VÀNH CHIA TUYẾN TÍNH

Mai Hoàng Biên[(1)], Bùi Xuân Hải[(2)]
(1) Đại học Kiến trúc Tp. HCM
(2) Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

TÓM TẮT: *Cho D là vành chia với tâm F và ký hiệu D^* là nhóm nhân của D. D được gọi là vành chia* hữu hạn tâm *nếu D là không gian véc tơ hữu hạn chiều trên F và D là* hữu hạn tâm địa phương *nếu mọi tập con hữu hạn của D đều sinh ra trên F một vành chia con hữu hạn chiều trên F. Ta nói D là vành chia* tuyến tính *nếu mọi tập con hữu hạn của D đều sinh ra trên F một vành chia con hữu hạn tâm. Hiển nhiên mọi vành chia hữu hạn tâm địa phương đều là vành chia tuyến tính. Bài này chứng tỏ điều ngược lại không đúng bằng cách xây dựng một ví dụ vành chia tuyến tính nhưng không hữu hạn tâm địa phương. Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số tính chất của các nhóm con trong vành chia tuyến tính. Nói riêng, mọi nhóm con á chuẩn tắc hữu hạn sinh của vành chia tuyến tính đều nằm trong tâm. Một hệ quả thú vị được rút ra là: Nếu D là vành chia tuyến tính và D^* là nhóm hữu hạn sinh thì D là trường hữu hạn.*

Từ khóa *: vành chia, tuyến tính, hữu hạn tâm, địa phương, hữu hạn.*

1. GIỚI THIỆU

Trong [2] và [6], các tác giả đã đưa ra 2 giả thuyết như sau:

Giả thuyết 1. *Trong vành chia D, nếu D^* hữu hạn sinh thì D là trường.*

Giả thuyết 2. *Trong vành chia D, mọi nhóm con hữu hạn sinh á chuẩn tắc trong D^* đều giao hoán.*

Hai giả thuyết này đã được chứng minh là đúng trong trường hợp D là vành chia hữu hạn tâm. Trường hợp tổng quát đến nay vẫn còn là vấn đề mở. Trong bài này ta sẽ khảo sát hai giả thuyết nói trên và các vấn đề liên quan trong các lớp vành chia rộng hơn lớp vành chia hữu hạn tâm. Đó là vành chia hữu hạn tâm địa phương, vành chia tuyến tính và vành chia đại số trên tâm. Nhắc lại rằng một vành chia D tâm F được gọi là *đại số trên tâm* nếu $\dim_F F(a) < \infty, \forall a \in D$, hay nói cách khác, nếu mọi phần tử $a \in D$ đều đại số trên F. Mục 2 xây dựng các ví dụ chứng tỏ tồn tại các lớp vành chia thực sự rộng hơn lớp vành chia hữu hạn tâm. Các Mục 3 và 4 khảo sát hai giả thuyết vừa nêu trong các lớp vành chia mới xây dựng. Các ký hiệu được dùng trong bài này đều rất thông dụng. Nói riêng, nếu A là một cấu trúc đại số (nhóm, vành, ...) thì $Z(A)$ là tâm của A.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho dãy các số nguyên tố $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$. Khi đó, với mỗi n, gọi A_n là vành chia thoả $Z(A_n) = \mathbb{Q}$ và $\dim_{\mathbb{Q}} A_n = p_n^2$, trong đó $\mathbb{Q}$ là trường các số hữu tỷ. Đặt

$$D_1 = A_1, D_n = D_{n-1} \otimes_{\mathbb{Q}} A_n = A_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \cdots \otimes_{\mathbb{Q}} A_n, \forall n > 1.$$

Ta xem D_n là $\mathbb{Q}$-đại số con của $D_{n+1} = D_n \otimes_{\mathbb{Q}} A_{n+1}$. Ta nhận thấy D_n là vành chia, hơn nữa là vành chia hữu hạn tâm vì $\dim_{\mathbb{Q}} D_n = p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2$. Đặt $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Khi đó D cũng là vành chia, vì với a nằm trong $D \setminus \{0\}$, tồn tại n sao cho $a \in D_n$, suy ra $a^{-1} \in D_n \subseteq D$. Ta lại có

$$\mathbb{Q} \subseteq Z(D) \subseteq Z(D_1) = Z(A_1) = \mathbb{Q}.$$

Do đó $Z(A) = \mathbb{Q}$.

