2, A : lần lượt là diện tích tiết diện của thành phần thứ 1, 2 và của cả tiết diện. $\{0, X, Y, Z\}$ hệ trục tọa độ tham chiếu với các vectơ

đơn vị i, j, k . Các giả thiết dựa trên mô hình dầm LH của Newmark như sau: chuyển vị, biến dạng là nhỏ, tiết diện vẫn phẳng và vuông góc với trục dầm sau khi biến dạng; ảnh hưởng của biến dạng của liên kết chống cắt được tính đến bằng phân tử mặt tiếp xúc; không xét đến hiện tượng xoắn và uốn ngoài mặt phẳng đối xứng; các liên kết chống cắt chỉ cho phép xảy ra sự trượt (slip) theo trục dọc OZ tại bề mặt tiếp xúc giữa hai lớp.



Hình 1. Dầm liên hợp điển hình và tiết diện



Hình 2. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của dầm liên hợp được thể hiện như sau:

$$u_{\alpha}(y, z) = v(z)j + [w_{\alpha}(z) - (y - y_{\alpha})v'(z)]k \text{ trong } A_{\alpha} \times [0, L] (\alpha = 1, 2) \quad (1)$$

trong đó: v, w_{α} là các hàm vô hướng thể hiện chuyển vị theo phương Y và Z tại vị trí trục tham chiếu y_{α} của tiết diện A_{α} (hình 2). Trường chuyển vị được biểu diễn dưới dạng suy rộng bởi vectơ:

$$u^T = [w_1 \quad w_2 \quad v] \quad (2)$$

Từ các giả thiết có thể thấy các biến dạng trong dầm LH chỉ gồm biến dạng dọc trục

$$\varepsilon_{za}(y, z) = w'_{\alpha} - (y - y_{\alpha})v''(z) = \varepsilon_{\alpha}(z) + (y - y_{\alpha})\chi(z) \text{ trong } A_{\alpha} \times [0, L] (\alpha = 1, 2) \quad (3)$$

($\varepsilon_{\alpha} = w'_{\alpha}$ là biến dạng dọc trục tại vị trí trục tham chiếu y_{α} và $\chi = -v''$ là độ cong) và trượt tại bề mặt tiếp xúc

$$s(z) = w_1(z) - w_2(z) + hv'(z) \text{ trong } [0, L] \quad (4)$$

với $h = y_1 - y_2$ là khoảng cách giữa hai trục tham chiếu của hai thành phần (hình 2). Biến dạng dọc trục và trượt tại bề mặt được biểu diễn dưới dạng suy rộng như sau:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \chi \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^2 \\ 1 & -1 & h\partial \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ v \end{bmatrix} = \mathcal{D}u \quad (5)$$

với ∂ là toán tử đạo hàm theo z . Phương trình (5) cũng chính là điều kiện tương thích.

Áp dụng nguyên lý công khả dĩ, ta có phương trình cân bằng như sau:

$$\int_0^L \mathbf{r}^T \cdot \hat{\varepsilon} dz = \int_0^L \mathbf{p}^T \cdot \mathcal{H} \hat{u} dz \quad \forall \hat{u}, \hat{\varepsilon} \text{ trong } [0, L] \quad (6)$$

với $\hat{u}, \hat{\varepsilon}$ lần lượt là chuyển vị và biến dạng khả dĩ; \mathbf{r}, \mathbf{p} lần lượt là ứng suất suy rộng và ngoại lực suy rộng biểu diễn bởi hai vectơ:

$$\mathbf{r}^T = [N_1 \quad N_2 \quad M_{12} \quad q] \quad (7)$$

$$\mathbf{p}^T = [p_{z1} \quad p_{z2} \quad p_y \quad m_x] \quad (8)$$

với N_α là tổng ứng suất trong A_α ; M_{12} là tổng mômen uốn M_α của ứng suất trong A_α ; q là lực cắt tác dụng lên các liên kết chống cắt trên đơn vị chiều dài dầm; p_{z1}, p_{z2}, p_y, m_x lần lượt là hai lực phân bố dọc trục, lực phân bố vuông góc trục dầm và momen phân bố; và toán tử \mathcal{H} xác định như sau:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial \end{bmatrix} \quad (9)$$

