MỘT SỐ KẾT QUẢ MỚI TRONG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐIỀU KHIỂN MỜ

Nguyễn Đình Phư, Trần Thanh Tùng
Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG –HCM
(Bài nhận ngày 15 tháng 04 năm 2007, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 15 tháng 01 năm 2008)

TÓM TẮT: *Gần đây, lĩnh vực phương trình vi phân đã được nghiên cứu một cách trừu tượng hơn. Thay vì khảo sát dáng điệu của một nghiệm, ta đã khảo sát một bó nghiệm (tập các nghiệm) (xem [10-13]).Thay vì nghiên cứu một phương trình vi phân, người ta nghiên cứu một bao vi phân ([xem [9]). Đặc biệt có thể nghiên cứu phương trình vi phân mờ mà cả biến và đạo hàm của nó đều là các tập mờ (xem [1-6]). Trong bài báo này, chúng tôi tổng quát hoá các kết quả nghiên cứu mới về các hệ mờ vi phân và hệ vi phân có điều khiển mờ. Bài báo là sự tiếp nối của các công trình của chúng tôi về hướng nghiên cứu này (xem [10-15]).*

Từ khoá: *Lý thuyết mờ, Phương trình vi phân, Lý thuyết điều khiển, Phương trình vi phân mờ, Phương trình vi phân điều khiển mơ, Phương trình vi phân điều khiển tập.*

1.MỞ ĐẦU

Gần đây, việc nghiên cứu phương trình vi phân mờ (fuzzy differential equation FDE) dạng

$$D_H x(t)=f(t,x(t)), \tag{1.1}$$

trong đó $x(t_0)=x_0 \in E^n, x(t)\in E^n, t\in\left[t_0,T\right]=I\subset R_+$, $f: I\times E^n \to E^n$ và

phương trình vi phân tập (set differential equation SDE) dạng

$$D_H X(t)=F(t,X(t)), \tag{1.2}$$

Trong đó

$X(t_0)=X_0\in K_c(R^n), X(t)\in K_c(R^n), t\in[t_0,T]=I\subset R_+$,

$F: I\times K_c(R^n)\to K_c(R^n)$ đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà toán học.

Giáo sư Lakshmikantham V. và các tác giả khác đã đạt được một số kết quả quan trọng về sự tồn tại nghiệm, so sánh nghiệm… của FDE và SDE. Hai dạng phương trình này có mối liên hệ với nhau. Tham khảo [4, 5].

Thời gian gần đây chúng tôi đã nghiên cứu và có một số kết quả về phương trình vi phân điều khiển mờ (fuzzy control differential equation FCDE) dạng

$$D_H x(t)=f(t,x(t),u(t)), \tag{1.3}$$

trong đó

$x(t_0)=x_0\in E^n, x(t)\in E^n, u(t)\in E^p, t\in\left[t_0,T\right]=I\subset R_+,\quad f: I\times E^n\times E^p\to E^n$

và phương trình vi phân điều khiển tập (set control differential equation SCDE) dạng

$$D_H X(t)=F(t,X(t),U(t)), \tag{1.4}$$

trong đó

$X(t_0) = X_0 \in K_c(R^n), X(t) \in K_c(R^n), U(t) \in K_c(R^p), t \in [t_0, T] = I \subset R_+,$

$F : I \times K_c(R^n) \times K_c(R^p) \to K_c(R^n).$

Xin tham khảo [12 -15].

Một số kết quả về phương trình vi phân dạng mờ được trình bày trong [10, 11]. Trong bài báo này chúng tôi trình bày một số kết quả về phương trình vi phân điều khiển mờ FCDE và điều khiển tập SCDE.

2.MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

Ký hiệu $K_c(R^n)$ là tập hợp các tập con lồi, compact, không rỗng của R^n. Cho A, B là các tập con bị chặn, không rỗng của R^n. Khoảng cách Hausdorff giữa A và B được xác định

$$D[A,B] = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\right\} \quad (2.1)$$

Đặc biệt $D\left[A, \hat{\theta}\right] = \|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\}$, trong đó $\hat{\theta}$ là phần tử zero của R^n.

Ta biết rằng $K_c(R^n)$ cùng với metric D là một không gian metric đầy đủ (xem [16]). Nếu $K_c(R^n)$ được trang bị phép toán cộng và nhân với vô hướng không âm thì $K_c(R^n)$ trở thành không gian metric nửa tuyến tính.

Đặt $E^n = \{u : R^n \to [0,1]$ thỏa mãn $(i) - (iv)\}$:

(i) u là chuẩn, tức là tồn tại $x_0 \in R^n$ sao cho $u(x_0) = 1$;

(ii) u là lồi, nghĩa là với $x_1, x_2 \in I$ và $0 \le \lambda \le 1$ ta có

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge min\{u(x_1), u(x_2)\};$$

(iii) u là nửa liên tục trên;

(iv) $[u]^0 = cl\{x \in R^n : u(x) > 0\}$ là compact.

Phần tử $u \in E^n$ được gọi là mờ.

Với $0 < \alpha \le 1$, tập $[u]^\alpha = \{x \in R^n : u(x) \ge \alpha\}$ được gọi là tập mức α. Từ (i) - (iv) ta suy ra các tập mức α thuộc $K_c(R^n)$ với $0 \le \alpha \le 1$.

