

TỐI ƯU HÓA KIỂU DÁNG KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP MẬT ĐỘ VÀ PHƯƠNG PHÁP TIẾN HÓA

Bùi Hoàng Giang, Nguyễn Hữu Lộc

Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 01 tháng 11 năm 2007, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 06 tháng 03 năm 2008)

TÓM TẮT: Các phương pháp tối ưu hóa kiểu dáng kết cấu ngày càng đóng vai trò quan trọng trong việc hình thành và phát triển sản phẩm. Báo cáo này đề cập đến hai phương pháp tối ưu hóa kiểu dáng kết cấu thông dụng hiện nay là phương pháp mật độ và phương pháp tiến hóa. Dựa trên những cơ sở lý thuyết đã được phát triển và kiểm chứng, chúng tôi đã xây dựng sơ đồ giải thuật và viết một chương trình tính tối ưu kết cấu trên nền Matlab. Kết quả tính của các phương pháp được phân tích và so sánh để tìm ra phương pháp có hiệu quả cao, từ đó có thể phát triển mở rộng để tính tối ưu hóa các kết cấu phức tạp và giải quyết các bài toán tối ưu đa mục tiêu.

1. TỔNG QUAN

1.1. Tình hình nghiên cứu

Lĩnh vực tối ưu hóa kiểu dáng kết cấu ngày nay phát triển rất mạnh. Đi theo hướng tối ưu hóa những kết cấu liên tục, kết quả đầu tiên được đưa ra bởi Bendsoe & Kikuchi trong [8]. Kể từ đó các phương pháp mới lần lượt ra đời và chứng minh được ưu thế khi tính toán. Đầu tiên là phương pháp đồng nhất, tuy nhiên phương pháp này sử dụng mô hình vật liệu composite và không tính được cho những bài toán có điều kiện biên phức tạp.

Sử dụng mô hình tính của phương pháp đồng nhất, các phương pháp hướng mật độ sử dụng mô hình vật liệu đơn giản hơn, với những công thức thay đổi thiết kế mang tính chất suy luận, vì vậy cho phép tính toán một cách linh hoạt và có thể thêm ràng buộc nếu cần. Với sự hỗ trợ của công cụ máy tính mạnh, việc tính toán và kiểm tra theo phương pháp mật độ tỏ ra khá đơn giản. Hiện nay, phương pháp này vẫn đang được nghiên cứu và có nhiều cách tính.

Đi theo một hướng khác, không sử dụng mô hình giải tích của vật liệu và kết cấu, Xie & Steven đã phát triển phương pháp tiến hóa cho phép tính nhanh kết cấu tối ưu và kết quả dễ chấp nhận. Mô hình tính của phương pháp rất đơn giản và cốt lõi là có một công cụ mạnh để phân tích phần tử hữu hạn và rời rạc hóa kết cấu. Điều này dễ dàng thực hiện được với các phần mềm CAD/CAE thương mại. Trên thực tế, các phần mềm lớn đều hỗ trợ tính toán tối ưu kiểu dáng kết cấu theo phương pháp tiến hóa.

Ngày nay, có sự đòi hỏi cấp bách của những công cụ thiết kế tham số có khả năng thay đổi nhanh, tốn ít thời gian và kết quả chấp nhận được. Với đặc thù là các kết quả tính tối ưu kiểu dáng đều phải qua bước tinh chỉnh sau đó là tối ưu hình dạng và tối ưu kích thước, cho nên không cần đòi hỏi quá nhiều ở sự chính xác của phương pháp. Vấn đề là đưa ra được hình dạng hợp lý cho sản phẩm (có thể dễ chế tạo hoặc lắp ráp). Theo quan điểm này, hiện nay các phương pháp hướng mật độ đang có ưu thế vì tốc độ hội tụ nhanh của phương pháp.