Quan hệ giữa ứng suất suy rộng và biến dạng suy rộng được thể hiện như sau:

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}\varepsilon \quad (10)$$

với \mathbf{D} xác định như sau:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \overline{EA}_1 & 0 & \overline{ES}_1 & 0 \\ 0 & \overline{EA}_2 & \overline{ES}_2 & 0 \\ \overline{ES}_1 & \overline{ES}_2 & \overline{EJ}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (11)$$

trong đó:

$$\overline{EA}_\alpha = \int_{A_\alpha} E_\alpha dA_\alpha \quad (12a)$$

$$\overline{ES}_\alpha = \int_{A_\alpha} E_\alpha (y - y_\alpha) dA_\alpha \quad (12b)$$

$$\overline{EJ}_\alpha = \int_{A_\alpha} E_\alpha (y - y_\alpha)^2 dA_\alpha \quad (12c)$$

với E_α là môđun đàn hồi của của vật liệu trong thành phần α ; $\overline{EJ}_{12} = \overline{EJ}_1 + \overline{EJ}_2$; k : độ cứng đơn vị của liên kết chống cắt (tổng độ cứng của các chốt trên 1 đơn vị dài). Tùy phương pháp giải phương trình cân bằng mà E_α sẽ là môđun tiếp tuyến hay cắt tuyến và được tính từ ε_α thông qua quan hệ ứng suất-biến dạng của vật liệu. Lập luận tương tự cho k .

3. PHÂN TÍCH DẦM LH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN DỰA TRÊN CHUYỂN VỊ

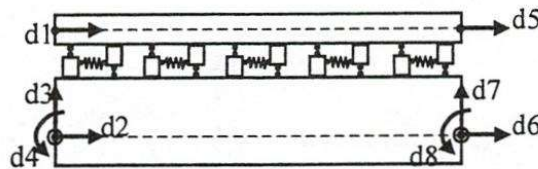
Sử dụng phương pháp PTHH dựa trên chuyển vị để giải quyết bài toán với hàm đa thức xấp xỉ trường chuyển vị trong phần tử:

$$\bar{u} = Nd \quad (13)$$

với N là ma trận hàm dạng và d là véc-tơ chuyển vị nút phần tử (kí hiệu \odot biểu diễn sự xấp xỉ của trường). Nếu sử dụng phần tử 8 bậc tự do (BTD) thì véc-tơ chuyển vị nút có dạng sau:

$$d_{8DOF}^T = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8] \quad (14)$$

Lúc này chuyển vị đứng trong dầm sẽ được diễn tả bởi hàm đa thức Hermite bậc ba và chuyển vị dọc được diễn tả bởi hàm tuyến tính.



Hình 3. Phần tử dầm LH 8 bậc tự do

Từ (5), (10) và (13) ta có véc-tơ xấp xỉ biến dạng và véc-tơ xấp xỉ ứng suất như sau:

$$\bar{\epsilon}_u = \mathcal{N}Nd = Bd \quad (15)$$

$$\bar{\tau}_u = D\epsilon_u = DBd \quad (16)$$

với $B = \mathcal{N}N$ là ma trận tính biến dạng.

