MỘT GIẢI THUẬT XÁC SUẤT MỚI GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN TỐI ƯU MỘT HAY NHIỀU MỤC TIÊU

Trần Văn Hạo, Nguyễn Hữu Thông
Trường Đại học Sư phạm Tp. HCM

TÓM TẮT: *Xét một lớp bài toán tối ưu một mục tiêu có tính chất sau: Tồn tại một số k ($1 \leq k < n$) cố định không phụ thuộc vào kích thước n của bài toán sao cho chỉ cần chọn k biến để thay đổi giá trị thì có khả năng tìm được một lời giải tốt hơn lời giải hiện hành, ký hiệu lớp bài toán này là O_k. Bài báo này đề xuất một kỹ thuật tối ưu số mới, giải thuật Tìm Kiếm Theo Xác Suất (TKTXS), để giải các bài toán tối ưu một mục tiêu thuộc lớp O_k. Chúng tôi đã áp dụng giải thuật TKTXS trên một số bài toán tối ưu một mục tiêu, cũng như mở rộng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu và đã tìm được các kết quả tốt rất ổn định.*

Từ khóa: *Giải thuật, tối ưu số, ngẫu nhiên, xác suất.*

1.GIỚI THIỆU

Chúng ta xét một lớp bài toán tối ưu một mục tiêu có tính chất sau: Tồn tại một số k ($1 \leq k < n$) cố định không phụ thuộc vào kích thước n của bài toán sao cho chỉ cần chọn k biến để thay đổi giá trị theo phép thử sai ngẫu nhiên thì có khả năng tìm được một lời giải tốt hơn lời giải hiện hành, ký hiệu lớp bài toán này là O_k. Trong bài báo này chúng tôi thiết kế một kỹ thuật tối ưu số mới, giải thuật Tìm Kiếm Theo Xác Suất, để giải các bài toán tối ưu số một mục tiêu thuộc lớp O_k. Giải thuật TKTXS đơn giản đã được chúng tôi giới thiệu với cơ sở toán học ban đầu của nó trong các bài báo [5][6]. Trong bài báo này, về mặt lý thuyết chúng tôi mở rộng và chứng minh bộ xác suất thay đổi một cách tổng quát và chính xác hơn, chứng minh độ phức tạp của giải thuật TKTXS là $O(n^{k+1})$ đối với lớp bài toán O_k, xây dựng một mô hình xích Markov, chứng minh tính hội tụ của giải thuật. Về mặt áp dụng chúng tôi đề xuất một phương pháp tính bộ xác suất biến đổi tổng quát cho thực nghiệm và mở rộng áp dụng giải thuật cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu.

2.MÔ HÌNH BÀI TOÁN TỐI ƯU MỘT MỤC TIÊU

Chúng ta xét mô hình bài toán Tối Ưu Một Mục Tiêu (TƯMMT) có một mục tiêu f(x) và r ràng buộc $g_j(x)$ ($j=1,\ldots,r$) với lời giải $x=(x_1,\ldots,x_n)$ có n biến quyết định được định nghĩa theo mô hình như sau:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad f(x)\\
&\textit{subject to}\\
&\qquad g_j(x) \leq 0 \quad (j=1,\ldots,r)\\
&\textit{where} \;\; a_i \leq x_i \leq b_i,\, a_i, b_i \in R,\, i=1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Giả sử các biến quyết định x_i ($1 \leq i \leq n$) có m chữ số được ký hiệu từ trái qua phải là x_{ij} ($1 \leq j \leq m$). Nhận xét chữ số x_{ij} có vai trò quan trọng hơn chữ số $x_{i,j+1}$ trong việc định giá hàm mục tiêu, điều đó có nghĩa là chữ số $x_{i,j+1}$ chỉ tìm được giá trị đúng khi chữ số x_{ij} đã xác định được giá trị đúng của nó đối với một lời giải tối ưu nào đó. Xét các bài toán thuộc lớp O_k, giải thuật TKTXS giải các bài toán thuộc lớp O_k được đề nghị dưới đây là một giải thuật lặp, trong mỗi lần lặp chỉ chọn ra k ($1 \leq k < n$) biến trong n biến để tìm kiếm, và giải thuật tìm kiếm lần lượt từng chữ số một từ trái qua phải của mỗi biến. Giải thuật TKTXS được trình bày dưới đây theo hai mức, mức cơ bản và mức nâng cao.

3. GIẢI THUẬT TKTXS CƠ BẢN

3.1 Các bước đại cương của gt. TKTXS cơ bản

Để giải bài toán thuộc lớp O_k, giải thuật TKTXS cơ bản lần lượt tìm kiếm các giá trị của chữ số thứ nhất đến chữ số thứ m của n biến của một lời giải tối ưu. Khi tìm kiếm giá trị của chữ số thứ j (1≤j≤m), giải thuật lặp N lần. Trong mỗi lần lặp giải thuật chọn k biến ngẫu nhiên để thực hiện các phép thử sai ngẫu nhiên. Ta có giải thuật TKTXS cơ bản được mô tả theo các bước tổng quan như sau:

B1. Chọn ngẫu nhiên một lời giải khả thi x.

B2. j←1 (xét chữ số thứ j=1).

B3. L←0 (khởi động biến đếm của vòng lặp tìm chữ số thứ j).

B4. y←x.

B5. Chọn ngẫu nhiên k biến trong n biến của lời giải y và thay đổi ngẫu nhiên giá trị của các chữ số thứ j của k biến này .

B6. Nếu y là lời giải khả thi và f(y)<f(x) thì x ← y.

B7. Nếu L<N thì L← L+1, và quay lại B4.

B8. Nếu j<m thì j← j+1 (xét chữ số kế tiếp), và quay lại B3.

B9. Giải thuật kết thúc.