1.2. Giới thiệu phương pháp

Phương pháp mật độ tỏ ra có ưu thế khi tính toán vì chỉ sử dụng một biến thiết kế là mật độ của vật liệu. Để thuận lợi cho việc mô hình hóa và tính toán số, thủ tục phân tích phần tử hữu hạn được sử dụng, theo đó miền thiết kế được rời rạc hóa thành các phần tử và mật độ coi như không đổi trên phần tử đó. Có nhiều cách tiếp cận phương pháp mật độ tuy nhiên phương

pháp SIMP (solid isotropic material with penalization) là được sử dụng nhiều nhất trong việc tính toán do mô hình vật liệu đơn giản của nó.

Khác với phương pháp đồng nhất, sử dụng mô hình vật liệu composite có tính không đẳng hướng, vật liệu đối với phương pháp mật độ là đẳng hướng. Vì vậy ma trận vật liệu có dạng đơn giản. Đối với các bài toán 2D, ta chỉ xét đến trường hợp ứng suất phẳng. Mặt khác, mật độ của từng phần tử là khác nhau, cho nên môđun Young của từng phần tử cũng khác nhau. Một cách gần đúng, nếu vật liệu là đồng nhất trên toàn phần tử thì môđun Young có thể được xấp xỉ bằng luật hàm mũ. Luật này được chọn vì tính đơn giản và dễ tính toán [2]. Việc chọn số mũ phạt trong công thức hàm mũ là quan trọng, nó ảnh hưởng rất nhiều đến tính hợp lý của kết cấu, vd $p \geq 3$ khi $\mu \approx 1/3$ (Sigmund)[2].

Phương pháp mật độ chỉ sinh ra một kết cấu tối ưu dựa trên độ cứng chứ không chứng tỏ rằng kết cấu tối ưu đó là duy nhất hay có tồn tại kết cấu tối ưu đó hay không. Để phương pháp có lời giải, cần có một số điều kiện biên phụ (như điều kiện thể tích). Trong một số trường hợp, kết cấu sinh ra có dạng bàn cờ, điều này không hợp lý và được coi là một trong những điểm bất ổn định của phương pháp. Điều này có thể được giải quyết bằng cách sử dụng một số kỹ thuật lọc. Ý tưởng của các kỹ thuật lọc là thay đổi độ thích hợp hay độ nhạy của hàm mục tiêu dựa trên quan hệ của phần tử đó với các phần tử lân cận. Việc thay đổi này, trong một chừng mực cho phép, không ảnh hưởng đến độ chính xác của lời giải, mà có thể làm giảm kết cấu dạng bàn cờ vì làm tăng tính liên tục cục bộ của vùng thiết kế. Một số điểm bất ổn định khác là sự phụ thuộc của lời giải vào kiểu chia lưới.

Phương pháp ESO không sử dụng biến thiết kế mà xét đến sự có mặt hay không của vật liệu tại một điểm trong miền thiết kế. Miền thiết kế được rời rạc hóa thành các phần tử và vật liệu được coi như đồng nhất trên toàn bộ phần tử đó. Thủ tục phân tích phần tử hữu hạn được sử dụng để tính toán hàm độ nhạy của một phần tử và dựa trên đáp ứng của kết cấu với tải trọng cho trước, quyết định có đặt vật liệu tại phần tử đó hay không. Phương pháp ESO có thể áp dụng cho mô hình vật liệu không đẳng hướng hoặc vật liệu đàn hồi phi tuyến. Tuy nhiên, những kết quả tính cho các mô hình vật liệu phức tạp chưa được thực hiện và kiểm chứng nhiều. Trong báo cáo này chỉ xét đến mô hình vật liệu đẳng hướng.

Đặc điểm của phương pháp ESO là chỉ loại bỏ phần tử, vì vậy nó làm thay đổi đáp ứng của kết cấu dưới tải trọng cho trước. Trong nhiều trường hợp khi mật độ lưới không đủ mịn sẽ làm tăng tốc độ bóc phần tử. Vì vậy, cần có một tiêu chuẩn thêm vật liệu vào kết cấu để kết quả tính đáng tin cậy hơn. Điều đó dẫn đến sự ra đời của phương pháp tiến hóa 2 hướng (BESO). Phương pháp BESO dựa trên quan niệm rằng vật liệu tại những vùng có hàm độ nhạy lớn nên được thêm vào để đảm bảo lượng tăng của độ cứng kết cấu là lớn nhất. Các kết quả tính cũng đã chứng minh rằng phương pháp BESO cho kết quả đẹp hơn và ổn định hơn phương pháp ESO.