Mệnh đề 1. D *vừa xây dựng ở trên là vành chia hữu hạn tâm địa phương nhưng không hữu hạn tâm.*

Chứng minh. Vì $\dim_{\mathbb{Q}} D \geq \dim_{\mathbb{Q}} D_n \geq \dim_{\mathbb{Q}} A_n = p_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\dim_{\mathbb{Q}} D = \infty$. Do đó D không hữu hạn tâm. Mặt khác, nếu S là tập con hữu hạn của D thì với $a \in S$, tồn tại n_a sao cho $a \in D_{n_a}$. Đặt $n = \max\{n_a : a \in S\}$, ta có $S \subseteq D_n$, kéo theo $\mathbb{Q}(S) \subseteq D_n$. Suy ra

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(S) \leq \dim_{\mathbb{Q}} D_n \leq p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2.$$

Vậy D là vành chia hữu hạn tâm địa phương nhưng không hữu hạn tâm.□

Ví dụ 2. Gọi G là nhóm aben tự do sinh bởi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (với cách viết phép toán là phép nhân),

$$G = \left\{X = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_l^{n_l} : l \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Trên G ta định nghĩa một thứ tự như sau: Với $X = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_l^{n_l}$ và $Y = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$ (sau khi đã làm gọn tới mức tối đa, với mặc định $n_i = 0$ nếu như không có x_i), gọi i là số nhỏ nhất thoả $n_j = m_j, \forall i = 1,2,\ldots,i-1$, và $n_i \neq m_i$. Ta định nghĩa $X = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_l^{n_l} > Y = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$ nếu $n_i > m_i$.

Rõ ràng thứ tự vừa định nghĩa ở trên là một thứ tự toàn phần. Hơn nữa, với thứ tự này, G trở thành một nhóm thứ tự toàn phần. Nhắc lại rằng, nhóm G, với thứ tự toàn phần <, được gọi là có *nhóm thứ tự toàn phần* nếu $a < b$ thì $ac < bc, ca < cb, \forall a,b,c \in G$.

Như vậy ta có thể phát biểu kết quả sau:

Bổ đề 1. G *với thứ tự vừa định nghĩa trên là nhóm thứ tự toàn phần.*

□

Bây giờ xét dãy các số nguyên tố $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ và đặt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \cdots)$ là trường con của trường số thực $\mathbb{R}$ sinh bởi $\mathbb{Q}$ và $\left\{\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \cdots\right\}$. Với mỗi *i*, gọi $f_i : K \to K$ là $\mathbb{Q}$-đẳng cấu thoả $f_i(\sqrt{p_i}) = -\sqrt{p_i}$ và $f_i(\sqrt{p_j}) = \sqrt{p_j}$, *j≠i*. Xét đồng cấu nhóm $\Phi : G \to Gal(K/\mathbb{Q})$ được xác định bởi $\Phi(x_i) = f_i, \forall i \in \mathbb{N}$.

Với phần tử $\alpha = \sum_{X\in G} a_X X \in KG$, đặt $supp(\alpha) = \{X \in G : a_X \neq 0\}$ và gọi nó là *giá* của α.