3.2 Độ phức tạp của giải thuật TKTXS cơ bản

Xét chữ số thứ j (1≤j≤m), giải thuật chọn k biến ngẫu nhiên trong n biến. Xác suất để một biến được chọn và tìm được các giá trị tốt nhất cho chữ số thứ j của biến này là

$$\frac{k}{n}\frac{1}{10}=\frac{k}{10n}$$

Gọi A là biến cố k biến được chọn và tìm được các giá trị tốt nhất cho các chữ số thứ j của chúng, và p_A là xác suất của biến cố A. Ta có:

$$p_A = \Pr(A) = \frac{k^k}{10^k n^k}$$

Ký hiệu X là số lần xuất hiện của biến cố A trong N lần lặp. Khi đó X có phân phối nhị thức

$$\Pr(X = x) = C_N^x (p_A)^x (1-p_A)^{N-x} \qquad (x = 0,1,...,N)$$

Do p_A khá bé và N khá lớn nên ta có thể xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson như sau:

$$\Pr(X = x) \approx \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

với $\lambda = N.p_A$ và $E(X) = \lambda$

Do cách chọn k biến là ngẫu nhiên và có phân bố đều, nên để mỗi biến đều được chọn và có khả năng tìm được giá trị tốt nhất cho chữ số thứ j của nó thì ta chọn số lần lặp trung bình sao cho biến cố A xuất hiện ít nhất n/k lần, khi đó ta có:

$$E(X) > \frac{n}{k} \Rightarrow N.p_A > \frac{n}{k}$$

$$\Rightarrow N > \frac{n}{k.p_A} = \frac{10^k n^{k+1}}{k^{k+1}}$$

Do có m chữ số nên số lần lặp trung bình để giải thuật tìm được một lời giải tối ưu ở lần đầu tiên là

$$m\left(\frac{10^k}{k^{k+1}}\right)n^{k+1}=\left(\frac{m10^k}{k^{k+1}}\right)n^{k+1}$$

Trong mỗi lần lặp giải thuật thực hiện k công việc bao gồm các phép thử sai ngẫu nhiên có độ phức tạp O(1). Do k là một số cố định không phụ thuộc vào n, nên độ phức tạp của giải thuật TKTXS đối với lớp bài toán tối ưu O_k là $O(n^{k+1})$.

Ví dụ: Khi k=1, trong một lần biến đổi thì chỉ cần chọn ra trung bình 1 biến quyết định để gây tác động biến đổi thì đủ để có khả năng tìm được một lời giải khả thi tốt hơn lời giải khả thi đang có. Các bài toán tối ưu thuộc loại này thường có dạng như sau:

$$\textit{Minimize} \qquad f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$a_i \le x_i \le b_i,\ a_i,b_i \in R,\ i=1,\ldots,n.$$

Trong công thức tính giá trị của hàm mục tiêu, mỗi biến x_i được tính toán độc lập và không phụ thuộc vào các biến còn lại. Ví dụ bài toán hàm Sphere và hàm Rastrigin.

3.3 Mô hình xích Markov của gt. TKTXS

Gọi E_0 là trạng thái khởi đầu của n biến, E_i ($1 \le i \le m$) là trạng thái của n biến đã tìm được các chữ số thứ i tốt nhất trong cùng một lời giải tối ưu nào đó. Gọi p là xác suất để n biến tìm được các giá trị tốt nhất cho chữ số thứ i của chúng trong cùng một lời giải tối ưu nào đó. Theo mục 3.2 ta có:

$$p=\frac{k^{k+1}}{10^k n^{k+1}}$$

Đặt q=1-p. Ta có ma trận xác suất chuyển là $P=(p_{ij})$

với $$p_{ij}=\begin{cases} q & i=j, 0\le i\le m-1 \\ 1 & i=j=m \\ p & j=i+1,\ 0\le i<m \\ 0 & i\ne j, i+1\ne j \end{cases}$$

như sau:

	E_0	E_1	E_2	…	E_{m-1}	E_m
E_0	q	p	0	…	0	0
E_1	0	q	p	…	0	0
E_2	0	0	q	…	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
E_{m-1}	0	0	0	…	q	p
E_m	0	0	0	…	0	1

Ký hiệu X(t) là vị trí của lời giải tại thời đểm t. Ta có:

$$\Pr\{X(t_{n+1})=j \mid X(t_n)=i\}=p_{ij}$$

Do xác suất trên chỉ phụ thuộc vào trạng thái trước là i và trạng thái sau là j mà không phụ thuộc vào thời điểm t nên hệ là một quá trình Markov thuần nhất. Ta có công thức tính xác suất để quá trình bị hấp thu vào trạng thái m khi xuất phát từ trạng thái i (0≤i≤m-1) là:

$$u_i = p_{im} + \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij} u_j \quad (i = 0, \ldots, m-1)$$

Cụ thể ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u_0 = qu_0 + pu_1,\ u_1 = qu_1 + pu_2 \\ \ldots \\ u_{m-2} = qu_{m-2} + pu_{m-1},\ u_{m-1} = p + qu_{m-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_0 = u_1 = \ldots u_m = 1$$

Điều này cho thấy lời giải xuất phát từ trạng thái i nào, đặc biệt là từ trạng thái khởi đầu, thì cũng bị hấp thu đến trạng thái cuối m.

Ta có phân phối dừng là nghiệm không âm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} q\pi_0 = \pi_0,\ p\pi_0 + q\pi_1 = \pi_1,\ p\pi_1 + q\pi_2 = \pi_2, \\ \ldots \\ p\pi_{m-2} + q\pi_{m-1} = \pi_{m-1},\ p\pi_{m-1} + 1.\pi_m = \pi_m, \\ \sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \ldots = \pi_{m-1} = 0,\ \pi_m = 1$$

Nhận xét: Các kết quả trên có được với đều kiện p>0. Điều này có nghĩa là miền khả thi của bài toán phải đủ lớn để khi thay đổi giá trị của k biến thì có thể tìm được các lời giải tốt hơn.

4. TĂNG TỐC HỘI TỤ CHO GIẢI THUẬT TKTXS

4.1 Các bộ xác suất tăng tốc hội tụ

Chúng ta tăng tốc hội tụ cho giải thuật TKTXS cơ bản bằng cách áp dụng hai kỹ thuật như sau:

- Thay cho việc tìm kiếm giá trị của các chữ số của k biến được thực hiện lần lượt từ trái qua phải cho từng chữ số một, ta áp dụng một bộ xác suất thay đổi cho phép giải thuật tìm kiếm giá trị của các chữ số của k biến một cách so le và ngẫu nhiên.
- Áp dụng một bộ xác suất xử lý các giá trị thay đổi tại một chữ số.