Ta ký hiệu

$$D_0\left[u, v\right] = sup\left\{D\left[[u]^\alpha, [v]^\alpha\right] : 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

là khoảng cách giữa u và v trong E^n, trong đó $D\left[[u]^\alpha, [v]^\alpha\right]$ là khoảng cách Hausdorff giữa hai tập $[u]^\alpha, [v]^\alpha$ của $K_c(R^n)$. Khi đó $\left(E^n, D_0\right)$ là không gian metric đủ. Sau đây là một số tính chất của metric D_0.

$$D_0\left[u + w, v + w\right] = D_0[u, v] \text{ và } D_0[u, v] = D_0[v, u], \quad (2.2)$$

$$D_0\left[\lambda u, \lambda v\right] = |\lambda| D_0[u,v], \tag{2.3}$$

$$D_0[u,v] \le D_0\left[u,w\right] + D_0\left[w,v\right], \tag{2.4}$$

với mọi $u, v, w \in E^n$ và $\lambda \in R$.

Cho $u, v \in E^n$ nếu tồn tại $z \in E^n$ thỏa mãn $u = v + z$ thì z được gọi là hiệu của u và v và được ký hiệu là $u - v$. Từ nay ta giả sử cho $u, v \in E^n$ sẽ tồn tại $z \in E^n$ thỏa mãn $u = v + z$. Cho khoảng $I = \left[t_0, t_0 + a\right]$ trong R_+, $a > 0$, ta nói rằng ánh xạ $F : I \to E^n$ có đạo hàm Hukuhara $D_H F(\tau_0)$ tại điểm $\tau_0 \in I$, nếu

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(\tau_0 + h) - F(\tau_0)}{h} \quad \text{và} \quad \lim_{h \to 0+} \frac{F(\tau_0) - F(\tau_0 - h)}{h}$$

tồn tại trong topo của E^n và bằng $D_H F(\tau_0)$, giới hạn được lấy trong không gian metric (E^n, D_0). Ở hai đầu mút của *I*, đạo hàm là đạo hàm một phía.

Nếu $F : I \to E^n$ là liên tục thì F khả tích. Ta có một số tính chất sau đây.

Nếu $F : I \to E^n$ khả tích thì

$$\int_{t_0}^{t_2} F(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} F(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} F(s)ds,\ t_0 \le t_1 \le t_2 \tag{2.5}$$

và

$$\int_{t_0}^{t} \lambda F(s)ds = \lambda \int_{t_0}^{t} F(s)ds, \lambda \in R. \tag{2.6}$$

Nếu $F, G : I \to E^n$ khả tích thì $D\left[F(.), G(.)\right] : I \to R$ cũng khả tích và

$$D\left[\int_{t_0}^{t} F(s)ds, \int_{t_0}^{t} G(s)ds\right] \le \int_{t_0}^{t} D\left[F(s), G(s)\right] ds. \tag{2.7}$$

Chi tiết hơn về tính liên tục, khả vi và tính khả tích Hukuhara của ánh xạ $F : I \to E^n$ có thể tham khảo [1 -6].

Metric *D* trên $K_c(R^n)$ cũng có các tính chất như metric D_0, các khái niệm đạo hàm và tích phân Hukuhara của ánh xạ $F : I \to K_c(R^n)$ cũng có các tính chất tương tự như của ánh xạ $F : I \to E^n$. Xin tham khảo [13].

3.MỘT SỐ KẾT QUẢ

3.1.Phương trình vi phân điều khiển mờ

$$D_H x(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

trong đó $x(t_0) = x_0 \in E^n$, $t \in I$, trạng thái $x(t) \in E^n$, điều khiển $u(t) \in E^p$ và $f : I \times E^n \times E^p \to E^n$.

Điều khiển khả tích $u : I \to E^p$ gọi là điều khiển chấp nhận được. Đặt U là tập tất cả các điều khiển chấp nhận được.

Ánh xạ $x \in C^1\left[I, E^n\right]$ được gọi là nghiệm của (3.1) trên *I* nếu nó thỏa mãn (3.1) trên *I*. Do $x(t)$ là khả vi liên tục nên nghiệm sẽ tương đương:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} D_H x(s)ds, t \in I.$$

Kết hợp với bài toán giá trị ban đầu (3.1) ta có

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s))ds, t \in I \tag{3.2}$$

trong đó tích phân được sử dụng là tích phân Hukuhara. Ta thấy rằng $x(t)$ là nghiệm của (3.1) nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn (3.2) trên *I*.

Tương tự định lý về sự tồn tại nghiệm cho phương trình vi phân mờ FDE trong [1, 5, 6], ta có định lý sau đây.

Định lý 3.1 ([14]): *Giả sử rằng*

(i) $f \in C\left[R_0, E^n\right]$, $D_0\left[f(t,x,u), \theta\right] \le M_0$, *trên* $R_0 = I \times B(x_0, b) \times U$, *trong đó*

$B(x_0, b) = \left\{x \in E^n : D_0\left[x, x_0\right] \le b\right\}$ *và*

(ii) $g \in C\left[I \times [0, 2b], R_+\right]$, $0 \le g(t,w) \le M_1$ *trên* $I \times [0,2b], g(t,0) = 0$, $g(t,w)$ *không giảm*

theo w với mỗi $t \in I$ *và* $w(t) \equiv 0$ *là nghiệm duy nhất của*

$w' = g(t,w)$. $w(t_0) = w_0 \ge 0$ *trên I.*

(iii) $D_0\left[f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), f(t,x,u)\right] \le g\left(t, D_0\left[\overline{x}, x\right]\right)$ *trên* R_0.

Khi đó phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất $x(t) = x(t, x_0, u(t))$ *trên* $\left[t_0, t_0 + \eta\right]$, *trong đó* $\eta = min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = max\left\{M_0, M_1\right\}$.