Thế (15) vào (16) vào (6) ta có:

$$\int_0^L (DBd)^T \cdot B\hat{d}dz = \int_0^L p^T \cdot \mathcal{N}\hat{d}dz \quad \forall \hat{d} \text{ trong } [0, L] \quad (17)$$

$$\text{Đơn giản } \hat{d} \text{ ở hai vế và sắp xếp lại ta có: } \int_0^L K_e \cdot d = P_e \quad (18)$$

$$\text{với: } K_e = \int_0^L B^T DBdz \quad : \text{ Ma trận độ cứng của phần tử} \quad (19)$$

$$P_e = \int_0^L (\mathcal{N}N)^T pdz \quad : \text{ Véc-tơ tải nút của phần tử} \quad (20)$$

Khi xét đến ứng xử phi tuyến của vật liệu thì ma trận độ cứng theo (19) sẽ tính bằng tích phân số. Khi tính tích phân theo phương chiều dài dầm thì sử dụng tích phân số Gauss-Lobatto. Khi tính tích phân theo phương chiều cao tiết diện (tính các đại lượng $\overline{EA}_\alpha, \overline{ES}_\alpha, \overline{EJ}_\alpha$ trong D theo (12) tại điểm Gauss thứ i) thì sử dụng tích phân số hình thang, tiết diện dầm sẽ được chia thành nhiều dải hình chữ nhật song song với trục X.

Sử dụng mô hình tam tuyến tính do L.X. Fang đề xuất [11] để diễn tả quan hệ ứng suất-biến dạng trong vật liệu bê tông (hình 4):

$$\sigma_c^{(1)} = 0; \quad \sigma_c^{(2)} = 0.7f_c; \quad \sigma_c^{(3)} = f_c$$

$$\varepsilon_c^{(1)} = 0; \quad \varepsilon_c^{(2)} = \frac{0.7f_c}{E_c}; \quad \varepsilon_c^{(3)} = 0.002 \quad (34)$$

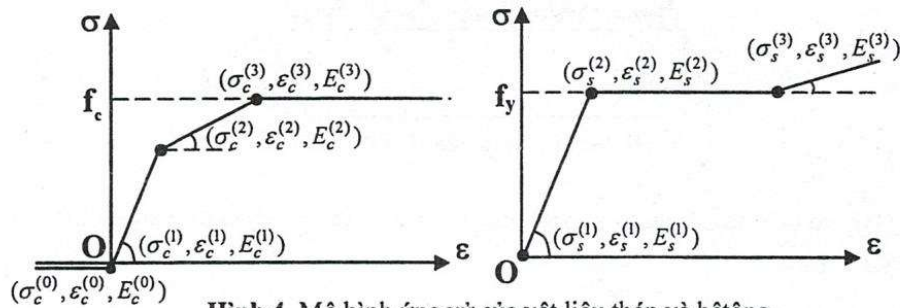
$$E_c^{(1)} = E_c; \quad E_c^{(2)} = \frac{0.3f_c}{\varepsilon_c^{(3)} - \varepsilon_c^{(2)}}; \quad E_c^{(3)} = 0$$

và thép:

$$\sigma_s^{(1)} = 0; \quad \sigma_s^{(2)} = f_y; \quad \sigma_s^{(3)} = f_y$$

$$\varepsilon_s^{(1)} = 0; \quad \varepsilon_s^{(2)} = \frac{f_y}{E_s}; \quad \varepsilon_s^{(3)} = 10\varepsilon_c^{(2)}$$

$$E_s^{(1)} = E_s; \quad E_s^{(2)} = 0; \quad E_s^{(3)} = 0.005E_s$$



Hình 4. Mô hình ứng xử của vật liệu thép và bê tông

Sử dụng mô hình do Ollgaard đề xuất để diễn tả mối quan hệ lực cắt-trượt của liên kết chống cắt:

$$P = P_{\max} (1 - e^{-\beta s})^\alpha \quad (21)$$

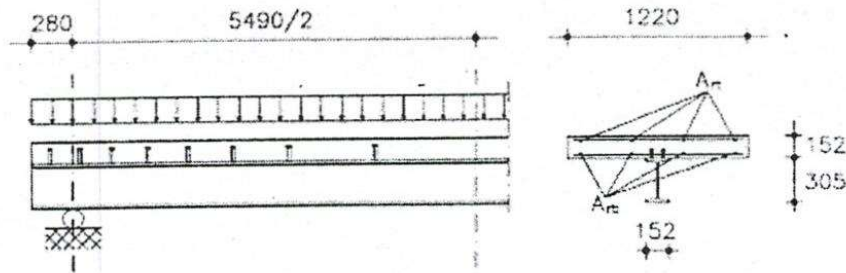
với s là chuyển vị trượt (mm); α, β (mm⁻¹) là các hệ số phụ thuộc vào kết quả thí nghiệm.