Các phương pháp ESO nếu hội tụ sẽ dẫn đến một kết cấu có thể tích nhỏ nhất với ứng suất trên mỗi phần tử xấp xỉ nhau và gần bằng giá trị lớn nhất. Với kết cấu này độ cứng có thể không phải là lớn nhất, vì vậy các kết cấu sau mỗi lần tính lặp cần được lưu lại để chọn ra kết cấu có độ cứng lớn nhất, kết cấu đó hiển nhiên sẽ không phải là kết cấu có thể tích bé nhất.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN

2.1. Phương pháp mật độ

Phương pháp mật độ tối ưu hóa dựa trên tiêu chuẩn độ cứng của kết cấu. Theo đó độ cứng kết cấu sẽ được tối ưu đến giá trị lớn nhất theo nghĩa tương đối so với khối lượng vật liệu của

toàn miền thiết kế. Vì độ cứng tỉ lệ nghịch với năng lượng biến dạng của vật thể, vì vậy độ cứng lớn nhất tương đương với năng lượng biến dạng nhỏ nhất.

Bài toán tối ưu cơ bản:

$$\min W = \int_{\Omega} f^T u \, dv \quad (1)$$

Với các ràng buộc:

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma \, dv = \int_{\Omega} p^T u \, dv + \int_{\partial\Omega} \tau^T u \, dv \quad \int_{\Omega} dv \leq V_m$$

và

Sau khi rời rạc hóa bài toán bằng thủ tục phân tích phần tử hữu hạn

$$\min W = \sum u_e^T K_e u_e \quad (2)$$

Với các ràng buộc: $Ku = F$

$$\sum \rho_e V_e = \gamma V_0$$

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \leq 1$$

Trên phần tử tồn tại biến thiết kế là mật độ, nên mô đun đàn hồi Young trên phần tử được xấp xỉ bằng công thức sau:

$$E(\rho) = \eta_1(\rho) E_0 \quad (3)$$

Vì vậy, ma trận độ cứng phần tử trở thành:

$$K_e = \eta_1(\rho) K_0 \quad (4)$$

Thể tích hiệu dụng của phần tử được tính bởi:

$$V_e = \eta_2(\rho) V_0 \quad (5)$$

Để tìm giá trị nhỏ nhất theo phương pháp tiệm cận gradient, hàm độ nhạy của hàm mục

tiêu được thiết lập

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_i} = \frac{\partial (u_e^T K_e u_e)}{\partial \rho_i} = \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} W_e \quad (6)$$

Công thức cập nhật biến thiết kế theo Bendsoe:

$$\rho_e^{\text{new}} = \begin{cases} \max(\rho_{\min}, \rho_e - m) & \rho_e B_e^\eta \leq \max(\rho_{\min}, \rho_e - m) \\ \rho_e B_e^\eta & \min(\rho_{\max}, \rho_e + m) > \rho_e B_e^\eta > \max(\rho_{\min}, \rho_e - m) \\ \min(\rho_{\max}, \rho_e + m) & \min(\rho_{\max}, \rho_e + m) \leq \rho_e B_e^\eta \end{cases} \quad (7)$$

trong đó B_e là một hệ số cho phép thỏa mãn điều kiện tối ưu đồng thời có thể kiểm soát

$$B_e = \frac{\frac{\partial W}{\partial \rho_e}}{\lambda V_e} \quad (8)$$

được thể tích của miền thiết kế:

Việc thêm vào λ nhằm đạt được điều kiện về thể tích. Trong mỗi bước lặp tính tối ưu, các ρ_e được tính lặp theo công thức (7) cho tới khi điều kiện thể tích được thỏa mãn. Để đảm bảo hội tụ λ được thay đổi bằng phương pháp chia đôi.