4.1.1 Bộ xác suất thay đổi

Do các quan hệ của các biến trong các biểu thức của hàm mục tiêu và các ràng buộc có các mức độ khó khác nhau nên việc tìm kiếm các giá trị tốt của các chữ số có thể so le với nhau, để thực hiện điều này ta đưa vào một bộ xác suất cho phép thay đổi giá trị của các chữ số. Xét chữ số thứ j là x_{ij} của biến x_i (1≤i≤n, 1≤j≤m), gọi A_j là biến cố chữ số thứ j được thay đổi giá trị. Ta nói biến cố A_j là quan trọng hơn biến cố A_{j+1} (1≤j<m), điều này có nghĩa là sau khi biến cố A_j xuất hiện một số lần nào đó, nó sẽ tạo điều kiện tốt cho sự xuất hiện sau của biến cố A_{j+1}. Nếu giá trị của các chữ số bên trái của chữ số thứ j sau khi đã tìm được là không xấu hơn giá trị trước đó của chúng, thì ta phải cố định các chữ số bên trái và thay đổi giá trị của chữ số thứ j sao cho có khả năng là giá trị mới của chữ số thứ j sẽ tốt hơn giá trị hiện hành của nó theo xác suất.

Gọi q_j là xác suất của biến cố A_j và r_j là số lần xuất hiện của biến cố sau

$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_{j-1}}A_j \quad (1 \le j \le m)$

Để có khả năng tìm kiếm được giá trị tốt cho chữ số thứ j, giả sử biến cố trên cần phải xuất hiện r_j lần:

$\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_{j-1}}A_j\right)^{r_j} \quad (1 \le j \le m)$

Sau một số lần lặp của giải thuật, chúng ta muốn tạo điều kiện tốt cho các biến cố này xảy ra theo thứ tự nên chúng ta xét biến cố tích

$$(A_1)^{r_1}\left(\overline{A_1}A_2\right)^{r_2}\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)^{r_3}\ldots\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_{m-1}}A_m\right)^{r_m}$$

Do các biến cố A_j là độc lập với nhau, nên xác suất của biến cố trên là

$$(q_1)^{r_1}(1-q_1)^{r_2+r_3+\ldots+r_m}(q_2)^{r_2}(1-q_2)^{r_3+r_4+\ldots+r_m}$$
$$\ldots(q_{m-1})^{r_{m-1}}(1-q_{m-1})^{r_m}(q_m)^{r_m}$$

Xác xuất này lớn nhất khi

$$q_j = \frac{r_j}{r_j + r_{j+1} + \ldots + r_m} \quad (1 \le j \le m)$$

Do các chữ số bên trái quan trọng hơn các chữ số bên phải trong việc định giá hàm mục tiêu, nên các chữ số bên trái có tính ổn định nhiều hơn các chữ số bên phải. Điều này có nghĩa là các biến cố bên phải A_{j+1} thường xuất hiện nhiều hơn các biến cố bên trái A_j. Nên ta phải có $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_m$, suy ra $q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_m$ và

$$\frac{r_j}{r_j + (m-1)r_m} \le q_j \le \frac{1}{m+1-j} \quad (1 \le j \le m)$$

Ví dụ: Cho $r_1=r_2=\ldots=r_m=1$ và ta có bộ xác suất thay đổi

$$q_1 = \frac{1}{m}, q_2 = \frac{1}{m-1}, \ldots, q_{m-1} = \frac{1}{2}, q_m = 1.$$

Đây là kết quả hạn chế, ứng với $r_1=r_2=\ldots=r_m=1$, đã công bố trong [5][6].

4.1.2 Bộ xác suất xử lý giá trị của chữ số

Trong một lần lặp, xét hai chữ số kề nhau của một biến gọi là a_1 và a_2. Trong đó trạng thái giá trị của chữ số a_1 được giữ nguyên và giá trị của chữ số a_2 được thay đổi.

Gọi r_1 là xác suất chọn một một giá trị nguyên từ 0 đến 9 cho chữ số a_2, r_2 là xác suất tăng giá trị của của chữ số a_2 lên một đơn vị có giữ số nhớ nên hai chữ số a_1a_2 có xác suất tìm được giá trị đúng của chúng là 1/100, r_3 là xác suất giảm giá trị của chữ số a_2 xuống một đơn vị có giữ số nhớ nên hai chữ số a_1a_2 có xác suất tìm được giá trị đúng của chúng là 1/100. Ta có các trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: Nếu chữ số a_1 đã tìm được một giá trị không xấu hơn giá trị trước của nó, thì xác suất để chữ số a_2 tìm được một giá trị mới tốt hơn giá trị hiện có của nó là:

$$r_1 * \frac{1}{10} + r_2 * \frac{1}{100} + r_3 * \frac{1}{100}$$

vì $r_1+r_2+r_3=1$, nên xác suất trên lớn nhất khi: $r_1=1$, và $r_2=r_3=0$.

Trường hợp 2: Nếu chữ số a_1 có giá trị xấu hơn giá trị trước của nó, thì xác suất để cả hai chữ số a_1 và a_2 đồng thời tìm được các giá trị mới tốt hơn giá trị hiện có của chúng là:

$$r_1 * 0 + r_2 * \frac{1}{100} + r_3 * \frac{1}{100}$$

vì $r_1+r_2+r_3=1$, và các xác suất r_2, r_3 có vai trò như nhau nên nên xác suất trên lớn nhất khi $r_1=0$, và $r_2=r_3=0.5$.

Các trường hợp khác có ba, bốn, .., đến 6 chữ số kề nhau có thể phân chia thành rất nhiều trường hợp và trong mỗi trường hợp đều có xác suất cho khả năng tìm được một lời giải mới tốt hơn lời giải hiện hành là rất bé nên có thể xem như không đáng kể. Lấy trung bình cho cả hai trường hợp 1 và 2 trên ta có r_1=0.5, và r_2=r_3=0.25.