Ta xét giả thiết sau :

Ánh xạ $f : R_+ \times E^n \times E^p \to E^n$ thỏa mãn điều kiện

$$D_0\left[f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), f(t, x(t), u(t))\right] \le c(t)\left\{D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right] + D_0\left[\overline{u}(t), u(t)\right]\right\} \tag{3.4}$$

với $t \in I; u(t), \overline{u}(t) \in U;$ $x(t), \overline{x}(t) \in E^n$, .

trong đó $c(t)$ là hàm thực dương và khả tích trên *I*.

Đặt $C = \int_{t_0}^{t_0+a} c(t)dt$. Do $c(t)$ khả tích trên *I* nên bị chặn hầu khắp nơi bởi số $K > 0$ trên *I*, nghĩa là $c(t) \le K$ với hầu khắp nơi $t \in I$.

Kết quả sau cho thấy sự phụ thuộc liên tục của nghiệm của (3.1) vào sự thay đổi của biến điều khiển và điều kiện ban đầu.

Định lý 3.2 ([12]): *Giả sử f là liên tục và thỏa mãn (3.4) và* $\overline{x}(t), x(t)$ *là hai nghiệm của (3.1) xuất phát từ* $\overline{x}_0, x_0$ *và tương ứng với các điều khiển* $\overline{u}(t), u(t)$. *Khi đó với* $\varepsilon > 0$ *bất kỳ, tồn tại số* $\delta(\varepsilon) > 0$ *sao cho với* $D_0\left[\overline{x}_0, x_0\right] \leq \delta(\varepsilon)$

và $D_0\left[\overline{u}(t), u(t)\right] \leq \delta(\varepsilon)$

ta có

$$D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right] \leq \varepsilon$$

trong đó $t \in I$.

Định lý 3.3 ([12]): *Giả sử* $f \in C\left[I \times E^n \times E^p, E^n\right]$ *và với mọi* $(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)),\ (t, x(t), u(t)) \in I \times E^n \times U$ ta

có $D_0\left[f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), f(t, x(t), u(t))\right] \leq g(t, D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right]),$ (3.5)

trong đó $g \in C\left[R_+ \times R_+, R_+\right]$ *và* $g(t,w)$ *không giảm theo w với mỗi* $t \in I$. *Giả sử thêm rằng nghiệm lớn nhất* $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ *của phương trình*

$$w' = g(t, w), w(t_0) = w_0 \geq 0$$

tồn tại với $t \in I$.

Khi đó nếu với $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_0, \overline{u}(t)),\ x(t) = x(t, x_0, u(t))$ *là các nghiệm bất kỳ của (3.1) sao cho* $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, x(t_0) = x_0; \overline{x}_0, x_0 \in E^n$, *ta có*

$$D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right] \leq r(t, t_0, w_0),\ t \in I \tag{3.6}$$

với $D_0\left[\overline{x}_0, x_0\right] \leq w_0$ *và với mọi* $\overline{u}(t), u(t) \in U$.

Trong định lý 3.3 ta sử dụng giả thiết *g(t,w)* không giảm theo *w* với mỗi *t* và trong [12] chúng tôi đã dùng bất đẳng thức tích phân để chứng minh định lý này. Nếu sử dụng bất đẳng thức vi phân ta có thể không cần giả thiết về tính đơn điệu của *g(t,w)* và có định lý sau đây.

Định lý 3.4: *Giả sử các giả thiết của định lý 3.3 thỏa mãn trừ tính không giảm của g(t,w) theo w. Khi đó kết luận (3.6) vẫn đúng.*

Chứng minh định lý 3.4: Đặt $m(t) = D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right]$ sao cho $m(t_0) = D_0\left[\overline{x}_0, x_0\right]$.

Với $h > 0$ khá nhỏ, sử dụng tính chất (2.2), (2.4) của metric D_0 ta có

$$\begin{aligned} & D_0\left[\overline{x}(t+h), x(t+h)\right] \\ & \quad \leq D_0\left[\overline{x}(t+h), \overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\right] \\ & \quad\quad + D_0\left[\overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), x(t+h)\right] \\ & \quad \leq D_0\left[\overline{x}(t+h), \overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\right] \end{aligned}$$

$$+D_0\left[\ x(t)+hf(t,x(t),u(t)),x(t+h)\right]$$
$$+D_0\left[\overline{x}(t)+hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)),x(t)+hf(t,x(t),u(t))\right]$$

$$\le D_0\left[\overline{x}(t+h),\overline{x}(t)+hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]$$
$$+D_0\left[\ x(t)+hf(t,x(t),u(t)),x(t+h)\right]$$
$$+D_0\left[\overline{x}(t)+hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)),\overline{x}(t)+hf(t,x(t),u(t))\right]$$
$$+D_0\left[\overline{x}(t)+hf(t,x(t),u(t)),x(t)+hf(t,x(t),u(t))\right]$$

$$\le D_0\left[\overline{x}(t+h),\overline{x}(t)+hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]$$
$$+D_0\left[x(t)+hf(t,x(t),u(t)),x(t+h)\right]$$
$$+D_0\left[hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)),hf(t,x(t),u(t))\right]$$
$$+D_0\left[\overline{x}(t),x(t)\right].$$

Do $m(t+h)-m(t)=D_0\left[\overline{x}(t+h),x(t+h)\right]-D_0\left[\overline{x}(t),x(t)\right]$ nên ta có đánh giá

$$\frac{m(t+h)-m(t)}{h}\le\frac{1}{h}D_0\left[\overline{x}(t+h),\overline{x}(t)+hf(t,\overline{x}(t),u(t))\right]$$
$$+\frac{1}{h}D_0\left[x(t)+hf(t,x(t),u(t)),x(t+h)\right]$$
$$+\frac{1}{h}D_0\left[hf(t,\overline{x}(t),u(t)),hf(t,x(t),u(t))\right].$$