Các kĩ thuật lọc được áp dụng vào (7) nhằm đạt đến một thiết kế hợp lí hơn, đồng thời giảm những sự bất hợp lí trong kết cấu tính tối ưu như kết cấu dạng bàn cờ.

Một số kĩ thuật lọc thường dùng:

Kĩ thuật lọc hàm độ nhạy

Hàm độ nhạy được sửa đổi để tính đến sự ảnh hưởng của các phần tử khác lên phần tử đang tính:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \rho_i} = \frac{\sum_{f=1}^N H_f \rho_f \frac{\partial W}{\partial \rho_f}}{\rho_e \sum_{f=1}^N H_f} \quad (9)$$

Việc chỉnh sửa hàm độ nhạy này có ý nghĩa như tăng tính liên tục cục bộ của miền thiết kế.

Kĩ thuật lọc biến thiết kế

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{f=1}^N H_f \rho_f}{\sum_{f=1}^N H_f} \quad (10)$$

Công thức cho biến thiết kế sửa đổi:

$$\tilde{\rho}_e \text{ được sử dụng lại trong công thức cập nhật biến thiết kế của Bendsoe:}$$

$$\rho_e^{\text{new}} = \begin{cases} \max(\rho_{\min}, \tilde{\rho}_e - m) & \rho_e B_e^\eta \leq \max(\rho_{\min}, \tilde{\rho}_e - m) \\ \tilde{\rho}_e B_e^\eta & \min(\rho_{\max}, \tilde{\rho}_e + m) > \rho_e B_e^\eta > \max(\rho_{\min}, \tilde{\rho}_e - m) \\ \min(\rho_{\max}, \tilde{\rho}_e + m) & \text{nếu } \min(\rho_{\max}, \tilde{\rho}_e + m) \leq \rho_e B_e^\eta \end{cases} \quad (11)$$

Tính toán cho trường hợp đa tải

Với trường hợp đa tải, ta áp dụng nguyên lí chồng chất các lực tác dụng, theo đó độ thích hợp của kết cấu bằng tổng độ thích hợp của kết cấu đó khi chịu các tải thành phần

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{F_i} u_e^T K_e u_e \quad (12)$$

Việc tính toán các biến thiết kế và các hàm độ nhạy tương tự như đối với trường hợp đơn tải

Cách chọn hàm lượng giá

Hàm lượng giá khác nhau ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ của phương pháp, có thể hiểu hàm lượng giá là các hàm xấp xỉ độ cứng và thể tích của phần tử vật liệu.

Phương pháp SIMP: $\eta_1(\rho) = \rho^p, \eta_2(\rho) = \rho \quad (13)$

Phương pháp SIMP cải tiến: $\eta_1(\rho) = \frac{\sinh(\rho p)}{\sinh(p)}, \eta_2(\rho) = \rho \quad (14)$

Phương pháp SINH: $\eta_1(\rho) = \rho, \eta_2(\rho) = 1 - \frac{\sinh[p(1-\rho)]}{\sinh(p)} \quad (15)$

Phương pháp SINH cải tiến: $\eta_1(\rho) = \frac{\sinh(\rho p)}{\sinh(p)}, \eta_2(\rho) = 1 - \frac{\sinh[p(1-\rho)]}{\sinh(p)} \quad (16)$

2.2. Phương pháp tiến hóa

Giống như các phương pháp tối ưu hóa kết cấu khác, phương pháp tiến hóa tìm một kết cấu có độ cứng lớn nhất với khối lượng nhỏ nhất cho phép. Để đạt được điều đó, bài toán dẫn đến việc tối ưu độ thích hợp của kết cấu đến giá trị nhỏ nhất. Độ thích hợp của kết cấu có thể hiểu là công của ngoại lực tác dụng lên kết cấu được tích trữ dưới dạng năng lượng biến dạng:

$$C = \frac{1}{2} \{F\}^T \{u\} \quad (17)$$

Sự tồn tại của phần tử trong kết cấu được đặc trưng bởi biến thiết kế. Sự loại bỏ phần tử dựa trên qui luật suy diễn heuristic, trong đó phần tử nào đóng góp nhỏ nhất cho kết cấu sẽ bị loại bỏ. Vì vậy, tiêu chuẩn loại bỏ có dạng

$$m_i < RR \cdot m_{\max} \quad (18)$$

Với RR là hệ số cho phép kiểm soát sự loại bỏ phần tử

Có 2 tiêu chuẩn loại bỏ m được sử dụng, đó là tiêu chuẩn ứng suất von Mises và năng lượng biến dạng của phần tử

