MỘT SỐ CÔNG THỨC VI PHÂN HÀM NGẪU NHIÊN

Dương Tôn Đảm
Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 26 tháng 02 năm 2009, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 24 tháng 04 năm 2009)

TÓM TẮT: *Trong bài báo này từ khái niệm vi-tích phân Itô đã đưa ra ra một số công thức tính vi phân của hàm các quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị dương với số mũ thực, từ đó ta sẽ thu được công thức vi phân của những hàm hợp phức tạp hơn.*

Bài báo còn đề cập đến những tính chất lý thú của quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite suy rộng,mà chúng là những công cụ rất hữu ích trong phân tích các hỗn độn-chao trong giải tích ngẫu nhiên hiện nay. Những kết quả thu được có thể ứng dụng để xem xét các quá trình rủi ro trong kinh tế và tài chính.

1. MỞ ĐẦU

Vi phân Itô của quá trình ngẫu nhiên

Ta nói rằng quá trình ngẫu nhiên S_t có vi phân Itô:

$$dS_t = \alpha(t,S_t)dt + \beta(t,S_t)dW_t \tag{1.1}$$

nếu :

$$S_t = S_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \alpha(s,S_s)ds + \int_{t_0}^{t} \beta(s,S_s)dW_t;\ (h.c)\quad t_0 < t < T$$

Công thức Itô : Cho S_t *là quá trình ngẫu nhiên có vi phân Itô và* $\varphi(t,x): R^2 \to R$ *là hàm một lần khả vi theo* t *, hai lần khả vi theo* x*.Khi đó quá trình ngẫu nhiên* $\varphi(t,S_t)$ *có vi phân Itô tính theo công thức sau*

$$\begin{aligned} d\varphi(t,S_t) &= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}\beta^2(t,S_t)\right]dt + \frac{\partial\varphi}{\partial S}dS_t \\ &= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha(t,S_t)\frac{\partial\varphi}{\partial S} + \frac{1}{2}\beta^2(t,S_t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}\right]dt + \beta(t.S_t)\frac{\partial\varphi}{\partial S}dW_t \end{aligned} \tag{1.2}$$

Từ (1.2) ta chứng minh định lý sau:

Định lý 1.1

Cho X_t, Y_t *là các quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị dương, có các vi phân ngẫu nhiên tương ứng*

$$dX_t = \alpha_1(t,X_t)dt + \beta_1(t,X_t)dW_t\ ;\quad dY_t = \alpha_2(t,X_t)dt + \beta_2(t,X_t)dW_t$$

Khi đó với mọi $a,b \in R$ *ta sẽ có:*

- $$d\left(X_t^a.Y_t^b\right) = X_t^a.dY_t^b + Y_t^b.dX_t^a + ab\beta_1\,\beta_2 X_t^{a-1}.Y_t^{b-1}.dt \tag{1.3}$$

- $$d\left(\frac{X_t^a}{Y_t^b}\right)=\frac{Y_t^b dX_t^a - X_t^a dY_t^b}{\left(Y_t^b\right)^2}+\frac{\beta_2^* X_t^a - \beta_1^* Y_t^b}{\left(Y_t^b\right)^3}\beta_2^* dt \qquad (1.4)$$

trong đó $\beta_1^* = a\beta_1 X_t^{a-1}$ *và* $\beta_2^* = b\beta_2 Y_t^{b-1}$

Chứng minh:

Trước hết từ hệ thức (1.2) ta sẽ có

$$dX_t^a = \left[a\alpha_1 X_t^{a-1} + \frac{1}{2}a(a-1)\beta_1^2 X_t^{a-2}\right]dt + a\beta_1 X_t^{a-1} dW_t = \alpha_1^* dt + \beta_1^* dW_t$$

trong đó: $\alpha_1^* = a\alpha_1 X_t^{a-1} + \frac{1}{2}a(a-1)\beta_1^2 X_t^{a-2}$; $\beta_1^* = a\beta_1 X_t^{a-1}$ (1.5)

Tương tự đối với Y_t^b ta cũng sẽ có

$$dY_t^b = \left[b\alpha_2 Y_t^{b-1} + \frac{1}{2}b(b-1)\beta_2^2 Y_t^{b-2}\right]dt + b\beta_2 Y_t^{b-1} dW_t = \alpha_2^* dt + \beta_2^* dW_t$$

trong đó: $\alpha_2^* = b\alpha_1 Y_t^{b-1} + \frac{1}{2}b(b-1)\beta_2^2 Y_t^{b-2}$; $\beta_2^* = b\beta_2 Y_t^{b-1}$ (1.6)

Mặt khác từ các nhận xét:

$$d\left(X_t^a . Y_t^b\right) = \frac{1}{4}\left[d\left(X_t^a + Y_t^b\right)^2 - d\left(X_t^a - Y_t^b\right)^2\right] \qquad (1.7)$$

$$d\left(X_t^a + Y_t^b\right) = \left(\alpha_1^* + \alpha_2^*\right)dt + \left(\beta_1^* + \beta_2^*\right)dW_t$$

$$d\left(X_t^a - Y_t^b\right) = \left(\alpha_1^* - \alpha_2^*\right)dt + \left(\beta_1^* - \beta_2^*\right)dW_t$$