Nhờ (2.3), ta suy ra

$$D^+m(t)=\lim_{h\to0^+}sup\frac{1}{h}\left[m(t+h)-m(t)\right]$$
$$\le\lim_{h\to0^+}sup\,D_0\left[\frac{\overline{x}(t+h)-\overline{x}(t)}{h},\quad f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]$$
$$+D_0\left[f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)),f(t,x(t),u(t))\right]$$
$$+\lim_{h\to0^+}sup\,D_0\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h},f(t,x(t),u(t)\right].$$

Do $\overline{x}(t), x(t)$ là các nghiệm khả vi và giả thiết (3.5) nên ta có

$D^{+}m(t) \le g(t, m(t)),\ m(t_0) \le w_0, t \ge t_0$ với $D^{+}m(t)$ là đạo hàm Dini của hàm $m(t)$.

Theo định lý 1.4.1 trong [7] ta có $m(t) \le r(t, t_0, w_0), t \ge t_0$

Định lý sau sử dụng giả thiết nhẹ hơn các giả thiết của các định lý 3.3-3.4 vì hàm *g(t,w)* có thể lấy giá trị âm.

Định lý 3.5: *Giả sử* $f \in C\left[I \times E^n \times E^p, E^n\right]$ *và với mọi*

$(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)),\ (t, x(t), u(t)) \in I \times E^n \times U$ *ta có*

$$\lim_{h \to 0^+} sup \frac{1}{h}\left\{D_0\left[\overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) - \left(x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right)\right] - D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right]\right\}$$
$$\le g\left(t, D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right]\right)$$

trong đó $g \in C\left[I \times R_+, R\right]$ *và nghiệm lớn nhất* $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ *của phương trình*

$$w' = g(t, w), w(t_0) = w_0 \ge 0$$

tồn tại với $t \in I$. *Khi đó kết luận của định lý 3.3 vẫn đúng.*

Chứng minh định lý 3.5:

Đặt $m(t) = D\left[\overline{x}(t), x(t)\right]$ sao cho $m(t_0) = D\left[\overline{x_0}, x_0\right]$ Với $h > 0$ khá nhỏ, sử dụng tính chất (2.2), (2.4) của metric D_0 ta có

$$\begin{aligned} m(t+h) - m(t) &= D_0\left[\overline{x}(t+h), x(t+h)\right] - D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right] \\ &\le D_0\left[\overline{x}(t+h), \overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\right] \\ &\quad + D_0\left[\overline{x}(t) + hf(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\ &\quad + D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), x(t+h)\right] - D_0\left[\overline{x}(t), x(t)\right] \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$D^{+}m(t) = \lim_{h \to 0^+} sup \frac{1}{h}\left[m(t+h) - m(t)\right]$$

$$\le \limsup_{h\to 0^+} D_0\left[\frac{\overline{x}(t+h)-\overline{x}(t)}{h}, f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]$$

$$+\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\Big\{D_0\left[x(t)+hf(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)),\ \ x(t)+hf(t,x(t),u(t))\right]$$

$$-D_0\left[\overline{x}(t),x(t)\right]\Big\}$$

$$+\limsup_{h\to 0^+} D_0\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, f(t,x(t),u(t))\right].$$

Do $\overline{x}(t), x(t)$ là nghiệm khả vi của (3.1) và giả thiết của định lý 3.5 ta có

$$D^{+}m(t)\le g(t,m(t)),\ m(t_0)\le w_0, t\ge t_0.$$

Theo định lý 1.4.1 trong [7] ta có $m(t)\le r(t,t_0,w_0), t\ge t_0$ (□)

Sau đây chúng tôi đưa ra một kết quả mới về nghiệm xấp xỉ của FCDE.

Hàm $y(t)=y(t,t_0,y_0,u(t),\varepsilon), \varepsilon>0$ gọi là *nghiệm xấp xỉ* - ε của (3.1) nếu

$$y\in C^1\left[I,E^n\right], y(t_0,t_0,y_0,u(t_0),\varepsilon)=y_0$$

và

$$D_0\left[D_H y(t), f(t,y(t),u(t))\right]\le\varepsilon, t\ge t_0,$$

$$u(t)\in U$$

Trong trường hợp $\varepsilon=0$, $y(t)$ là nghiệm của (3.1).

Định lý 3.6: a) *Giả sử* $f\in C\left[I\times E^n\times E^p, E^n\right]$

và với

$(t,x(t),u(t)),\ (t,y(t),u(t))\in I\times E^n\times U$ ta có

$$D_0\left[f(t,x(t),u(t)), f(t,y(t),u(t))\right]\le g(t,D_0\left[x(t),y(t)\right]) \tag{3.7}$$

trong đó $g\in C\left[R_+^2, R_+\right]$.

b) *Giả sử thêm* $r(t,t_0,w_0)$ *là nghiệm lớn nhất của phương trình*

$$w' = g(t,w)+\varepsilon,\ w(t_0)=w_0\ge 0,$$

tồn tại trên $\left[t_0,+\infty\right)$.

Với $x(t)=x(t,t_0,x_0,u(t))$ *là nghiệm bất kỳ của (3.1) và* $y(t)=y(t,t_0,y_0,u(t),\varepsilon)$ *là nghiệm xấp xỉ* - ε *của (3.1) tồn tại với* $t\ge t_0$ *. Khi đó*

$$D_0\left[x(t),y(t)\right]\le r(t,t_0,w_0), t\ge t_0,$$

với $D_0\left[x_0,y_0\right]\le w_0$.

Chứng minh định lý 3.6: Đặt $m(t) = D_0\left[x(t), y(t)\right]$ sao cho $m(t_0) = D_0\left[x_0, y_0\right]$.

