VỀ ĐỘ TIN CẬY TRONG BÀI TOÁN BẢO HIỂM NHÂN THỌ

Ung Ngọc Quang, Tô Anh Dũng, Nguyễn Minh Hải
Nguyễn Đức Phương, Phan Trọng Nghĩa
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 17 tháng 12 năm 2006)

***TÓM TẮT**: Bài toán ứng dụng lý thuyết độ tin cậy vào việc khảo sát bảo hiểm nhân thọ.*
***Từ khóa:** Độ tin cậy, bảo hiểm nhân thọ, kiểm định giả thiết.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bảo hiểm là vấn đề thời sự hiện nay. Từ đầu thế kỷ XX, lý thuyết xác suất và thống kê toán học đã được ứng dụng trong toán bảo hiểm. Một trong những vấn đề được quan tâm trong bảo hiểm là bảo hiểm nhân thọ (Xem [1], [2],[3]).

Bài báo này sẽ sử dụng lý thuyết độ tin cậy - một ngành toán học thuộc lĩnh vực Xác suất - Thống kê - để khảo sát bài toán bảo hiểm nhân thọ. Trước hết, ta đưa ra khái niệm căn bản về bảo hiểm nhân thọ và lý thuyết độ tin cậy (Xem [4]).

2. SƠ LƯỢC VỀ BẢO HIỂM NHÂN THỌ VÀ ĐỘ TIN CẬY

2.1.Định nghĩa 2.1

Gọi $t=0$ là thời điểm mà một người bắt đầu mua bảo hiểm. Gọi T là thời gian sống của người đó từ lúc bắt đầu mua bảo hiểm cho đến lúc tử vong. Trong bài toán này ta sẽ coi T là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Gọi $F(t)=P(T\le t)$ là hàm phân phối xác suất của T.

Đặt $S(t)=1-F(t)=P(T>t), t\ge 0$. Người ta gọi $S(t)$ là hàm sống của cá thể đang khảo sát

2.2.Định nghĩa 2.2

Xét một hệ thống (kỹ thuật, sinh học, kinh tế vv...) gồm nhiều phần tử hợp thành. Giả sử tại thời điểm $t=0$, một phần tử trong hệ thống này bắt đầu hoạt động. Người ta gọi thời gian T mà phần tử ấy bắt đầu hoạt động cho tới lần hư hỏng đầu tiên là thời gian sống hay tuổi thọ của phần tử ấy (Xem [4]).

Người ta gọi xác suất làm việc không hư của một phần tử cho tới thời điểm t là độ tin cậy (hàm tin cậy) của phần tử đó và ký hiệu $R(t)=P\{T>t\}$ (Xem [4]).

Người ta gọi xác suất hư hỏng cho tới thời điểm t của phần tử đó là độ không tin cậy và ký hiệu $F(t)=P\{T\le t\}$.

Hiển nhiên $F(t)$ là hàm phân phối xác suất của T và ta có $R(t)=1-F(t)$.

Rõ ràng hàm sống $S(t)$ trong bảo hiểm nhân thọ chính là hàm tin cậy $R(t)$ trong lý thuyết độ tin cậy. Hơn nữa nguy cơ tử vong của một cá thể trong bảo hiểm nhân thọ chính là nguy cơ hư hỏng của một phần tử trong lý thuyết độ tin cậy.

Trong mục 3 tiếp theo đây ta sẽ ứng dụng lý thuyết độ tin cậy vào việc khảo sát nguy cơ tử vong của cá thể trong bài toán bảo hiểm nhân thọ.

3. NGUY CƠ TỬ VONG TRONG BẢO HIỂM NHÂN THỌ

Trong mục này ta xét hai bài toán có liên quan đến nguy cơ tử vong như sau.

3.1.Bài toán 3.1

Xét một cá thể mua bảo hiểm nhân thọ. Gọi thời điểm cá thể bắt đầu mua bảo hiểm là $t=0$. Giả sử cá thể ấy còn sống tới thời điểm t. Hãy tìm xác suất để cá thể ấy còn sống trong thời gian Δt kế tiếp.

Lời giải: Tương tự bài toán 5.1. trong [5], ta đặt $S(t,t+\Delta t)$ là xác suất cần tìm

Đặt $A=$ "Cá thể còn sống trong khoảng thời gian $[0,t]$"

$B=$ "Cá thể còn sống trong khoảng thời gian $\left[t,t+\Delta t\right]$"

Khi ấy: $S\left(t,t+\Delta t\right)=P(B/A)=\dfrac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$.