Việc phân tích phi tuyến bài toán kết cấu thực chất là việc giải phương trình cân bằng phi tuyến. Có nhiều phương pháp để giải phương trình cân bằng phi tuyến. Trong báo cáo này tác giả sử dụng phương pháp trực tiếp (Direct method) hay còn gọi là phương pháp “độ cứng cát tuyến”. Trong phương pháp này, kết cấu được phân tích trực tiếp dưới tổng tải trọng. Đây là quá trình giải lặp, ma trận độ cứng được cập nhật dựa trên giá trị các giá trị chuyển vị, biến dạng thu được từ vòng lặp trước. Sự hội tụ coi như xảy ra khi sai số về chuyển vị giữa hai vòng lặp liên tiếp nhỏ hơn tiêu chuẩn hội tụ (giá trị ε đủ bé).

4. ỨNG DỤNG SỐ

4.1. Ví dụ 1: dầm thép-bê tông liên hợp nhịp đơn giản

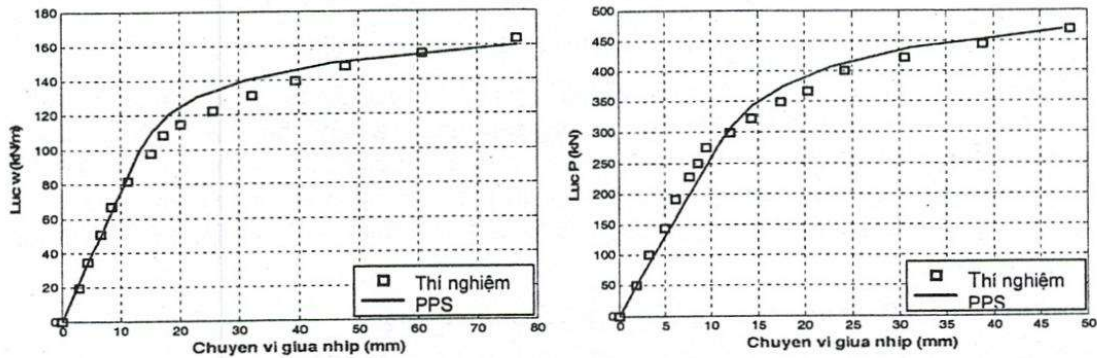
Xét dầm liên hợp nhịp đơn giản như trong thí nghiệm được thực hiện bởi Chapman và Balakrishma [2] (hình 6). Đặc trưng hình học của tiết diện xem trên hình 6. Khi thí nghiệm với tải phân bố đều, sử dụng 32 liên kết chống cắt đường kính 19mm bố trí thành từng cặp và phân bố trên dầm theo qui luật tam giác (hình 5). Khi thí nghiệm với tải tập trung tại giữa nhịp, sử dụng 100 liên kết chống cắt đường kính 12.7 mm bố trí trên dầm thành từng cặp và phân bố đều trên dầm với khoảng cách 120 mm.



Hình 5. Sơ đồ hình học và tiết diện dầm LH

Bê tông: cường độ chịu nén $f_c = 30$ MPa; mô đun đàn hồi: $E_c = 30000$ MPa. Thép: cường độ chảy f_y của cánh dầm, bụng dầm, thép gia cường lần lượt là 269 MPa, 301 MPa, 320 MPa; mô đun đàn hồi: $E_s = 206000$ MPa. Liên kết chống cắt: đường kính 19 mm, $Q_u = 129$ kN; $\beta = 1.3$ mm⁻¹, $\alpha = 0.65$; đường kính 12.7 mm, $Q_u = 66$ kN; $\beta = 0.8$ mm⁻¹; $\alpha = 0.45$.