Với $h > 0$ khá nhỏ, sử dụng tính chất của metric D_0 ta có

$$m(t+h) - m(t) = D_0\left[x(t+h), y(t+h)\right] - D_0\left[x(t), y(t)\right].$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác (2.4) ta có

$$\begin{aligned}
&D_0\left[x(t+h), y(t+h)\right] \\
&\quad \le D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
&\qquad + D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), y(t+h)\right] \\
&\quad \le D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
&\qquad + D_0\left[y(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t+h)\right] \\
&\qquad + D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), y(t) + hf(t, y(t), u(t))\right] \\
&\quad \le D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
&\qquad + D_0\left[y(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t+h)\right] \\
&\qquad + D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), x(t) + hf(t, y(t), u(t))\right] \\
&\qquad + D_0\left[x(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t) + hf(t, y(t), u(t))\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
&\quad + D_0\left[y(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t+h)\right] \\
&\quad + D_0\left[hf(t, x(t), u(t)), hf(t, y(t), u(t))\right] \\
&\quad + D_0\left[x(t), y(t)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m(t+h) - m(t)}{h} &\le \frac{1}{h} D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
&\quad + \frac{1}{h} D_0\left[y(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t+h)\right] \\
&\quad + \frac{1}{h} D_0\left[hf(t, x(t), u(t)), hf(t, y(t), u(t))\right].
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$D^+m(t)$$
$$= \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left[m(t+h) - m(t)\right]$$
$$\le \lim_{h\to 0^+} sup\, D_0\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h},\ f(t,x(t),u(t))\right]$$
$$+ D_0\left[f(t,x(t),u(t)), f(t,y(t),u(t))\right]$$
$$+ \lim_{h\to 0^+} sup\, D_0\left[\frac{y(t+h)-y(t)}{h}, f(t,y(t),u(t)\right].$$

Do $x(t), y(t)$ là khả vi, giả thiết a) và $y(t)$ là nghiệm xấp xỉ- ε nên ta có

$$D^+m(t) \le g(t,m(t)) + \varepsilon,\ m(t_0) \le w_0, t \ge t_0.$$

Theo định lý 1.4.1 trong [7] ta có $m(t) \le r(t,t_0,w_0), t \ge t_0$

Ta có hệ quả trực tiếp sau đây về ước lượng giữa nghiệm và nghiệm xấp xỉ .

Hệ quả 3.1: *Sử dụng giả thiết của định lý 3.6 với* $g(t,w) = Lw,\ L > 0$ *, ta có*

$$D_0\left[x(t,t_0,x_0), y(t,t_0,y_0,\varepsilon)\right] \le D_0\left[x_o, y_0\right]e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right),\ t \ge t_0.$$

Định lý 3.7: a) *Giả sử* $f \in C\left[I \times E^n \times E^p, E^n\right]$

và với $(t,x(t),u(t)),\ (t,y(t),u(t)) \in I \times E^n \times U$ ta có

$$\lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left\{D_0\left[x(t)+hf(t,x(t),u(t)), y(t)+hf(t,y(t),u(t))\right] - D_0\left[x(t),y(t)\right]\right\}$$
$$\le g(t, D_0\left[x(t),y(t)\right])$$

trong đó $g \in C\left[R_+^2, R\right]$.

b) *Giả sử thêm* $r(t,t_0,w_0)$ *là nghiệm lớn nhất của phương trình*

$$w' = g(t,w) + \varepsilon,\ w(t_0) = w_0 \ge 0,$$

tồn tại trên $\left[t_0, +\infty\right)$. *Với* $x(t) = x(t,t_0,x_0,u(t))$ *là nghiệm bất kỳ của (3.1) và* $y(t) = y(t,t_0,y_0,u(t),\varepsilon)$ *là nghiệm xấp xỉ-* ε *của (3.1) tại với* $t \ge t_0$ *. Khi đó*

$$D_0\left[x(t),y(t)\right] \le r(t,t_0,w_0), t \ge t_0,$$

với $D_0\left[x_0,y_0\right] \le w_0$.

Chứng minh định lý 3.7: Đặt $m(t) = D_0\left[x(t), y(t)\right]$ sao cho $m(t_0) = D_0\left[x_0, y_0\right]$.
Với $h > 0$ khá nhỏ, sử dụng tính chất của metric D_0 ta có

$$
\begin{aligned}
m(t+h) - m(t) = D_0\left[x(t+h), y(t+h)\right] - D_0\left[x(t), y(t)\right] \\
\le D_0\left[x(t+h), x(t) + hf(t, x(t), u(t))\right] \\
+ D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), y(t) + hf(t, y(t), u(t))\right] \\
+ D_0\left[y(t) + hf(t, y(t), u(t)), y(t+h)\right] - D_0\left[x(t), y(t)\right]
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
& D^+m(t) \\
& = \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left[m(t+h) - m(t)\right] \\
& \le \lim_{h\to 0^+} sup\, D_0\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, f(t, x(t), u(t))\right] \\
& + \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left\{D_0\left[x(t) + hf(t, x(t), u(t)), \quad y(t) + hf(t, y(t), u(t))\right]\right. \\
& \left. - D_0\left[x(t), y(t)\right]\right\} \\
& + \lim_{h\to 0^+} sup\, D_0\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}, f(t, y(t), u(t)\right].
\end{aligned}
$$

Do $x(t), y(t)$ là khả vi, giả thiết a) và $y(t)$ là *nghiệm* ε - *xấp xỉ* nên ta có

$$D^+m(t) \le g(t, m(t)) + \varepsilon,\ m(t_0) \le w_0, t \ge t_0.$$

Theo định lý 1.4.1 trong [7] ta có $m(t) \le r(t, t_0, w_0), t \ge t_0$ (□)

Ta có nhận xét rằng nếu trong các định lý 3.6, 3.7 thay nghiệm xấp xỉ-ε *y(t)* bằng nghiệm bình thường thì kết quả trùng với các định lý 3.4, 3.5 tương ứng. Nói một cách đơn giản, các định lý 3.4, 3.5 là trường hợp riêng của các định lý 3.6, 3.7 khi ε = 0.