Sử dụng công thức Itô sẽ thu được

$$d\left(X_t^a + Y_t^b\right)^2 = 2\left(X_t^a + Y_t^b\right)d\left(X_t^a + Y_t^b\right) + \left(\beta_1^* + \beta_2^*\right)^2 dt$$

$$d\left(X_t^a - Y_t^b\right)^2 = 2\left(X_t^a - Y_t^b\right)d\left(X_t^a - Y_t^b\right) + \left(\beta_1^* - \beta_2^*\right)^2 dt$$

Đặt các biểu thức vừa thu được vào (1.8) ta có

$$d\left(X_t^a . Y_t^b\right) = \frac{1}{4}\left[2\left(X_t^a + Y_t^b\right)d\left(X_t^a + Y_t^b\right) - 2\left(X_t^a - Y_t^b\right)d\left(X_t^a - Y_t^b\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(\beta_1^* + \beta_2^*\right)^2 - \left(\beta_1^* - \beta_2^*\right)^2\right]dt = X_t^a dY_t^b + Y_t^b dX_t^a + \beta_1^* \beta_2^* dt \qquad (1.8)$$

Đặt β_1^*, β_2^* đã xác định trong (1.5) và (1.6) vào (1.8) ta sẽ thu được đẳng thức (1.3) cần chứng minh.

Tiếp theo ta chứng minh hệ thức (1.4), trước hết sử dụng (1.2) cho hàm $\dfrac{1}{Y_t^b}$:

$$d\left(\frac{1}{Y_t^b}\right) = -\frac{1}{\left(Y_t^b\right)^2} dY_t^b + \frac{1}{\left(Y_t^b\right)^3}\left(\beta_2^*\right)^2 dt = \frac{1}{\left(Y_t^b\right)^2}\left[\left(\left(\beta_2^*\right)^2 \frac{1}{Y_t^b} - \alpha_2^*\right)dt - \beta_2^* dW_t\right]$$

Áp dụng hệ thức (1.3) ta thu được

$$d\left(X_t^a \frac{1}{Y_t^b}\right) = X_t^a d\left(\frac{1}{Y_t^b}\right) + \frac{1}{Y_t^b} d\left(X_t^a\right) - \frac{\beta_1^* \beta_2^*}{\left(Y_t^b\right)^2} dt$$

$$= \frac{Y_t^b dX_t^a - X_t^a dY_t^b}{\left(Y_t^b\right)^2} + \frac{\beta_2^* X_t^a - \beta_1^* Y_t^b}{\left(Y_t^b\right)^3} \beta_2^* dt \quad \square$$

Khi cho $a = b = 1$ ta sẽ có hệ quả sau

Hệ quả 1.2

Cho X_t, Y_t là các quá trình có các vi phân ngẫu nhiên tương ứng:

$$dX_t = \alpha_1\left(t, X_t\right)dt + \beta_1\left(t, X_t\right)dW_t \ ; \quad dY_t = \alpha_2\left(t, X_t\right)dt + \beta_2\left(t, X_t\right)dW_t$$

Khi đó ta sẽ có

- $d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \beta_1 \beta_2 dt$
- $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{\beta_2 X_t - \beta_1 Y_t}{Y_t^3} \beta_2 dt$

2. VI PHÂN NGẪU NHIÊN CỦA QUÁ TRÌNH DẠNG HERMITE SUY RỘNG

Định nghĩa 2.1 *(Đa thức Hermite)*

Đa thức Hermite $H_n(t,x)$ được xác định bởi công thức truy hồi:

$$H_0(t,x) := 1 \ ; H_1(t,x) := x \ ;$$

$$H_n(t,x) := \frac{1}{n}\left[xH_{n-1}(t,x) - tH_{n-2}(t,x)\right] \quad khi \ n \geq 2 \tag{2.1}$$

Theo định nghĩa trên ta sẽ có:

$$H_2(t,x) = \frac{x^2}{2} - \frac{t}{2} \ ; \ H_3(t,x) = \frac{x^3}{6} - \frac{tx}{2}$$

$$H_3(t,x) = \frac{x^4}{24} - \frac{tx^2}{4} + \frac{t^2}{8} \quad ; \ \ldots.$$

Định nghĩa 2.2 *(Qúa trình ngẫu nhiên dạng Hermite suy rộng)*

Cho $\delta(x)$ *là hàm bình phương khả tích trên [0,T], với chuẩn* $\|\delta\|_T^2 := \int_0^T \delta^2(s)ds < \infty$ *và tích phân ngẫu nhiên Wiener* $G_T^\delta := \int_0^T \delta(s)dW_s$ *khi đó nếu trong biểu thức (2.1) thay x bởi* G_T^δ *và thay t bởi* $\|\delta\|_T^\delta$ *ta sẽ thu được quá trình ngẫu dạng Hermite suy rộng và ký hiệu nó là* $H_n\left(\|\delta\|_T^\delta, G_T^\delta\right)$.