4.2 Giải thuật TKTXS nâng cao

Giả sử lời giải của bài toán có n biến quyết định, mỗi biến quyết định có m chữ số, một chữ số cho phần nguyên và m-1 chữ số cho phần lẻ. Sử dụng hàm random(10), hàm này trả về một số nguyên ngẫu nhiên từ 0 đến 9. Giải thuật TKTXS nâng cao được mô tả qua các bước đại cương như sau:

B1. Phát sinh ngẫu nhiên một lời giải khả thi x.

B2. $y \leftarrow x$;

B3. Phát sinh ngẫu nhiên m số nguyên dương r_j ($1 \le j \le m$) có giá trị từ 1 đến 100 sao cho $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_m$. Tính bộ xác suất thay đổi $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$theo công thức:

$$q_j = \frac{r_j}{r_j + r_{j+1} + \ldots + r_m} \quad (1 \le j \le m)$$

B4. Chọn ngẫu nhiên k biến của lời giải y, thực hiện kỹ thuật biến đổi theo hướng dẫn của xác suất trên các chữ số của k biến và đồng thời kết hợp các chữ số lại để cho ra một lời giải mới.

Ký hiệu y_i là một trong k biến đã được chọn, gọi y_{ij} là chữ số thứ j ($1 \le j \le m$) của biến y_i. Thủ tục biến đổi giá trị của các chữ số của biến y_i theo hướng dẫn của xác suất như sau:

B4.1. $y_i \leftarrow 0$

B4.2. $j \leftarrow 1$ (xét chữ số thứ j)

B4.3.

```
if (biến cố ngẫu nhiên với xác suất q_j xảy ra)  then
    if  (biến cố ngẫu nhiên với xác suất r_1 xảy ra) then
{chọn một giá trị ngẫu nhiên từ 0 đến 9 cho chữ số y_ij}
        y_i ← y_i+10^(1-j)*random(10);
 else
      if  (biến cố ngẫu nhiên với xác suất r_2 xảy ra) then
      {tăng giá trị của chữ số x_ij lên một đơn vị}
         y_i ← y_i +10^(1-j)*( x_ij +1);
      else
        {giảm giá trị của chữ số x_ij xuống một đơn vị}
          y_i ← y_i+10^(1-j)*( x_ij −1);
 else {giữ nguyên giá trị x_ij cho chữ số y_ij }
        y_i ← y_i +10^(1-j)* x_ij;
```

B4.4. if $j<m$ then $j \leftarrow j+1$, quay lại B4.3.

B4.5. if $(y_i<a_i)$ then $y_i \leftarrow a_i$; if $(y_i>b_i)$ then $y_i \leftarrow b_i$;

B5. Nếu y không là một lời giải khả thi thì quay lại B2.

B6. if $f(y)<f(x)$ then $x \leftarrow y$.

B7. Nếu điều kiện dừng chưa được thỏa thì quay lại bước B2.

B7. (Điều kiện dừng được thỏa) Giải thuật kết thúc.

Kỹ thuật biến đổi tại một chữ số trên đây có thể được bổ sung thêm bằng cách tăng/giảm một giá trị ngẫu nhiên từ 1-2 đơn vị cho các chữ số bên trái và 3-5 đơn vị cho các chữ số bên phải nhằm làm cho sự tương tác giữa các biến quyết định với nhau phong phú hơn trong một bài toán cụ thể. Điều này làm cho các chữ số bên phải có biên độ tăng giảm cao hơn so với các chữ số bên trái nhằm làm tăng thêm tốc độ hội tụ của giải thuật.

Giải thuật mô tả trên có thể áp dụng tương tự cho biến quyết định có m chữ số với phần nguyên có nhiều chữ số.

4.3 Các đặc điểm của giải thuật TKTXS

Ý tưởng trực quan của giải thuật: Trong mỗi lần lặp của giải thuật, một số k biến của bài toán tối ưu được phân rã thành các chữ số rời rạc, sau đó chúng được thay đổi theo hướng dẫn của xác suất và được kết hợp lại thành một lời giải mới có khả năng tốt hơn lời giải hiện hành theo kỳ vọng ứng với xác suất.

Hành vi của giải thuật: Giải thuật tìm kiếm các giá trị của các biến lần lượt từ các chữ số bên trái sang các chữ số bên phải theo hướng dẫn của xác suất. Do các xác suất biến đổi tăng dần từ trái qua phải nên khi các giá trị của các chữ số bên trái của một lời giải tối ưu nào đó đã được xác định thì các chữ số bên phải cũng tìm kiếm giá trị của cùng lời giải tối ưu đó.

Tham số k: Số k phụ thuộc vào mối quan hệ của các biến trong các biểu thức đại số của hàm mục tiêu và các ràng buộc.

5. Các bài toán thử nghiệm

Sử dụng máy tính PC, Celeron CPU 2.20GHz, trình biên dịch BC++ 3.1 và số thực kiểu double. Các bảng thống kê cho kết quả của 30 lần chạy thử nghiệm giải thuật TKTXS, chọn đơn vị đo thời gian thực thi của máy tính là giây.

5.1 Bài toán thử nghiệm 1, 2 và 3

Bài toán 1: Hàm Sphere

$$\text{Minimize } f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$-5.12 \le x_i \le 5.12$$

Bài toán 2: Hàm Rastrigin

$$\text{Minimize } f(x)=10n+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)\right)$$

$$-5.12 \le x_i \le 5.12$$

Cả hai bài toán 1 và 2 đều có lời giải tối ưu là

$x^*=(0,0,...,0), f(x^*)=0.$

Chọn k=1, m=3 cho cả hai bài toán 1 và 2. Các bài toán được thử nghiệm lần lượt với kích thước n=100, 300 và 500, số lần lặp theo tính toán của lý thuyết trong trường hợp xấu nhất lần lượt là 100000, 900000, 2500000. Áp dụng giải thuật TKTXS nâng cao ta có số lần lặp để giải thuật đạt được lời giải tối ưu chính xác đến hai số lẻ f(x)=0.00 được thống kê trong các bảng sau .