Theo tiêu chuẩn ứng suất von Mises: $m = \sigma_{vm}$

$$\sigma_{vm}^i < RR \cdot \sigma_{vm}^{\max} \quad (19)$$

Ứng suất von Mises tính theo các thành phần ứng suất trong hệ trục tọa độ Đêcác của phần tử:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Theo tiêu chuẩn năng lượng biến dạng của phần tử, còn gọi là hệ số độ nhạy của phần tử:

$$m = \alpha_s = \frac{1}{2} u_e^{iT} K_e^i u_e^i$$

$$\alpha_s^i < RR \cdot \alpha_s^{\max} \quad (20)$$

Người ta chứng minh được rằng hai tiêu chuẩn này tương đương nhau [9].

Một trong những mục tiêu của phương pháp là đạt đến một thiết kế đồng đều trên kết cấu, nghĩa là hệ số độ nhạy của các phần tử còn tồn tại phải đồng đều nhau. Để đạt được điều này, sau mỗi bước tiến hóa, hệ số RR được tăng lên một đại lượng ER. Việc tăng hệ số loại bỏ có ý nghĩa như làm giảm tối đa các phần tử đóng góp ít nhất cho kết cấu về phương diện năng lượng.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (21)$$

Hệ số loại bỏ phải nhỏ để đảm bảo sau mỗi bước tính, kết cấu tối ưu không bị biến đổi nhiều. Thường lấy $RR < 0,2$ và chọn $ER = 0,001$.

Phương pháp BESO:

Phương pháp BESO là một cải tiến của ESO trong đó cho phép thêm phần tử. Việc thêm vào phần tử làm cho kết quả tính ổn định hơn.

Các qui tắc thêm phần tử:

+ Đưa vào hệ số bao gộp IR để đo lường mức độ có thể thêm vào của phần tử.

Phần tử i sẽ được chọn để thực hiện thêm vật liệu vào nếu thỏa mãn

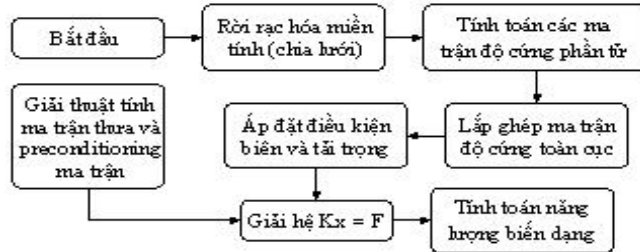
$$\alpha_s^i > IR \times \alpha_s^{\max} \quad (22)$$

+ Việc thêm vật liệu vào một vị trí tương đương với việc kích hoạt các phần tử bao quanh phần tử đã chọn.