3.2. Phương trình vi phân điều khiển tập

Phương trình vi phân điều khiển tập (set control differential equation SCDE) dạng

$$D_H X(t) = F(t, X(t), U(t)), \tag{3.8}$$

trong đó

$$X(t_0) = X_0 \in K_c(R^n), X(t) \in K_c(R^n), U(t) \in K_c(R^p), t \in \left[t_0, T\right] = I \subset R_+$$

và $F : I \times K_c(R^n) \times K_c(R^p) \to K_c(R^n)$.

Điều khiển khả tích $U : I \to K_c(\mathbb{R}^p)$ gọi là điều khiển chấp nhận được. Đặt U là tập hợp tất cả các điều khiển chấp nhận được.

Ánh xạ $X \in C^1\left[I, K_c(R^n)\right]$ được gọi là nghiệm của (3.8) trên *I* nếu nó thỏa mãn (3.8) trên *I*. Do $X(t)$ là khả vi liên tục nên tập nghiệm tương đương

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} D_H X(s)ds, t \in I.$$

Kết hợp với bài toán giá trị ban đầu (3.8) ta có

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s), U(s))ds, t \in I \tag{3.9}$$

trong đó tích phân được sử dụng là tích phân Hukuhara. Ta thấy rằng $X(t)$ là nghiệm của (3.8) nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn (3.9) trên *I*.

Tương tự các định lý về sự tồn tại nghiệm cho phương trình vi phân đa trị SDE trong [4, 5], ta có định lý sau đây.

Định lý 3.8 ([13]) **:** Giả sử $F \in C\left[I \times K_c(R^n) \times K_c(R^p), K_c(R^n)\right]$ *và*

(i) $D\left[F(t, X(t), U(t)), \theta\right] \le g\left(t, D\left[X, \theta\right]\right), \left(t, X, U\right) \in I \times K_c(R^n) \times \mathrm{U}$,

trong đó $g \in C\left[I \times R_+, R_+\right]$, *g(t,w) là không giảm theo (t,w);*

(ii) *nghiệm lớn nhất* $r(t,w_0)$ *của phương trình vi phân* $w' = g(t,w)$, $w(t_0) = w_0 \ge 0$ *tồn tại trên I.*

Khi đó tồn tại nghiệm $X(t) = X(t, X_0, U(t))$ *của phương trình (3.8) thỏa mãn*

$$D\left[X(t), X_0\right] \le r(t, w_0) - w_0, t \in I, \tag{3.10}$$

trong đó $w_0 = D\left[X_0, \theta\right]$.

Ta xét giả thiết sau.

Ánh xạ $F : R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p) \to K_c(R^n)$ thỏa mãn điều kiện

$$D\left[F(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t)), F(t, X(t), U(t))\right] \le c(t)\left\{D\left[\overline{X}(t), X(t)\right] + D\left[\overline{U}(t), U(t)\right]\right\} \tag{3.11}$$

với mọi $t \in I; U(t), \overline{U}(t) \in \mathrm{U}; X(t), \overline{X}(t) \in K_c(R^n)$, trong đó $c(t)$ là hàm thực dương và khả tích trên *I.*

Đặt $C = \int_{t_0}^{T} c(t)dt$. Do $c(t)$ khả tích trên *I* nên bị chặn hầu khắp nơi bởi số *K>0* trên *I*, nghĩa là $c(t) \le K$ với hầu khắp nơi $t \in I$.

Kết quả sau cho thấy sự phụ thuộc liên tục của nghiệm của (3.8) vào sự thay đổi của biến điều khiển và điều kiện ban đầu.

Định lý 3.9([13])**:** *Giả sử f liên tục và thỏa mãn (3.11) và* $\overline{X}(t), X(t)$ *là hai nghiệm của (3.8) xuất phát từ* $\overline{X}_0, X_0$ *và tương ứng với các điều khiển chấp nhận được* $\overline{U}(t), U(t)$.

Khi đó với $\varepsilon > 0$ *bất kỳ, tồn tại số* $\delta(\varepsilon) > 0$ *sao cho với* $D\left[\overline{X}_0, X_0\right] \leq \delta(\varepsilon)$ *và*

$D\left[\overline{U}(t), U(t)\right] \leq \delta(\varepsilon)$

ta có $D\left[\overline{X}(t), X(t)\right] \leq \varepsilon$ *trong đó* $t \in I$.

Định lý 3.10([13]): *Giả sử* $F \in C\left[R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p), K_c(R^n)\right]$ *và với mọi* $(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t)),\ (t, X(t), U(t)) \in I \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{U}$ *ta có*

$$D\left[F(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t)), F(t, X(t), U(t))\right] \leq g(t, D\left[\overline{X}(t), X(t)\right]), \tag{3.12}$$

trong đó $g \in C\left[R_+ \times R_+, R_+\right]$ *và* $g(t,w)$ *không giảm theo w với mỗi* $t \in I$.

Giả sử thêm rằng nghiệm lớn nhất $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ *của phương trình*

$$w' = g(t, w), w(t_0) = w_0 \geq 0$$

tồn tại với $t \in I$.