Đặt

$$D = K((G,\Phi)) = \{\alpha = \sum_{X\in G} a_X X : supp(\alpha)$$

là tập được sắp tốt }. Ta có một loạt các kết quả sau:

Định lý 1. $D = K((G,\Phi))$ *là vành chia với hai phép toán cộng và nhân như sau:*

$$\alpha+\beta = \sum_{X\in G} a_X X + \sum_{X\in G} b_X X = \sum_{X\in G} (a_X + b_X) X$$

$$\alpha\beta = \left(\sum_{X\in G} a_X X\right)\left(\sum_{Y\in G} a_Y Y\right) = \sum_{Z\in G}\left\{\sum_{XY=Z} a_X \Phi(X)(b_Y)\right\} Z$$

□

Mệnh đề 2. *Tâm của* D *là* $F = \mathbb{Q}((H, \Phi|_H))$, *trong đó* $H = \left\{x_1^{2n_1} x_2^{2n_2} \ldots x_l^{2n_l} : n_i \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}\right\}$ *là nhóm con của* G *sinh bởi* $\{x_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Mệnh đề 3. Giả sử $\alpha = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} + \ldots \in D = K((G,\Phi))$ *và* $F = Z(D)$. *Khi đó,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$F(\alpha, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n})$ *là vành chia hữu hạn tâm.*

□

Mệnh đề 4. *Giả sử* $\alpha = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} + \ldots \in D = K((G, \Phi))$ *và* $F = Z(D)$. *Đặt*

$D_1 = F(\alpha, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots)$.

Khi đó:

1. D_1 *không là vành chia đại số trên tâm, kéo theo nó cũng không là vành chia hữu hạn tâm địa phương.*

2. D_1 *là vành chia tuyến tính.*

□

Trong khuôn khổ bài này chúng tôi không thể trình bày đầy đủ chứng minh các kết quả vừa phát biểu. Các chứng minh chi tiết được trình bày trong [1].

3. VÀNH CHIA HỮU HẠN SINH

Trong Mục **2** ta đã xây dựng được vành chia tuyến tính nhưng không hữu hạn tâm. Trong mục này ta sẽ khảo sát một số tính chất của vành chia hữu hạn tâm địa phương và vành chia tuyến tính.

Bổ đề 2. *Cho trường* K. *Nếu nhóm nhân* K^* *hữu hạn sinh thì* K *là trường hữu hạn.*

Chứng minh. Đầu tiên, ta chứng minh $char(K) = p > 0$. Giả sử $char(K) = 0$. Khi đó, trường con nguyên tố của K là trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Chú ý là trong lý thuyết nhóm giao hoán, mọi nhóm con của nhóm hữu hạn sinh cũng là nhóm hữu hạn sinh [7, trang 113]. Áp dụng điều này cho K^* và $\mathbb{Q}^*$ suy ra $\mathbb{Q}^*$ hữu hạn sinh. Điều này, như đã biết, không thể xảy ra.

Như vậy, $char(K) = p > 0$. Khi đó, trường con nguyên tố của K là trường hữu hạn F_p, p nguyên tố.

Giả sử $K^* = < x_1, x_2, \ldots x_n >$. Khi đó $K = F_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Tiếp theo ta chứng minh tất cả các x_i đều đại số trên F_p. Giả sử $x = x_i$ siêu việt trên F_p. Khi đó, $F_p[x]$ đẳng cấu với vành đa thức một biến trên F_p và $F_p[x]$ đẳng cấu với trường các thương của vành một biến trên F_p. Như vậy, ta có thể xem $F_p[x]$ như là vành đa thức một biến trên F_p và $F_p[x]$ là trường các thương của $F_p[x]$. Do K^* hữu hạn sinh nên $F_p(x)^*$ cũng hữu hạn sinh. Giả sử

$$F_p(x)^* = \left\langle \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \ldots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)} \right\rangle,$$

với

$f_i(x), g_i(x) \in F_p[x], g_i(x) \neq 0, (f_i(x), g_i(x)) = 1$. Xét số nguyên l thoả

$l > \max\{\deg(f_i(x)), \deg(g_i(x)) : i = 1, \ldots, m\}$ và gọi e là phần tử nguyên thuỷ trong trường F_{p^l}. Khi đó đa thức bất khả quy $p_e(x)$ nằm trong $F_p[x]$ có bậc là l.