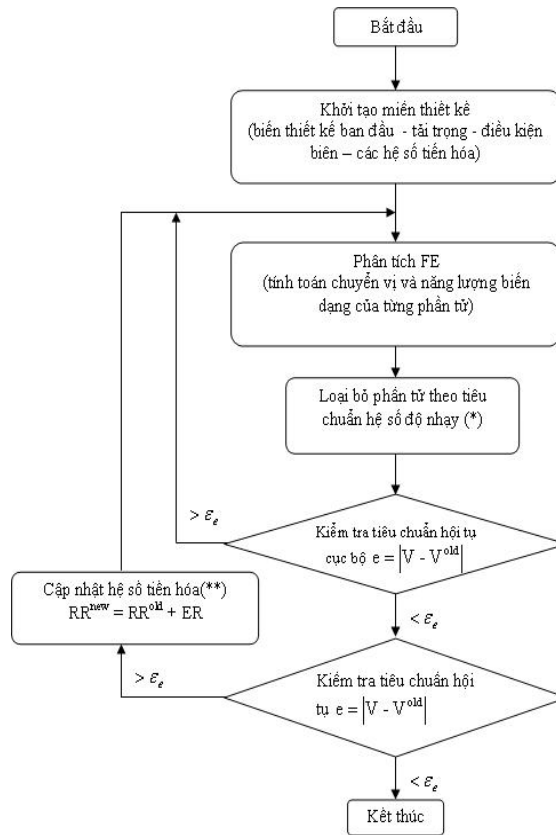
Sau mỗi bước tiến hóa, IR được giảm đi một lượng IER để đảm bảo năng lượng biến dạng đồng đều trên toàn miền thiết kế.

3. GIẢI THUẬT

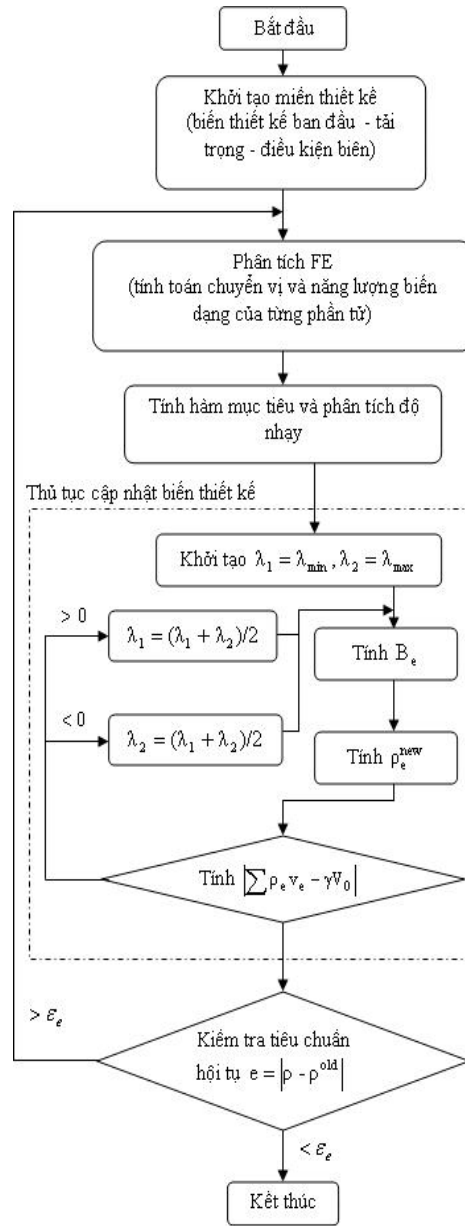
Dưới đây trình bày giải thuật cho từng phương pháp:



Hình 1. Giải thuật phân tích phần tử hữu hạn



Hình 2. Giải thuật cho phương pháp tiến hóa ESO



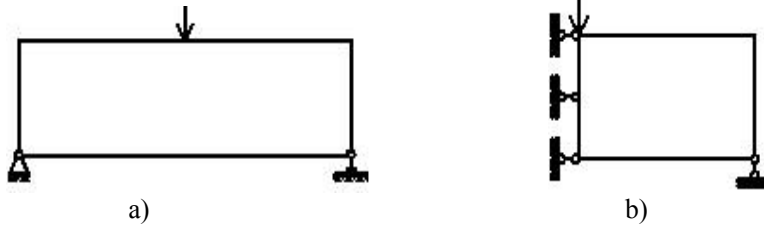
Hình 3. Giải thuật cho các phương pháp hướng mật độ

Giải thuật cho phương pháp BESO cũng tương tự giải thuật cho phương pháp ESO. Tuy nhiên khác biệt ở 2 điểm là ở bước (*) có thêm tiêu chuẩn thêm phần tử theo hệ số độ nhạy theo (14) và ở bước (**) cập nhật hệ số tiến hóa IR: $IR_{new} = IR_{old} - IER$