Bảng 1. Thống kê kết quả của gt TKTXS cho bt. 1

	n=100	n=300	n=500
Min	6841	27298	52663
Max	15412	40473	90661

Average	9487	34159	62301
Median	9230	32862	60649
St. Deviation	2559	4307	11201

Bảng 2. Thống kê kết quả của gt TKTXS cho bt. 2

	n=100	**n=300**	**n=500**
Min	22265	73425	134960
Max	37758	149555	217016
Average	29397	93120	172299
Median	29906	85111	168562
St. Deviation	4308	22699	24561

Nhận xét: Các bài toán 1, 2 có các biến quyết định không phụ thuộc lẫn nhau, sự tăng giảm của một biến chỉ ảnh hưởng đến đến số hạng chứa biến đó trong biểu thức của hàm mục tiêu, nên trong mỗi lần lặp chỉ cần chọn một biến để tác động thay đổi theo xác suất (k=1) là đủ để có thể tìm kiếm được một lời giải mới tốt hơn lời giải hiện hành.

5.2 Bài toán thử nghiệm 3,4,5 [1][2]

Để giải các bài toán 3,4,5 được mô tả dưới đây H.Tụy đã sử dụng hướng tiếp cận Tối Ưu Đa Thức [1][2].

Bài toán 3:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize } f(x) = x_1 \\
&s.t.\ (x_1-5)^2 + 2(x_2-5)^2 + (x_3-5)^2 - 18 \le 0 \\
&-(x_1+7-2x_2)^2 - 4(2x_1+x_2-11)^2 - 5(x_3-5)^2 + 100 \le 0
\end{aligned}$$

Theo [1][2] lời giải của bài toán 3 được tính toán mất 33.703 giây như sau:

x=(3.7476920, 7.1714200, 2.3623170)
g_1(x)=-0.0442234318469965
g_2(x)=-1.4937534820130050
f(x)=3.7476919999999998

Lời giải tốt nhất được tìm thấy bởi giải thuật TKTXS:

x=(3.7207610, 7.1684090, 2.3619040)
g_1(x)=-0.0000018931010047
g_2(x)=-0.0000280523730037
f(x)=3.7207610000000004

Bảng 3. Thống kê kết quả của gt TKTXS cho bt 3

Điều kiện dừng: f(x)= 3.7207	
Thời gian (giây)	
Min	8

Max	24
Average	16
Median	15
St. Deviation	6

Bài toán 4:

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimize}\quad & f(x) = 4(x_1^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 x_5 + \\
& 2x_1^2 x_2 x_3)(5x_1^2 x_3 x_4^2 x_5 + 3x_2)^{3/5} + \\
& 3(2x_4^2 x_5^2)(4x_1^2 x_4 + 4x_2 x_5)^{5/3} \\
s.t.\quad & g_1(x) = -2(2x_1 x_5 + 5x_1^2 x_2 x_4^2 x_5)(3x_1 x_4 x_5^2 \\
& + 5 + 4x_3 x_5^2)^{1/2} + 7684.470329 \le 0 \\
& g_2(x) = 2(2x_1 x_2^2 x_3 x_4^2)(2x_1 x_2 x_3 x_4^2 + 2x_2 x_4^2 x_5 \\
& - x_1^2 x_5^2)^{3/2} - 1286590.314422 \le 0 \\
& 0 \le x_i \le 5 \qquad (i = 1,2,3,4,5)
\end{aligned}
$$

Theo [1][2] lời giải của bài toán này được tính toán mất 514.422 giây như sau:

x*=(4.987557, 4.984973, 0.143546, 1.172267, 0.958926)

g_1(x*)=-9.1368492553

g_2(x*)=-1286588.3913488842

f(x*)=28766.0421745152

Lời giải tốt nhất được tìm thấy bởi giải thuật TKTXS:

x=(5.000000, 5.000000, 0.116252, 1.195885, 0.929709)

g_1(x)=-0.0000866421,

g_2(x)=-1286590.3144169073,

f(x)=28565.2059225965

Bảng 4. Thống kê kết quả của gt. TKTXS cho bt. 4.

Điều kiện dừng: f(x)= 28565.205922	
Thời gian (giây)	
Min	42
Max	74
Average	55
Median	52
S. Deviation	4

Bài toán 5:

$$Minimize\ f(x) = (3 + x_1x_3)(x_1x_2x_3x_4 + 2x_1x_3 + 2)^{2/3}$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} g_1(x) = & -3(2x_1x_2 + 3x_1x_2x_4)(2x_1x_3 + 4x_1x_4 - x_2) \\ & - (x_1x_3 + 3x_1x_2x_4)(4x_3x_4 + 4x_1x_3x_4 + x_1x_3 \\ & - 4x_1x_2x_4)^{1/3} + 3(x_4 + 3x_1x_3x_4)(3x_1x_2x_3 \\ & + 3x_1x_4 + 2x_3x_4 - 3x_1x_2x_4)^{1/4} + 309.219315 \le 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x) = & -2(3x_3 + 3x_1x_2x_3)(x_1x_2x_3 + 4x_2x_4 - x_3x_4)^2 \\ & + (3x_1x_2x_3)(3x_3 + 2x_1x_2x_3 + 3x_4)^4 - (x_2x_3x_4 \\ & + x_1x_3x_4)(4x_1 - 1)^{3/4} - 3(3x_3x_4 + 2x_1x_3x_4)(x_1x_2x_3x_4 \\ & + x_3x_4 - 4x_1x_2x_3 - 2x_1)^4 \\ & + 78243.910551 \le 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(x) = & -3(4x_1x_3x_4)(2x_4 + 2x_1x_2 - x_2 - x_3)^2 \\ & + 2(x_1x_2x_4 + 3x_1x_3x_4)(x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ & + 4x_2 - x_2x_3x_4 - x_1x_3)^4 - 9618 \le 0 \end{aligned}$$

$$0 \le x_i \le 5 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Theo [1][2] lời giải của bài toán này được tính toán mất 6.343 giây như sau:

x=(4.994594, 0.020149, 0.045424, 4.928073)

g_1(x)=-121.9272141539, g_2(x)=-273.0030924901,

g_3(x)=-10957.4771852535, f(x)=5.9062908426

Lời giải tốt nhất được tìm thấy bởi giải thuật TKTXS:

x=(4.999983, 0.014853, 0.044224, 4.999999)

g_1(x)=-0.0129304855, g_2(x)=-0.0060945030,

g_3(x)=-10968.5559747276, f(x)=5.8677613664

Bảng 5. Thống kê kết quả của gt. TKTXS cho bt. 5

Điều kiện dừng: f(x)= 5.8677613664	
Thời gian (giây)	
Min	1
Max	8
Average	4
Median	4
St. Deviation	2