Ta có,

$$p_e(x) = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{f_m(x)}{g_m(x)}\right)^{\alpha_m}, \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

Suy ra tồn tại một $f_i(x)$ hoặc $g_i(x)$ chia hết cho $p_e(x)$. Điều này là vô lý vì bậc của $p_e(x)$ lớn hơn bậc của tất cả các $f_i(x)$ và $g_i(x)$.

Như vậy, tất cả các x_i đều đại số trên F_p. Suy ra $K = F_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ là trường hữu hạn. □

Giả thuyết 3. *Trong vành chia* D, *nếu* D^* *hữu hạn sinh thì* D *là trường hữu hạn.*

Giả thuyết 3 rộng hơn Giả thuyết 1. Nhưng với bổ đề trên thì hai giả thuyết này là tương đương nhau. Trong [2], tác giả chứng minh được Giả thuyết 1 đúng trong vành chia hữu hạn tâm. Kết hợp với bổ đề trên. Ta có kết quả sau.

Định lý 2. *Cho vành chia D hữu hạn tâm. Nếu D^* hữu hạn sinh thì D là trường hữu hạn.*

Chứng minh. Do [2, Định lý 1], ta có D là trường. Kết hợp với bổ đề trên, ta có D là trường hữu hạn. □

Dễ dàng nhận thấy rằng Giả thuyết 3 vẫn còn đúng đối với những vành chia hữu hạn tâm địa phương và những vành chia tuyến tính.

Định lý 3. *Cho vành chia D hữu hạn tâm địa phương. Nếu D^* hữu hạn sinh thì D là trường hữu hạn.*

Chứng minh. Đặt $F = Z(D)$. Vì D^* hữu hạn sinh nên $\dim_F D = \dim_F F(D^*)$. Theo Định lý 2 thì D là trường hữu hạn. □

Định lý 4. *Cho vành chia D tuyến tính. Nếu D^* hữu hạn sinh thì D là trường hữu hạn.*

Chứng minh. Đặt $F = Z(D)$. Vì D^* hữu hạn sinh nên $D = F(D^*)$ là vành chia hữu hạn tâm. Theo Định lý 2 thì D là trường hữu hạn. □

Định nghĩa 1. [8] Cho vành chia D với tâm F. Nhóm con G của D^* được gọi là *tuyến tính địa phương* trên tâm F nếu với mọi nhóm con hữu hạn sinh H của G, tồn tại số tự nhiên n sao cho $F[H]$ có thể nhúng vào $M_n(F)$, trong đó $F[H]$ là vành con của D sinh bởi F và H.

Định lý 5. *Cho vành chia D với tâm F và giả sử D^* hữu hạn sinh. Nếu $D' = [D^*, D^*]$ tuyến tính địa phương trên F thì D là trường hữu hạn.*

Để chứng minh định lý này, ta cần một số kết quả sau:

Bổ đề A. [5, Định lý 2] *Cho vành chia D với tâm F và $D' = [D^*, D^*]$ là nhóm con hoán tử của D^*. Khi đó, nếu D' đại số trên F thì D là vành chia đại số trên tâm.*

Bổ đề B. [2, Định lý 2] *Trong vành chia D đại số trên tâm, nếu D^* hữu hạn sinh thì D' cũng hữu hạn sinh.*

Bổ đề C. [5, Bổ đề 3] *Cho vành chia D với tâm F. Nếu tồn tại số tự nhiên n thoả $\dim_F F(a) < n, \forall a \in D'$, thì D hữu hạn tâm.*