4.KẾT QUẢ MÔ PHỎNG SỐ

4.1.Tính toán cho trường hợp tải đơn



Khảo sát bài toán dầm 2D chịu tải đơn:



Hình 4. Kết cấu dầm tính toán và kết cấu dầm thu gọn

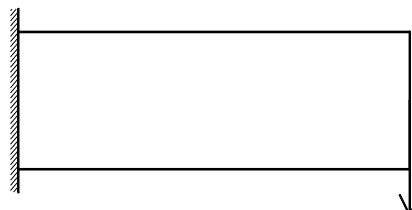
Vì bài toán có tính đối xứng nên chỉ thực hiện tính toán cho một nửa dầm, kết cấu hoàn thiện nhận được bằng cách lấy đối xứng.

Phương pháp sử dụng	Lưới 40 x 20		Lưới 60 x 20	
	Kiểu dáng tối ưu	Số lần lặp	Kiểu dáng tối ưu	Số lần lặp
SIMP (không lọc)		37		65
SIMP (lọc tuyến tính)		68		54
SIMP (lọc Gauss)		53		124
SIMP cải tiến (không lọc)		28		36
SIMP cải tiến (lọc tuyến tính)		61		33
SIMP cải tiến (lọc Gauss)		55		74
ESO		108		145




BESO		98		141
------	---	----	--	-----

Trong các kết quả tính trên, đối với phương pháp SIMP lấy lượng giảm vật liệu là 50%, đối với phương pháp ESO không giới hạn lượng giảm vật liệu.

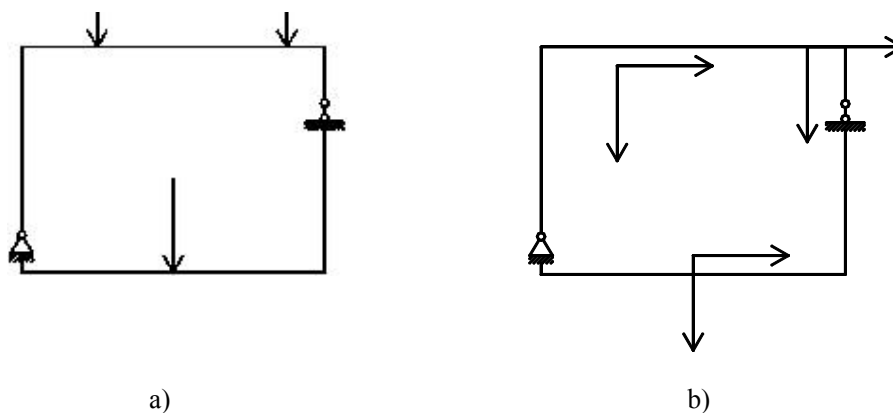
Bài toán dầm console:









Hình 5. Kết cấu dầm console

Lưới 40x20, $\gamma = 0.5$			
Phương pháp lọc	Không lọc	Lọc tuyến tính	Lọc Gauss
Kết cấu tối ưu			
Số lần lặp	25	89	149

4.2. Tính toán cho trường hợp đa tải



Hình 6. Mô hình bài toán khung xe đạp: a) Trường hợp 3 tải; b) Trường hợp 6 tải

Phương pháp sử dụng	Trường hợp 3 tải		Trường hợp 6 tải	
	Kiểu dáng tối ưu	Số lần lặp	Kiểu dáng tối ưu	Số lần lặp
Mật độ (không lọc)		38		35
Mật độ (lọc tuyến tính)		66		109
Mật độ (lọc Gauss)		49		29

Trong các kết quả tính khung xe đạp lấy lượng giảm vật liệu còn 30% vật liệu ban đầu.