Nhận xét: Qua các bài toán thử nghiệm trên, chúng ta nhận thấy đối với giải thuật TKTXS độ phức tạp của giải thuật đối với một bài toán không phụ thuộc vào các hàm mục tiêu và các ràng buộc là tuyến tính hay phi tuyến, mà phụ thuộc vào mối quan hệ giữa các biến quyết định với nhau trong các biểu thức đại số của các hàm mục tiêu và ràng buộc.

5.3 Bài toán 6: Thiết kế dầm hàn [3]

Theo [3], các lời giải tối ưu Pareto cực trị của bài toán tối ưu đa mục tiêu được thực hiện bằng cách chạy một thủ tục tối ưu một mục tiêu một cách độc lập trên mỗi hàm mục tiêu sao cho thỏa mãn các ràng buộc đã cho. Đối với bài toán tối ưu hai mục tiêu, lời giải tối ưu Pareto cực trị chính là hai lời giải tối ưu Pareto ở hai đầu cùng của một cung tối ưu Pareto (có thể liên tục hay không liên tục). Chúng ta áp dụng giải thuật TKTXS để tìm các lời giải tối ưu Pareto cực trị. Xét bài toán thiết kế dầm hàn được mô tả như sau [3]:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize } f_1(X) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14.0 + x_2)\\
&\textit{Minimize } f_2(X) = 2.1952/(x_3^3x_4)\\
&s.t.\\
&g_1(X) = 13000 - \tau(X) \ge 0,\ g_2(X) = 30000 - \sigma(X) \ge 0,\\
&g_3(X) = x_4 - x_1 \ge 0, g_4(X) = P_c(X) - 6000 \ge 0,\\
&\tau(X) = \sqrt{(\tau')^2 + (\tau'')^2 + (x_2\tau'\tau'')/\sqrt{0.25(x_2^2 + (x_1+x_3)^2}},\\
&\tau' = \frac{6000}{\sqrt{2}x_1x_2},\ \tau'' = \frac{6000(14 + 0.5x_2)\sqrt{0.25(x_2^2 + (x_1+x_3)^2}}{2(0.707x_1x_2(x_2^2/12 + 0.25(x_1+x_3)^2}},\\
&\sigma(x) = \frac{504000}{x_3^2x_4},\ P_c(x) = 64746.022(1 - 0.282346x_3)x_3x_4^3\\
&\quad 0.125 \le x_1 \le 5.0,\ 0.1 \le x_2 \le 10.0,\\
&\quad 0.1 \le x_3 \le 10.0,\ 0.125 \le x_4 \le 5.0.
\end{aligned}$$

Để giải bài toán này, K. Deb đã sử dụng một thủ tục gọi là INNOVIZATION [3], thủ tục này tìm các lời giải nội suy từ các lời giải ở hai cực của một biên pareto được tìm thấy bằng cách sử dụng các giải thuật di truyền nổi tiếng như NSGA-II. Sử dụng giải thuật TKTXS chúng tôi tìm được các lời giải tốt hơn lời giải của [3] như trong bảng so sánh sau.

Bảng 6. So sánh kết quả giữa hai lời giải cực trị của [3] và giải thuật TKTXS.

	Min. f1		**Min. f2**	
	TKTXS	[3]	TKTXS	[3]
x_1	0.2444	0.2443	1.7341	1.5574
x_2	6.2186	6.2151	0.4792	0.5434
x_3	8.2915	8.2986	10.0000	10.0000
x_4	0.2444	0.2443	5.0000	5.0000
$g_1(x)$	0.000002	1.309381	0.000388	19.9308385
$g_2(x)$	0.000145	43.063002	28992.00	28992.00
$g_3(x)$	0.000000	0.000000	3.265947	3.442600
$g_4(x)$	0.003042	-1.500453	58075552.0	58075552.0
$f_1(x)$	**2.381134**	**2.381467**	**36.421245**	**36.440171**
$f_2(x)$	**0.015759**	**0.015723**	**0.000439**	**0.000439**

Lời giải Min. f_1 của [3] có ràng buộc thứ 4 là $g_4(x)$= -1.5004538528 vi phạm ràng buộc $g_4(x)>=0$.

Bảng 7. So sánh kết quả các lời giải nội suy của [3] và các lời giải của giải thuật TKTXS

	[3]	**Giải thuật TKTXS**	
x_1	0.2326	0.235600	0.235700
x_2	5.3305	5.163576	5.160600
x_3	10.0000	10.000000	10.000000
x_4	0.2356	0.235600	0.235700
$g_1(x)$	145.60	0.0010	0.0012
$g_2(x)$	8607.80	8607.8	8616.8
$g_3(x)$	0.0030	0.0000	0.0000
$g_4(x)$	76.50	76.5077	84.2485
$f_1(x)$	**2.509649**	**2.488764**	**2.489435**
$f_2(x)$	**0.009317**	**0.009317**	**0.009313**

6. GIẢI THUẬT TKTXS CHO BÀI TOÁN TƯĐMT

6.1 Mô hình bài toán tối ưu đa mục tiêu

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximize} & f_k(x) \quad (k=1,\ldots,s) \\ \textit{subject to} & g_j(x)\le 0 \quad (j=1,\ldots,r) \\ \textit{where} & x=(x_i),\ a_i \le x_i \le b_i,\ a_i,b_i \in R,\ i=1,\ldots,n. \end{array}$$

6.2 Khái niệm tối ưu Pareto

6.2.1 Thứ tự Pareto

Trên R^s chúng ta định nghĩa một thứ tự Pareto như sau:

Nếu $u=(u_1, u_2,\ldots, u_s)$, $v=(v_1, v_2,\ldots, v_s)\in R^s$, thì

$$u \succeq v \Leftrightarrow u_i \ge v_i \ \ \forall i \in \{1,\ldots,s\}$$

và $\quad u \succ v \Leftrightarrow u \succeq v \ \text{và} \ u \ne v$

khi đó ta nói v bị trội bởi u.