Chứng minh Định lý 5. Do D' tuyến tính địa phương nên

$$\forall c \in D', \exists n > 0, F(c) \subseteq M_n(F).$$

Suy ra c là phần tử đại số trên F. Do đó D' đại số trên F. Theo Bổ đề A, D đại số trên F. Do D^* hữu hạn sinh nên theo Bổ đề B, D' cũng hữu hạn sinh. Giả sử $D' = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$. Khi đó, tồn tại số tự nhiên m sao cho $F[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ có thể nhúng vào $M_n(F)$. Để ý là:

$$D' = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle \subseteq F[a_1, a_2, \ldots, a_r],$$

suy ra $\dim_F F(c) \le m^2, c \in D'$. Theo Bổ đề C, D hữu hạn tâm. Áp dụng Định lý 2, suy ra D là trường hữu hạn. □

Rõ ràng trong định lý này, điều kiện D' là nhóm tuyến tính địa phương tổng quát hơn điều kiện D hữu hạn tâm địa phương.

Cho vành chia D với tâm F và a là một phần tử của D. Khi đó,

$$C_D(a) = \{x \in D : ax = xa\} \supseteq F(a),$$

trong đó $F(a)$ là trường con của D sinh bởi F và a. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. Phần tử a được gọi là *không-giao-hoán* nếu $C_D(a) = F(a)$.

Định lý 6. *Cho vành chia D vô hạn với tâm F và giả sử a là phần tử không-giao-hoán của D. Khi đó, nếu a đại số trên F thì D^* không hữu hạn sinh.*

Chứng minh. Ta có $C_D(a) = F(a)$. Vì a đại số trên F nên $\dim_F F(a) = n$ hữu hạn. Theo [3, Định lý 1, trang 175], $\dim_F F(a) = \dim_{C_D(a)} D = \dim_{F(a)} D$. Suy ra

$$\dim_F D = \dim_F F(a) \dim_{F(a)} D = n^2.$$

Vậy D hữu hạn tâm. Theo Định lý 2, D^* không hữu hạn sinh. □

Bây giờ có thể phát biểu giả thuyết sau:

Giả thuyết 4. *Cho vành chia D đại số trên tâm. Nếu D^* hữu hạn sinh thì tồn tại phần tử không-giao-hoán a.*

Ta nhận thấy trong trường hợp D là vành chia đại số trên tâm thì Giả thuyết 3 và 4 là tương đương nhau.

Định lý 7. *Giả sử vành chia D với tâm F thoả tính chất: Với a nằm trong D', tồn tại đa thức bất khả quy $p_a(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ trên F sao cho $a_0 = 1$, hoặc $a_0 = -1$, và $p_a(a) = 0$. Khi đó, nếu D^* hữu hạn sinh thì D là trường hữu hạn.*

Chứng minh. Do mỗi phần tử a nằm trong D' đều là nghiệm của một phương trình hệ số trên F nên D' đại số trên F. Lại một lần nữa, sử dụng Bổ đề A, suy ra D đại số trên F.

Hơn nữa, do D^* hữu hạn sinh nên nhóm D^*/D' cũng hữu hạn sinh và giao hoán. Suy ra $F^*/(F^* \cap D') \cong F^*D'/D'$ cũng hữu hạn sinh và giao hoán. Xét $a \in F^* \cap D'$, do $a \in D'$ nên có một đa thức bất khả quy $p_a(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ trên F sao cho $a_0 = 1$, *hoặc* $a_0 = -1$, *và* $p_a(a) = 0$. Nhưng do a nằm trong F nên $n = 1$. Suy ra $p_a(x) = x - a$. Vậy $a = 1$ hoặc $a = 1$, kéo theo $F^* \cap D'$ hữu hạn. Do đó F^* hữu hạn sinh, và áp dụng Bổ đề 2, ta có F hữu hạn. Do D đại số trên F nên theo Định lý Jacobson [4, trang 219], D giao hoán. Lại một lần nữa, áp dụng Bổ đề 2, suy ra D hữu hạn.□

4. NHÓM CON HỮU HẠN SINH TRONG VÀNH CHIA

Như đã đề cập trong phần giới thiệu, trong [2] và [6], các tác giả đưa ra giả thuyết: "*mọi nhóm con N á chuẩn tắc hữu hạn sinh của D^* trong vành chia đều giao hoán*". Các tác giả đã chứng minh điều này đúng trong trường hợp D là vành chia hữu hạn tâm. Chúng tôi chứng minh kết quả vẫn còn đúng trong vành chia tuyến tính và hữu hạn tâm địa phương.