❖ So sánh kết quả phương pháp số với kết quả thí nghiệm của Chapman và Balakrishma

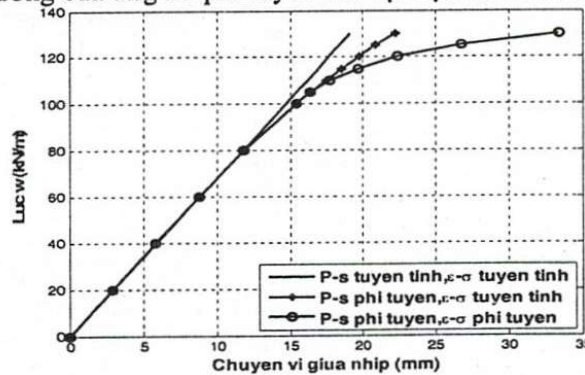


(a) Chịu tải phân bố (b) Chịu tải tập trung

Hình 6. So sánh phương pháp số với kết quả thí nghiệm của Chapman và Balakrishma

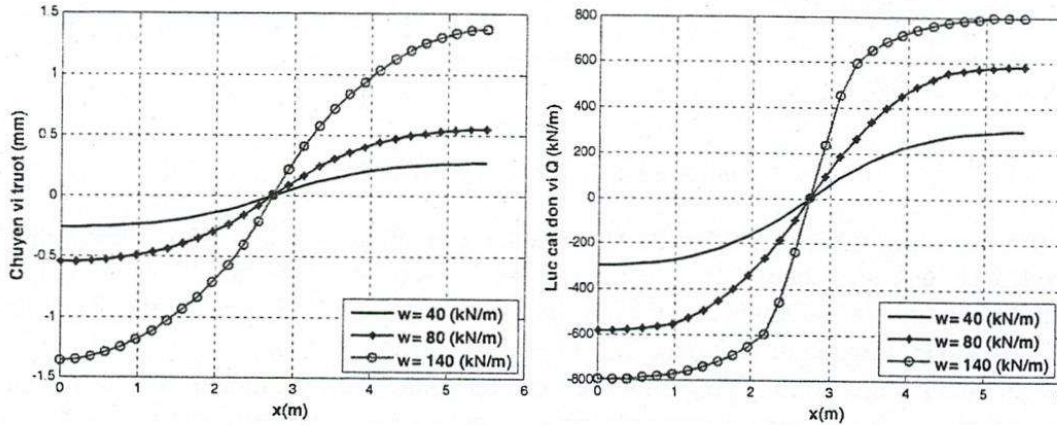
Biểu đồ trên hình 6 cho thấy chuyển vị giữa nhịp của dầm tính nhận được từ phương pháp số không sai lệch nhiều với kết quả thí nghiệm trong cả hai thí nghiệm dầm LH nhịp đơn giản chịu tải phân bố và chịu tải tập trung. Từ đó cho thấy độ tin cậy của phương pháp để áp dụng trong thực tiễn là khá cao.

❖ Khảo sát ảnh hưởng của ứng xử phi tuyến của vật liệu và liên kết



Hình 7. Khảo sát ảnh hưởng của ứng xử phi tuyến đến độ võng dầm

Biểu đồ trên hình 7 cho thấy khi tải còn nhỏ thì ít có sự khác biệt về độ võng dầm khi xem ứng xử của vật liệu và liên kết là tuyến tính hay phi tuyến. Nhưng khi tăng tải lên dần thì sự khác biệt càng rõ rệt. Đặc biệt khi tải lớn thì sự khác biệt về chuyển vị khi có xét và không xét đến ứng xử phi tuyến của vật liệu là khá lớn.