Định lý 2.3

Cho $H_n\left(\|\delta\|_T^\delta, G_T^\delta\right)$ *là quá trình ngẫu dạng Hermite suy rộng khi đó ta sẽ có:*

- $$H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)dW_s \qquad (2.2)$$
- $$E\left\{H_n\left(\|\delta\|_T^\delta, G_T^\delta\right)\right\} = 0 \qquad \forall n = 2,3... \qquad (2.3)$$

Chứng minh

Theo định nghĩa (2.1) trước hết ta xét đến hàm

$$H_n(t,x) := \frac{1}{n}\left[xH_{n-1}(t,x) - tH_{n-2}(t,x)\right]$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng

$$\frac{\partial}{\partial x}H_n(t,x) = H_{n-1}(t,x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H_n(t,x)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(H_n(t,x)\right) = 0$$

Từ đó áp dụng công thức (1.2) cho hàm $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)$ xác định theo định nghĩa 2.2 ta sẽ có

$$H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)dG_s^\delta = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)dW_s$$

Hơn thế nữa từ (2.2) ta nhận thấy rằng $H_n\left(\|\delta\|_T^\delta, G_T^\delta\right)$ nhận được từ tích phân Itô của $H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)$, mặt khác theo tính chất kỳ vọng của tích phân Itô đều bằng không do đó ta sẽ thu được (2.3) □

Khi cho $\delta(s) \equiv 1$ xét trên [0,T] ta có $G_t^1 = \int_0^t dW = W_t$; $\|1\|^2 = \int_0^t ds = t$ từ đó thu được hệ quả sau

Hệ quả 2.4

Cho quá trình ngẫu nhiên Wiener một chiều W_t; với đa thức Hermite xác định bởi công thức truy hồi

$$H_0(t, W_t) := 1 \; ; \; H_1(t, W_t) := W_t$$

$$H_n(t, W_t) := \frac{1}{n}\left[W_t H_{n-1}(t, W_t) - t H_{n-2}(t, W_t)\right] \; ; \; n \geq 2$$

Khi đó ta sẽ có

- $dH_n(t, W_t) = H_{n-1}(t, W_t)\, dW_t$
- $E\{H_n(t, W_t)\} = 0$ *khi n >1*

DIFFERENTIAL FORMULAS OF STOCHASTIC FUNCTIONS

Duong Ton Dam
University of Information Technology, VNU - HCM

ABSTRACT: *Based on the quadratic variation theorem of the Brownian motion, we have established the basic rules of stochastic differetial calculus operations.*

Theorem 1.

If X_t, Y_t are positive-valued stochastic processes satisfying respectively the following stochastic differenntial equations

$$\begin{cases} dX_t = \alpha_1(t, X_t)\, dt + \beta_1(t, X_t)\, dW_t \\ dY_t = \alpha_2(t, X_t)\, dt + \beta_2(t, X_t)\, dW_t \end{cases}$$

then $\forall\, a, b \in R$:

$$\square\, d\left(X_t^a Y_t^b\right) = X_t^a dY_t^b + Y_t^b dX_t^a + ab\beta_1\beta_2 X_t^{a-1} Y_t^{b-1} dt$$

$$\square\, d\left(\frac{X_t^a}{Y_t^b}\right) = \frac{Y_t^b dX_t^a - X_t^a dY_t^b}{\left(Y_t^b\right)^2} + \frac{\beta_2^* X_t^a - \beta_1^* Y_t^b}{\left(Y_t^b\right)^3}\beta_2^* dt$$

Where $\beta_1^* = b\beta_1 Y_t^{b-1}$; $\beta_2^* = b\beta_2 Y_t^{b-1}$

Theorem 2

Suppose $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)$ *is the Hermite type stochastic process of*

$$G_T^\delta := \int_0^T \delta(s)\,dW_s \;;\; \|\delta\|_T^2 := \int_0^T \delta^2(s)\,ds < \infty \quad \textit{then}$$

- $H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right) = \int_0^T H_{n-1}\left(\|\delta\|_s^2, G_s^\delta\right)\delta(s)\,dW_s$
- $E\left\{H_n\left(\|\delta\|_T^2, G_T^\delta\right)\right\} = 0 \quad \forall\, n = 2,3,\ldots$

Keywords: *Wiener stochastic process, Ito integral, Hermite type stochastic processes.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1].A.Friedman, *Stochastic Differention Equation and Application Dover Publication Inc* (2006)

[2].B.K. Oskendan, *Stochastic differential equations: an introduction with application,* Springer (1995)

[3].Olav Kallenberg, *Foundations of modern Probability*, Springer (1997).

[4].Dương Tôn Đảm, *Tính toán ngẫu nhiên với quá trình dạng Hermite,* Tạp chí Phát triển Khoa học &Công nghệ, Tập 11, số 06/2008.