6.2.2 Tối ưu Pareto

Lời giải $x^*\in R^s$ được gọi là một lời giải tối ưu Pareto nếu không có $x\in R^s$ sao cho $F(x)\succ F(x^*)$ với $F=(f_1,f_2,\ldots,f_s)$. Tập $P^*=\{x\in R^s$: x là lời giải tối ưu Pareto$\}$ được gọi là tập tối ưu Pareto, và ảnh của nó qua F, $F(P^*)=\{F(x) : x\in P^*\}$ được gọi là biên Pareto.

6.3 Giải thuật TKTXS cho bài toán TƯĐMT

Giải thuật TKTXS được mở rộng cho bài toán tối ưu đa mục tiêu như sau:

B1. Phát sinh ngẫu nhiên một tập S gồm M lời giải khả thi ban đầu.

B2. Áp dụng giải thuật TKTXS cho từng lời giải trong tập S để tìm lời giải tốt hơn theo tiêu chuẩn Pareto.

B3. Sắp thứ tự tập S theo thứ tự độ ưu tiên của các hàm mục tiêu.

B4. Nếu có lời giải bị trội (bởi các lời giải lân cận) thì loại bỏ lời giải này.

B5. Nếu điều kiện dừng không thỏa thì quay lại B2.

B6. Giải thuật dừng.

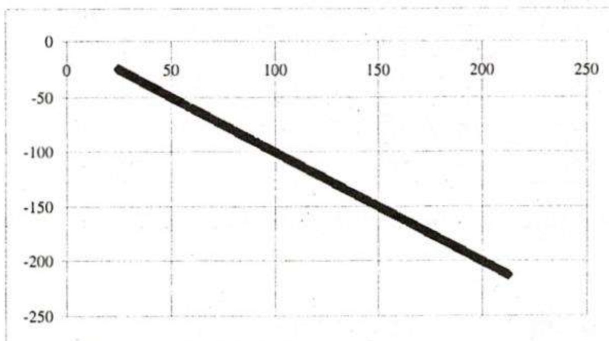
Sau khi giải thuật kết thúc, nếu trong tập S có các lời giải giống nhau thì chỉ giữ lại một lời giải (loại bỏ các lời giải giống nhau còn lại), khi đó tập S thu được là một biên Pareto. Có thể thực thi giải thuật trên nhiều lần để thu được các tập S. Lấy hợp các tập S này, loại bỏ các lời giải giống nhau và lời giải bị trội thì ta thu được một biên Pareto với số lượng các lời giải khá lớn.

Nhận xét: Quá trình thực thi của giải thuật cho bài toán TUĐMT được khởi đầu với một tập S gồm M lời giải khả thi được phát sinh ngẫu nhiên. Sau đó gt. TKTXS được áp dụng lần lượt cho từng lời giải một. Các lời giải trong tập S hoạt động độc lập với nhau và mỗi một lời giải tự nó tiến về phía biên Pareto trong mỗi lần lặp của giải thuật.

6.4 Áp dụng: bài toán thử nghiệm 7 [3]

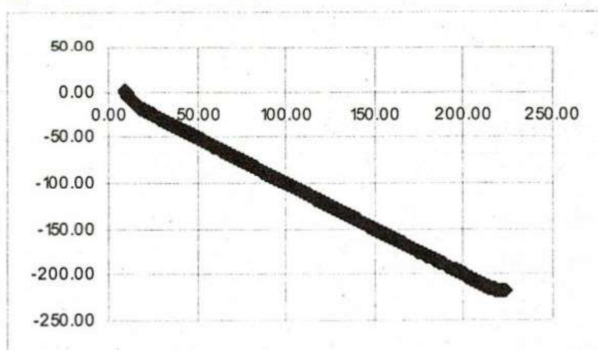
$$\begin{aligned}
&\textit{Maximize } f_1(x) = 2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\
&\textit{Maximize } f_2(x) = 9x_1 - (x_2 - 1)^2 \\
&\textit{subject to} \\
&\quad c_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 225 \le 0,\ c_2(x) = x_1 - 3x_2 + 10 \le 0 \\
&\quad -20 \le x_1 \le 20,\ -20 \le x_2 \le 20
\end{aligned}$$

Lời giải tối ưu Pareto của [3] là: $x_1^*=-2.5$, $2.5 \le x_2^* \le 14.79$ và có biểu đồ như sau:



Hình 1. Biên Pareto của [3]

Biểu đồ của các lời giải tìm được bằng gt TKTXS



Hình 2. Biên Pareto của gt TKTXS

Nhận xét:

Có 8 lời giải của Srinivas và Deb [3] bị trội bởi các lời giải tìm được bởi giải thuật TKTXS.

Bảng 8. Tám lời giải của [3] bị trội bởi các lời giải tìm được bởi giải thuật TKTXS (in nghiêng).

x_1	x_2	Max f_1	Max f_2	c_1	c_2
-2.5	4.17	32.298900	-32.548900	-201.3611	-5.0100
-2.42784	*4.270679*	*32.303117*	*-32.547910*	*-200.8668*	*-5.2398*
-2.5	6.72	54.968400	-55.218400	-173.5916	-12.6600
-2.39156	*6.803856*	*54.970509*	*-55.208748*	*-172.9880*	*-12.8031*
-2.5	9.05	87.052500	-87.302500	-136.8475	-19.6500
-2.48945	*9.055895*	*87.052570*	*-87.302458*	*-136.7934*	*-19.6571*
-2.5	11.72	137.168400	-137.418400	-81.3916	-27.6600
-2.4742	*11.73081*	*137.168722*	*-137.418056*	*-81.2664*	*-27.6666*
-2.5	11.82	139.322400	-139.5724	-79.0376	-27.9600
-2.40165	*11.860*	*139.33133000*	*-139.571658*	*-78.5537*	*-27.9840*
-2.5	12.69	158.90610000	-159.156100	-57.7139	-30.5700
-2.20883	*12.800*	*158.95980100*	*-159.125018*	*-56.2750*	*-30.6095*
-2.5	13.66	182.52560000	-182.775600	-32.1544	-33.4800
-2.41448	*13.690*	*182.52828300*	*-182.770969*	*-31.7492*	*-33.4850*
-2.5	13.87	187.88690000	-188.136900	-26.3731	-34.1100
-2.41272	*13.900*	*187.88829800*	*-188.130680*	*-25.9620*	*-34.1134*

Giải thuật TKTXS tìm được nhiều lời giải ở hai cực của biên Pareto mà lời giải của [3] không có như sau.