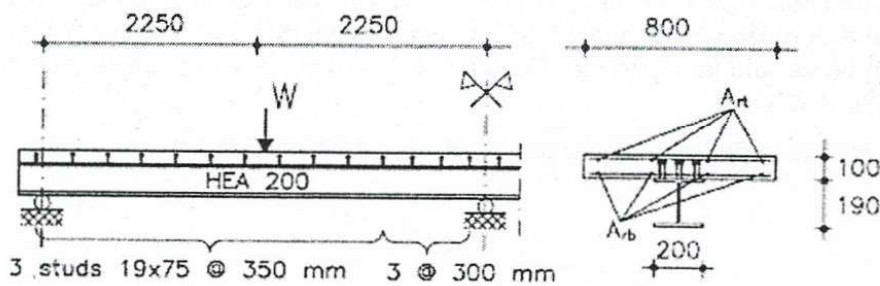


Hình 8. Chuyển vị trượt và lực cắt đơn vị với cấp tải khác nhau

Biểu đồ trên hình 8 cho ta thấy chuyển vị trượt và lực cắt tác dụng lên liên kết chống cắt trên đơn vị chiều dài dầm tăng khi tăng tải trọng tác dụng. Ta thấy những liên kết tại đầu dầm bị biến dạng nhiều hơn các liên kết xa đầu dầm, vì độ cứng của các liên kết tại đầu dầm sẽ bị mềm đi khi tăng tải, lực cắt tác dụng lên liên kết sẽ phân phối dần vào giữa dầm, điều này làm cơ sở để đặt các liên kết rải đều trên dầm chứ không nhất thiết phải đặt liên kết nhiều hơn ở khu vực đầu dầm.

4.2. Ví dụ 2: dầm thép-bê tông liên hợp hai nhịp liên tục

Xét dầm liên hợp gồm hai nhịp liên tục như trong thí nghiệm được thực hiện bởi Ansourian [3] như hình 9. Đặc trưng hình học của tiết diện xem trên hình 9. Sử dụng chốt chống cắt đường kính 19mm rải đều với khoảng cách 300mm, mỗi hàng gồm 3 chốt như hình 9.



Hình 9: Sơ đồ hình học và tiết diện dầm LH nhịp liên tục

Bê tông: cường độ chịu nén $f_c = 34$ MPa; mô đun đàn hồi: $E_c = 30000$ MPa. Thép: cường độ chảy f_y của cánh dầm, bụng dầm, thép gia cường lần lượt là 236 MPa, 238 MPa, 430 MPa; mô đun đàn hồi: $E_s = 206000$ MPa. Liên kết chống cắt: $Q_u = 110$ kN; $\beta = 1.2$ mm⁻¹; $\alpha = 0.85$. Tải trọng tác dụng là lực tập trung tác dụng tại giữa mỗi nhịp

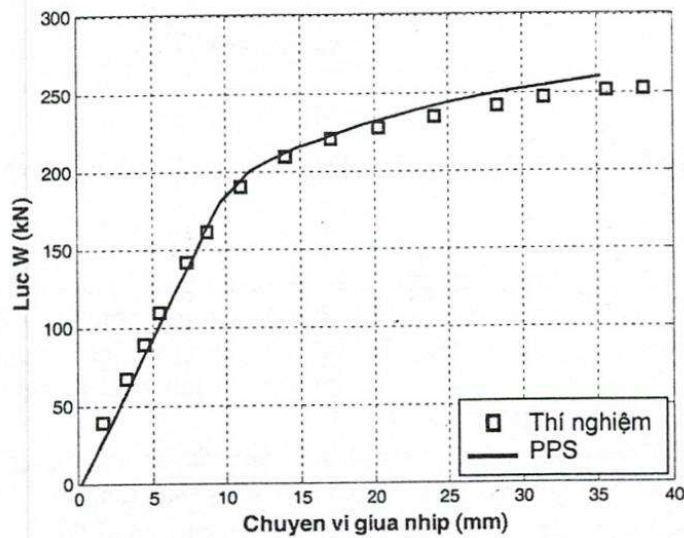
❖ So sánh kết với kết quả thí nghiệm của Ansourian

Từ biểu đồ trên hình 10 cho thấy kết quả chuyển vị giữa nhịp nhận được từ phương pháp số khá gần với kết quả thí nghiệm của Ansourian trong bài toán dầm LH hai nhịp liên tục. Điều này chứng tỏ phương pháp số sử dụng trong luận văn là khá tin cậy.