Ta sẽ khảo sát nhóm con hữu hạn sinh "chứa tâm" thay vì là "á chuẩn tắc" như trong giả thuyết trên. Có thể đưa ra giả thuyết sau:

Giả thuyết 5. *Mọi nhóm con N hữu hạn sinh chứa $F^* = Z(D)^*$ của D^* đều giao hoán.*

Ta chứng minh giả thuyết này đúng trong trường hợp D là vành chia hữu hạn tâm địa phương và vành chia tuyến tính đại số trên tâm.

Định lý 8. *Cho vành chia D tuyến tính. Mọi nhóm con á chuẩn tắc hữu hạn sinh N của D^* đều giao hoán.*

Chứng minh.

Đặt $F = Z(D), K = F(N)$. Do N hữu hạn sinh nên K hữu hạn tâm với tâm F_1. Vì N là nhóm con á chuẩn tắc của D^* nên N cũng là nhóm con á chuẩn của K^*. Theo kết quả trong [6, Định lý 1] thì $N \subseteq F_1$. Suy ra N giao hoán. □

Vì vành chia hữu hạn tâm địa phương là vành chia tuyến tính nên ta có hệ quả sau

Hệ quả. *Cho vành chia D hữu hạn tâm địa phương. Mọi nhóm con á chuẩn tắc hữu hạn sinh N của D^* đều giao hoán.*

□

Bây giờ ta sẽ phát biểu các tính chất cho nhóm con hữu hạn sinh chứa F^*.

Định lý 9. *Cho vành chia D hữu hạn tâm địa phương không giao hoán. Mọi nhóm con N chứa $F^* = Z(D)^*$ của D^* đều không hữu hạn sinh.*

Chứng minh. Giả sử N hữu hạn sinh. Đặt $N' = [N, N]$. Khi đó nhóm thương $N_1 = N / N'$ là nhóm giao hoán và hữu hạn sinh. Suy ra nhóm con $F^*/(F^* \cap N') \cong F^* N'/N'$ của N_1 cũng giao hoán và hữu hạn sinh.

Nếu $char(F) = 0$. Khi đó, nhóm con $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^* \cap N')$ của $F^*/(F^* \cap N')$ cũng hữu hạn sinh. Nếu $a \in \mathbb{Q}^* \cap N'$ thì $a = c_1 c_2 \dots c_r$ với $c_i = x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}$ là các giao hoán tử, và $a \in \mathbb{Q}^*$.

Đặt $K = F(\{x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} : i = 1, \dots, r\})$ thì $\dim_F K < \infty$.

Đặt $n = \dim_{Z(K)} K \le \dim_F K$. Lấy chuẩn $N_{K/Z(K)}$ hai vế của $a = c_1 c_2 \dots c_r = x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots x_r y_r x_r^{-1} y_r^{-1}$ ta được $a^n = 1$. Suy ra $a = 1$ hoặc $a = -1$. Kéo theo $\mathbb{Q}^* \cap N'$ hữu hạn. Do đó $\mathbb{Q}^*$ hữu hạn sinh, kéo theo $\mathbb{Q}$ là trường hữu hạn, là điều vô lý. Vậy $char(F) = p > 0, p$ nguyên tố. Nếu F không đại số trên F_p thì tồn tại phần tử u trong F sao cho u siêu việt trên F_p. Khi đó $F_p(u)$ vô hạn.

Nhóm con $F_p(u)^*/(F_p(u)^* \cap N')$ của $F^*/(F^* \cap N')$ cũng hữu hạn sinh.