Bảng 9. 20 lời giải ở hai cực của biên Pareto:

x_1	x_2	Max f_1	Max f_2	c_1	c_2
1.09997	3.69999	10.1000	2.6097	-240.100140	0.000000
1.098911	3.699637	10.1000	2.6021	-240.105081	0.000000
1.097032	3.699011	10.1000	2.5886	-240.113838	-0.000001
1.095632	3.698544	10.1000	2.5785	-240.120363	0.000000
1.091963	3.697321	10.1000	2.5521	-240.137434	0.000000
1.091	3.697	10.1000	2.5451	-240.141910	0.000000
1.089403	3.696468	10.1001	2.5336	-240.149325	-0.000001
1.049252	3.683084	10.1028	2.2443	-240.333962	0.000000
1.045862	3.681954	10.1032	2.2198	-240.349387	0.000000
1.002713	3.667571	10.1105	1.9084	-240.543490	0.000000
-4.69768	14.24542	222.2998	-217.7200	-29.999812	-37.433940
-4.73634	14.23261	222.4801	-217.7289	-29.999896	-37.434170
-4.74754	14.22888	222.5323	-217.7309	-29.999838	-37.434180
-4.7564	14.22591	222.5735	-217.7322	-30.000144	-37.434130
-4.76518	14.22298	222.6147	-217.7336	-29.999899	-37.434120
-4.77361	14.22015	222.6541	-217.7348	-29.999982	-37.434060
-4.78021	14.21793	222.6849	-217.7356	-30.000059	-37.434000
-4.80288	14.21029	222.7909	-217.7376	-30.000002	-37.433750

-4.82796	14.20179	222.9082	-217.7388	-29.999963	-37.433330
-4.84191	14.19704	222.9735	-217.7390	-29.999963	-37.433030

7. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi xét một lớp bài toán tối ưu một mục tiêu có tính chất sau: Tồn tại một số k ($1 \leq k < n$) cố định không phụ thuộc vào kích thước n của bài toán sao cho chỉ cần chọn k biến để thay đổi giá trị theo phép thử sai ngẫu nhiên thì có khả năng tìm được một lời giải tốt hơn lời giải hiện hành, ký hiệu lớp bài toán này là O_k. Giải thuật TKTXS đơn giản giải các bài toán tối ưu số một mục tiêu thuộc lớp O_k đã được chúng tôi giới thiệu với cơ sở toán học ban đầu trong các bài báo [5][6]. Trong bài báo này, về mặt lý thuyết chúng tôi mở rộng và chứng minh bộ xác suất thay đổi một cách tổng quát, chứng minh độ phức tạp của giải thuật TKTXS là $O(n^{k+1})$ đối với lớp bài toán O_k, xây dựng một mô hình xích Markov chứng minh tính hội tụ của giải thuật. Về mặt áp dụng chúng tôi đề xuất một phương pháp tính bộ xác suất biến đổi tổng quát cho thực nghiệm và mở rộng áp dụng giải thuật TKTXS cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu.

A NEW PROBABILISTIC ALGORITHM FOR SOLVING A CLASS OF SINGLE OR MULTI-OBJECTIVE OPTIMAL PROBLEMS

Tran Van Hao, Nguyen Huu Thong
HCMC University of Pedagogy

ABSTRACT: *We consider a class of single-objective optimization problems which haves the character: there is a fixed number k ($1 \leq k < n$) that is independent of the size n of the problem such that if we only need to change values of k variables then it has the ability to find a better solution than the current one, let us call it* $\boldsymbol{O_k}$. *In this paper, we propose a new numerical optimization technique, Search Via Probability (SVP) algorithm, for solving single-objective optimization problems of the class* $\boldsymbol{O_k}$. *The SVP algorithm uses probabilities to control the process of searching for optimal solutions. We calculate probabilities of the appearance of a better solution than the current one on each of iterations, and on the performance of SVP algorithm we create good conditions for its appearance. We tested this approach by implementing the SVP algorithm on some test single-objective and multi-objective optimization problems, and we found good and very stable results.*

Keywords: *Numerical optimization, Stochastic, Probability.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Hoàng Tụy, "F(C)-Optimization and Robust Global Optimization", http://www.math.ac.vn/cgi-bin/library/ vt_eprint?&YR=2007.

[2]. Hoàng Tụy, "Polynomial Optimization: A Robust Approach", http://www.math.ac.vn/cgi-bin/library/vt_ eprint?&YR =2004.

[3]. K. Deb and A. Srinivasan, "INNOVIZATION: Innovative Design Principles Through Optimization", Human-competitive, Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO) 2006.

[4]. N. Srinivas, K. Deb, "Multi-Objective function optimization using nondominated sorting genetic algoritms". Evolutionary Computation(2), (1995) 221-248.

[5]. T. V. Hao, N. H. Thong, "A New Stochastic Algorithm for Engineering Optimization Problems". In Proceedings of The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA7), Kobe International Conference Center, Japan, 2007.

[6]. T. V. Hạo, N. H. Thông, "Search via Probability Algorithm for Engineering Optimization Problems", In Proceedings of XIIth International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA2007), Chania, Crete, Greece, 2007. In book: Recent Advances in Stochastic Modelling and Data Analysis, editor: Christos H. Skiadas, publisher: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2007.