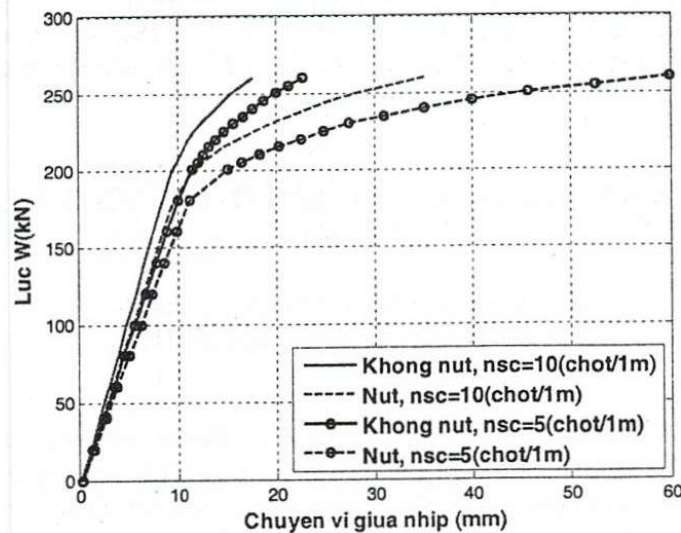
❖ Khảo sát ảnh hưởng của nứt bê tông

Biểu đồ trên hình 11 cho ta thấy chuyển vị đứng khi có tính đến nứt luôn lớn hơn khi không tính đến nứt. Và độ chênh lệch này càng tăng khi mức độ liên kết tại bề mặt tiếp xúc càng giảm.

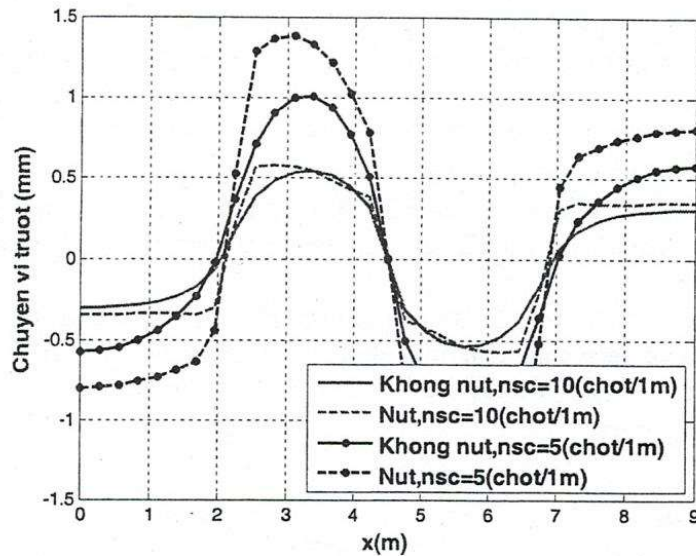
Biểu đồ trên hình 12 cho ta thấy chuyển vị trượt khi xét đến nứt bê tông luôn lớn hơn khi không xét. Và độ chênh lệch càng tăng mức độ liên kết tại bề mặt tiếp xúc càng giảm. Giá trị lớn nhất của chuyển vị tại vị trí khoảng 1/8 nhịp dầm gần gối tựa.