5.KẾT LUẬN

Phương pháp SIMP tuy sinh ra dạng biên mờ nhưng cho kết quả nhanh và đẹp hơn phương pháp ESO. Phương pháp SIMP cho kết quả rất tốt với bộ lọc Gauss khi miền chia lưới mịn. Khi miền chia lưới càng mịn thì SIMP cho kết quả đáng tin cậy với kết cấu tối ưu không thay đổi nhiều về kiểu dáng. Hơn nữa, khi sử dụng phương pháp SIMP cải tiến thì tốc độ hội tụ còn nhanh hơn.

Phương pháp ESO & BESO cho kết quả khá hợp lí khi chọn những thông số tiến hóa hợp lí. Trong một số trường hợp, kết cấu tối ưu có thể bị mất hoàn toàn nếu hệ số tiến hóa biên thiên lớn. Mặt khác, phương pháp này có tốc độ hội tụ chậm và không thích hợp để giải các bài toán lớn hoặc những bài toán chia lưới mịn.

So sánh với khi giải bằng ANSYS, ta thấy kết cấu tối ưu theo phương pháp mật độ mịn hơn và đẹp hơn. Điều đó cho thấy rằng áp dụng những kĩ thuật lọc thích hợp cho phương pháp mật độ sẽ cho những kết quả chấp nhận được.

Phương hướng phát triển

Dựa trên những nhận xét trên, ta thấy rằng nếu chấp nhận biên mờ thì phương pháp SIMP tốt hơn hẳn so với phương pháp ESO. Để xử lí biên mờ ta có thể chuyển sang một bài toán tối ưu hình dáng khác. Vì vậy có thể sử dụng phương pháp SIMP để thực hiện tính toán tối ưu các kết cấu 3D cũng như trường hợp đa tải.

Việc tính toán tối ưu theo giải thuật trên cũng cho phép thêm vào các ràng buộc thiết kế mới, như ràng buộc về độ tin cậy. Vì vậy, xây dựng thuật toán tính theo những phương pháp này cho phép tính toán tối ưu kiểu dáng kết cấu theo độ tin cậy và tải trọng động.

TOPOLOGY OPTIMIZATION BASED ON DENSITY APPROACH AND EVOLUTIONARY STRUCTURAL METHOD

Bui Hoang Giang, Nguyen Huu Loc
University of Technology, VNU-HCM

ABSTRACT: *Topology Optimization Procedure plays an important role in the design and development of a product. This report refers to two most popular topology optimization methods at present which are density method and evolutionary structural optimization method. Based on the developed and validated theories, we built the algorithm flowchart and some Matlab code to test some problems. The purpose of the report is to build the algorithm flowchart and procedure of finite element analysis. From this, we get the result. The efficient of each method is analyzed to find the appropriate method which can be used to solve complex topology and multiobjective problems.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. G.R.Liu and S.S.Quak: *The Finite Element Method - A practical course*. (2003).
- [2]. O.Sigmund: *A 99 line topology optimization code written in Matlab*, Struct Multidisc Optim 21, p120–127, Springer-Verlag (2001).
- [3]. M.Y. Wang, S.Y. Wang, and K.M. Lim: *A Density Filtering Approach for Topology Optimization*. 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, COEX Seoul, Korea, 21 May - 25 May (2007).
- [4]. T. E. Bruns: *A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid–void topology optimization*. Struct Multidisc Optim (2005)30: p428–436
- [5]. Gregor Kotucha – Klaus Hackl: *Density gradient based regularization of topology optimization problems*. XXI ICTAM, 15–21 August 2004, Warsaw, Poland.
- [6]. Y.M. Xie, X. Huang, J.W. Tang & P. Felicetti: *Recent Advances in Evolutionary Structural Optimization*, Keynote Lecture for Frontiers of Computational Science Symposium, Nagoya University, Japan, 11-13 October (2005).
- [7]. A.Rietz: *Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods*, Struct Multidisc Optim 21, p159–163, Springer-Verlag, (2001).
- [8]. M. Bendsoe, N. Kikuchi: *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 71, p197-224 (1988).
- [9]. Qing Li, Osvaldo Querin & Grant Steven: *Some Thoughts on the Physics and Mechanics of the Evolutionary Structural Optimization Process* [paper].