Nếu $\dfrac{f(u)}{g(u)} \in F_p(u)^* \cap N'$, với $f(X), g(X) \in F_p[X], (f(X), g(X)) = 1, g(u) \ne 0$, thì $\dfrac{f(u)}{g(u)} = c_1 c_2 \dots c_r$ với $c_i = x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}$ là các giao hoán tử.

Nếu $K = F(\{x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} : i = 1, \dots, r\})$ thì $\dim_F K < \infty$.

Đặt $n = \dim_{Z(K)} K \le \dim_F K$. Lấy chuẩn $N_{K/Z(K)}$ hai vế của

$$\frac{f(u)}{g(u)} = c_1 c_2 \dots c_r = x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots x_r y_r x_r^{-1} y_r^{-1}$$

ta được $\dfrac{f^n(u)}{g^n(u)} = 1$. Suy ra trong $\dfrac{f(u)}{g(u)}$ không xuất hiện u (nếu không u đại số trên F_p). Do đó $\dfrac{f(u)}{g(u)}$ nằm trong F_p, kéo theo $F_p(u)^* \cap N'$ hữu hạn. Vậy $F_p(u)^*$ hữu hạn sinh. Theo Bổ đề 2, $F_p(u)$ hữu hạn. Ta có một mâu thuẫn. Như vậy F đại số trên F_p. Suy ra D đại số trên F_p, kéo theo D là trường, là điều mâu thuẫn với giả thiết. □

Lập lại chứng minh trên, ta được kết quả sau.

Định lý 11. *Cho vành chia D tuyến tính, đại số trên tâm và không giao hoán. Mọi nhóm con N chứa $F^* = Z(D)^*$ của D^* đều không hữu hạn sinh.* □

LINEAR DIVISION RINGS

Mai Hoang Bien(1), **Bui Xuan Hai**(2)
(1) Ho Chi Minh City University of Architecture
(2) University of Sciences, VNU-HCM

ABSTRACT: *Let D be a division ring with the center F and suppose that D* is the multiplicative group of D. D is called centrally finite if D is a finite dimensional vector space over F and D is locally centrally finite if every finite subset of D generates over F a division subring which is a finite dimensional vector space over F. We say that D is a linear division ring if every finite subset of D generates over F a centrally finite division subring. It is obvious that every locally centrally finite division ring is linear. In this report we show that the inverse is not true by giving an example of a linear division ring which is not locally centrally finite. Further, we give some properties of subgroups in linear division rings. In particular, we show that every finitely generated subnormal subgroup in a linear ring is central. An interesting corollary is obtained as the following: If D is a linear division ring and D* is finitely generated, then D is a finite field.*

Keywords: *division rings; linear; centrally finite; locally; finite.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Mai Hoàng Biên, *nhóm con hữu hạn sinh trong nhóm tuyến tính*, luận văn thạc sĩ Toán học, chuyên ngành Đại số, năm 2008.

[2]. S. Akbari, M. Mahdavi-hezavehi, *Normal subgroups of GL_n(D) are not finitely generated*, Pro. Amer. Math. Soc. 128(6), 1627-1632 (2000).

[3]. N. Jacobson, *Structure of Ring*, Coll., Vol 37, Amer. Math. Soc., No1, Springer-Verlag (1991).

[4]. T. Y. Lam, *A first Course in Non-Commutative Rings*, GTM No 131, Springer-verlag (1991).

[5]. M. Mahdavi-hezavehi, S. Akbari, M. Mehrabadi, and H. Hajie-Abolhassan, *On Derived Groups of Division rings II*, Comm. Algebra, Vol. 23, No. 8, 2881-2887 (1995).

[6]. M. Mahdavi-Hezavehi, M.G. Mahmudi, and S. Yasamin, *Finitely generated subnormal subgroups of GL_n(D) are are central*, J. Algebra 225, 517-521 (2000).

[7]. W. R. Scott , *Group Theory*, Dover Pulication, INC (1987).

[8]. M. Shirvani and B. A. F. Wehrfritz, *Skew Linear Groups,* Springer-Verlag (1986).