Hình 10. So sánh giữa kết quả từ phương pháp số và kết quả thí nghiệm của Ansourian



Hình 11. Chuyển vị giữa nhịp khi có nứt và không nứt đến bê tông bị nứt



Hình 12. Chuyển vị trượt khi có xét và không xét đến bê tông bị nứt

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày việc phân tích phi tuyến cho dầm thép-bê tông liên hợp có xét ảnh hưởng của tương tác bán phần bằng phương pháp PTHH dựa trên chuyển vị với phân tử 8 bậc tự do. Tuy phương pháp phương pháp PTHH dựa trên chuyển vị sử dụng các hàm chuyển vị là các hàm dạng xấp xỉ nhưng phương pháp này có ưu điểm là đơn giản, dễ lập trình tính toán và cho kết quả khá tốt khi sử dụng nhiều phân tử.

Các so sánh kết quả nhận được từ phương pháp số với các kết quả thí nghiệm cho thấy độ tin cậy của phương pháp số là khá cao, có thể ứng dụng trong thực tiễn.

Tương tác bán phần trong dầm ảnh hưởng rất rõ rệt đến chuyển vị đứng của dầm. Quan hệ phi tuyến trượt-lực trượt cho phép sự phân phối lực trượt đều khắp chiều dài dầm, điều này làm cơ sở để rải các neo chống cắt phân bố đều trên chiều dài dầm.

Ứng xử phi tuyến của vật liệu và liên kết chống cắt ảnh hưởng khá rõ rệt đến ứng xử của dầm LH. Sự nứt trong bê tông cũng ảnh hưởng khá rõ rệt đến ứng xử của dầm LH.

NON-LINEAR ANALYSIS OF COMPOSITE BEAMS WITH PARTIAL INTERACTION

Le Luong Bao Nghi, Bui Cong Thanh
University of Technology, ĐHQG-HCM

ABSTRACT: This paper present the displacement-based finite element formulation for the non-linear analysis of composite steel-concrete beams with partial interaction that occurs due to deformation of shear connectors. The formulation considers the non-linear behaviour of materials as well as shear connectors. The finite element for composite beams which is based on Newmark kinematical model has 8 DOF. Numerical applications are performed for simply

supported beam and continuous beams. The results are compared with experimental data in order to validate the reliability of the formulation. The results are also discussed for influence of partial interaction and non-linear behaviour of materials as well as shear connectors on behaviour of composite beams.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Newmark NM, Siess CP, Viest IM. *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proc Soc Exp Stress Anal, 75-92, (1951).
- [2]. Chapman JC, Balakrishman S. *Experiments on composite beams*. Struct Eng; 42:369-383, (1964).
- [3]. Ansurian P. *Experiments on continuous composite beams*, Proc Inst Civil Eng, Par 2; 71:25-51, (1981).
- [4]. Arizumi Y, Hamada S, Kajita T. *Elastic-plastic analysis of composite beams with incomplete interaction by finite element method*, Comput Struct; 14(5-6):453-62, (1981).
- [5]. Ayoub A. *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Elem Anal Des 2001; 37:929-59.
- [6]. Faella C, Martinelli E, Nigro E. *Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: "exact" analytical expression of the stiffness matrix and applications*. Comput Struct, 1001-1009, (2002).
- [7]. Ayoub A. *A force-based model for composite steel-concrete beams with partial interaction*. Journal of Constructional Steel Research 61, 387-414, (2005).
- [8]. Dall Asta A, Zona A. *Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with weak shear connection*. Finite Elem Anal Des; 40(4):25-48, (2004).
- [9]. Ranzi G, Bradford M.A. *Direct stiffness analysis of a composite beam-column element with partial interaction*, Computers & Structures, Computers and Structures; 85: 1206-1214, (2007).
- [10]. Ranzi G, Bradford M.A. *Analytical Solutions for Elevated-Temperature Behavior of Composite Beams with Partial Interaction*. J Struct Eng-ASCE; 133(6):778-799, (2007).
- [11]. Fang L.X, Chan S.L, Wong Y.L. *Numerical analysis of composite frames with partial shear-stud interaction by one element per member*, Engineering Structures; 22:1285-1300, (2000).