Khi đó nếu với $\overline{X}(t) = \overline{X}(t, \overline{X}_0, \overline{U}(t)),\ X(t) = X(t, X_0, U(t))$ *là các nghiệm bất kỳ của (3.8) sao cho* $\overline{X}(t_0) = \overline{X}_0, X(t_0) = X_0; \overline{X}_0, X_0 \in K_c(R^n)$, *ta có*

$$D\left[\overline{X}(t), X(t)\right] \leq r(t, t_0, w_0),\ t \in I \tag{3.13}$$

với $D\left[\overline{X}_0, X_0\right] \leq w_0$ *và với mọi* $\overline{U}(t), U(t) \in \mathrm{U}$.

Bây giờ ta mở rộng định lý 3.10 trên bằng cách giảm nhẹ điều kiện (3.12).

Trong định lý 3.10 ta sử dụng giả thiết *g(t,w)* không giảm theo *w* với mỗi *t* và trong [13] chúng tôi đã dùng bất đẳng thức tích phân để chứng minh định lý này. Nếu sử dụng bất đẳng thức vi phân ta có thể không cần giả thiết về tính đơn điệu của *g(t,w)* và có định lý sau đây.

Định lý 3.11: *Giả sử các giả thiết của định lý 3.10 thỏa mãn trừ tính không giảm của g(t,w) theo w. Khi đó kết luận của định lý 3.10 vẫn đúng.*

Chứng minh định lý 3.11: Chứng minh tương tự định lý 3.4. Định lý sau sử dụng giả thiết nhẹ hơn giả thiết của các định lý 3.10 - 3.11.

Định lý 3.12. *Giả sử* $F \in C\left[R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p), K_c(R^n)\right]$ *và với mọi*

$$(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t)),\ (t, X(t), U(t)) \in I \times K_c(R^n) \times \mathrm{U} \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \Big\{ D\Big[\overline{X}(t) + hF(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t)) - \big(X(t) + hF(t, X(t), U(t))\big)\Big] - D\left[\overline{X}(t), X(t)\right] \Big\} \\ \leq g\Big(t, D\left[\overline{X}(t), X(t)\right]\Big) \end{aligned} \tag{3.14}$$

trong đó $g \in C\left[I \times R_+, R\right]$ *và nghiệm lớn nhất* $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ *của phương trình*

$$w' = g(t, w), w(t_0) = w_0 \geq 0$$

tồn tại với $t \in I$. *Khi đó kết luận của định lý 3.10 vẫn đúng.*

Chứng minh định lý 3.12. Chứng minh tương tự định lý 3.5.

Sau đây chúng tôi đưa ra vài kết quả về nghiệm xấp xỉ của SCDE.

Hàm $Y(t) = Y(t, t_0, Y_0, U(t), \varepsilon), \varepsilon > 0$ gọi là *nghiệm xấp xỉ* - ε của (3.8) nếu

$$Y \in C^1\left[I, K_c(R^n)\right], Y(t_0, t_0, Y_0, U(t_0), \varepsilon) = Y_0$$

và

$$D\left[D_H Y(t), F(t, Y(t), U(t))\right] \le \varepsilon, t \ge t_0, U(t) \in \mathrm{U}.$$

Trong trường hợp đặc biệt $\varepsilon = 0$, $Y(t)$ là nghiệm của (3.8).

Chứng minh các định lý 3.13 - 3.14 dưới đây tương tự như chứng minh các định lý 3.6 - 3.7.

Định lý 3.13: a) *Giả sử* $F \in C\left[R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p), K_c(R^n)\right]$

và với $(t, X(t), U(t))$, $(t, Y(t), U(t)) \in I \times K_c(R^n) \times \mathrm{U}$ *ta có*

$$D\left[F(t, X(t), U(t)), F(t, Y(t), U(t))\right] \le g(t, D\left[X(t), Y(t)\right]), \tag{3.15}$$

$$F \in C\left[R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p), K_c(R^n)\right];$$

trong đó $g \in C\left[R_+^2, R_+\right]$.

b) *Giả sử thêm* $r(t, t_0, w_0)$ *là nghiệm lớn nhất của phương trình*

$$w' = g(t, w) + \varepsilon,\ w(t_0) = w_0 \ge 0,$$

tồn tại trên $\left[t_0, +\infty\right)$.

Với $X(t) = X(t, t_0, X_0, U(t))$ *là nghiệm bất kỳ của (3.8) và* $Y(t) = Y(t, t_0, Y_0, U(t), \varepsilon)$ *là nghiệm xấp xỉ* - ε *của (3.8) tồn tại với* $t \ge t_0$. *Khi đó*

$$D\left[X(t), Y(t)\right] \le r(t, t_0, w_0), t \ge t_0,$$

với $D\left[X_0, Y_0\right] \le w_0$. Ta có hệ quả trực tiếp sau đây về ước lượng giữa nghiệm và nghiệm xấp xỉ .

Hệ quả 3.2: *Sử dụng giả thiết của định lý 3.13 với* $g(t, w) = Lw$, $L > 0$, *ta có*

$$D\left[X(t, t_0, X_0), Y(t, t_0, Y_0, \varepsilon)\right] \le D\left[X_o, Y_0\right] e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right),\ t \ge t_0.$$

Trong định lý 3.14 sau đây sử dụng giả thiết nhẹ hơn định lý 3.13 vì hàm $g(t, w)$ có thể lấy giá trị âm.

Định lý 3.14: a) *Giả sử* $F : R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^p) \to K_c(R^n)$ *và với mọi*

$(t, \overline{X}(t), \overline{U}(t))$, $(t, X(t), U(t)) \in I \times K_c(R^n) \times \mathrm{U}$ *ta có*

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left\{D\left[X(t) + hF(t, X(t), U(t)), Y(t) + hF(t, Y(t), U(t))\right] - D\left[X(t), Y(t)\right]\right\}$$
$$\le g(t, D\left[X(t), Y(t)\right]) \tag{3.16}$$

trong đó $g \in C\left[R_+^2, R\right]$.

b) *Giả sử thêm* $r(t, t_0, w_0)$ *là nghiệm lớn nhất của phương trình*

$$w' = g(t, w) + \varepsilon,\ w(t_0) = w_0 \geq 0,$$

tồn tại trên $\left[t_0, +\infty\right)$.

Với $X(t) = X(t, t_0, X_0, U(t))$ *là nghiệm bất kỳ của (3.8) và* $Y(t) = Y(t, t_0, Y_0, U(t), \varepsilon)$ *là nghiệm xấp xỉ -* ε *của (3.8) tồn tại với* $t \geq t_0$ *. Khi đó*

$$D\left[X(t), Y(t)\right] \leq r(t, t_0, w_0), t \geq t_0,\ \text{với}\ D\left[X_0, Y_0\right] \leq w_0.$$

3.KẾT LUẬN

Phương trình vi phân mờ FDE đã được nghiên cứu từ 1978 và đặc biệt được chú ý sau các công trình [1,2] của O. Kaleva. Phương trình vi phân tập SDE được nghiên cứu trong vài năm gần đây với các công trình chủ yếu của V. Lakshmikantham và cộng sự. Các kết quả ban đầu về phương trình vi phân điều khiển mờ FCDE và phương trình vi phân điều khiển tập SCDE được chúng tôi trình bày trong [10-15]. Trong [12,13], chúng tôi so sánh các nghiệm bó của FCDE (SCDE), tức là so sánh tập các nghiệm của FCDE (SCDE). Việc nghiên cứu FCDE SCDE có nhiều triển vọng về lý thuyết và ứng dụng. Tuy nhiên cũng có nhiều khó khăn khi nghiên cứu FCDE và SCDE do $\left(E^n, D_0\right)$ và $\left(K_c(R^n), D\right)$ chỉ là các không gian metric đủ, chưa có các cấu trúc khác như không gian véc tơ, không gian định chuẩn … Giữa phương trình vi phân mờ và phương trình vi phân tập có mối quan hệ với nhau [4, 5]. Chúng tôi đang nghiên cứu mối quan hệ giữa phương trình vi phân điều khiển mờ và phương trình vi phân điều khiển tập và kết quả đó sẽ được công bố trong công trình tiếp theo.

SOME NEW RESULTS ON THE FUZZY CONTROL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nguyen Dinh Phu, Tran Thanh Tung
University of Natural Science, VNU-HCM

ABSTRACT: *Recently, the field of differential equations has been studied in a very abstract method. Instead of considering the behaviour of one solution of a differential equation, one studies its sheaf-solution (see[10-13]). Instead of studying a differential equation, one studies differential inclusion (see [9]). Especially, one studies fuzzy differential equation (a differential equation whose variables and derivative are fuzzy sets, see [1- 6]).*

In this report, we have generalized some new results on the system of fuzzy control differential equation (FCDE). This report is a continuation of our works in this direction (see [10-15]).

Keywords: *Fuzzy theory; Differential equations; Control theory; Fuzzy differential equations, Fuzzy control diferential equations, Set control diferential equations.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1].Wu. C, Song. S., *Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 202 (1996), pp 629-644.

[2].Kaleva. O., *Fuzzy differential equations,* Fuzzy Sets and Systems, 24 (1987), pp 301-317.

[3].Kaleva. O., *The Cauchy problem for fuzzy differential equations,* Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990), 389-396.

[4].Lakshmikantham V., *Set differential equations versus fuzzy differential equations,* Applied Mathematics and Computation 164 (2005), pp 277-294.

[5].Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T, Vasundhara Devi J., *Theory of set differential equations in metric spaces,* Cambridge Scientific Publisher, UK, (2006).

[6].Lakshmikantham V., Mohapatra R., *Theory of fuzzy differential equations and inclusions,* Taylor & Francis, London, (2003).

[7]. Lakshmikantham V., Leela S.; *Differential and Integral inequalities,* Vol I, II, Academic Press, New York, (1969).

[8]. Nguyễn Đình Phư, *Tổng quan về lý thuyết hệ thống,* NXB ĐH QG Tp Hồ Chí Minh, (2003).

[9]. Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Thư Hương., *Phương trình vi phân đa trị,* NXB ĐH QG Tp Hồ Chí Minh, (2005).

[10].Phu N. D., Tung T.T., *Sheaf optimal control problems in fuzzy type,* J. Science and Technology Development 8 (12) (2005), pp 5-11.

[11].Phu N. D., Tung T.T., *The comparison of sheaf- solutions in fuzzy control problems,* J. Science and Technology Development 9 (2) (2006), pp 5-10.

[12].Phu N. D., Tung T.T., *Some properties of sheaf-solutions of sheaf fuzzy control Problems,* Electronic Journal of Differential Equations Vol (2006), N. 108, pp 1-8.

[13].Phu N. D., Tung T.T., *Some results on sheaf solutions of sheaf set control problems,* J. Nonlinear Analysis, Vol 9 (2007), pp 1309 – 1315.

[14].Phu N. D., Tung T.T., *Existence of solutions of fuzzy control* differential equations, J. Science and Technology Development 10 (5) (2007), pp 5-12.

[15].Phu N. D., Tung T.T., *Existence of solutions of set control differential equations*, J. Science and Technology Development 10 (6) (2007), pp 5-14.

[16]. Tolstonodov A., *Differential inclusions in a Banach Space*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, (2000).