Do đó $F(t,t+\Delta t)=1-S(t,t+\Delta t)=\dfrac{S(t)-S(t+\Delta t)}{S(t)}=\dfrac{-[S(t+\Delta t)-S(t)]}{\Delta t}\dfrac{\Delta t}{S(t)}$. (1)

Sử dụng định nghĩa đạo hàm của hàm sống S(t), ta thấy :

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t)+\alpha(\Delta t)$$

Vậy từ (1) ta có:

$$F(t,t+\Delta t)=[-S'(t)+\alpha(\Delta t)].\frac{\Delta t}{S(t)}=-\frac{S(t)}{S'(t)}.\Delta t+\frac{\alpha(\Delta t).\Delta t}{S(t)}$$

$$=-\frac{S(t)}{S'(t)}.\Delta t+0(\Delta t)$$

Trong đó $\alpha(\Delta t)$ là vô cùng bé cùng bậc với Δt, tức là $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t)=0$.

Do đó $0(\Delta t)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δt, tức là $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{0(\Delta t)}{\Delta t}=0$.

Vì vậy, khi đặt $\lambda(t)=-\dfrac{S'(t)}{S(t)}$, ta được :

$$F(t,t+\Delta t)\approx\lambda(t)\Delta t$$

Do đó người ta còn gọi $\lambda(t)$ là nguy cơ tử vong tại thời điểm t của cá thể. Rõ ràng $\lambda(t)$ là xác suất để cá thể còn sống tới thời điểm t và có thể tử vong trong một đơn vị thời gian Δt kế tiếp. Nói cách khác $\lambda(t)$ là mật độ xác suất có điều kiện để cá thể tử vong tại thời điểm t, với điều kiện trước đó cá thể còn sống.

Bằng phương pháp tương tự như trong [5], ta có :

$$S(t,t+\Delta t)=\exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t}\lambda(x)dx\right\}$$

Và bài toán 3.1 đã giải quyết xong.

Như vậy vấn đề còn lại là phải xem xét tích phân $\int_{t}^{t+\Delta t}\lambda(x)dx$. Chú ý rằng $\lambda(t)$ chính là hàm mật độ xác suất có điều kiện liên quan đến đại lượng ngẫu nhiên T. Thông thường đại lượng T có thể là phân phối mũ, phân phối chuẩn, phân phối Poisson hoặc một phân phối xác suất nào đó.

Còn nếu ta không biết gì về T thì ta có thể dùng phương pháp xấp xỉ tích phân $\int_{t}^{t+\Delta t}\lambda(x)dx$ rồi từ đó suy ra hàm sống $S(t,t+\Delta t)$. Đó là nội dung của bài toán sau.

3.2.Bài toán 3.2

Hãy tính nguy cơ tử vong $\lambda(t)$ và suy ra hàm sống $S(t,t+\Delta t)$.

Lời giải: Trước hết ta xác định sơ bộ hàm $\lambda(t)$ dựa trên kết quả thực nghiệm. Giả sử ta quan sát N cá thể mua bảo hiểm nhân thọ và đếm số người tử vong. Gọi $n(t)$ là số người mua bảo hiểm nhân thọ còn sống cho tới trước thời điểm t.

Ta gọi $\dfrac{n(t)}{N}$ là hàm sống thực nghiệm của cá thể đang khảo sát.

Có thể thấy rằng $S(t)\approx\dfrac{n(t)}{N}$ (Xem [5], trang 76).

Do đó khi N đủ lớn và Δt đủ nhỏ, ta có :

$$\lambda(t)=-\frac{S'(t)}{S(t)}\approx\frac{S(t)-S(t+\Delta t)}{\Delta t.S(t)}\approx\frac{\dfrac{n(t)-n(t+\Delta t)}{N}}{\Delta t.\dfrac{n(t)}{N}}=\frac{\Delta n}{\Delta t.n(t)}$$

Trong đó Δn là số người tử vong trong khoảng thời gian $[t,t+\Delta t]$.

Như vậy, với Δt đủ nhỏ, ta có : $\lambda(t)=\dfrac{\Delta n}{\Delta t.n(t)}$.

Vì vậy dựa vào hàm $\lambda(t)$ có dạng như trên, ta có thể tính được hàm sống $S(t,t+\Delta t)$ dưới đây:

$$S(t,t+\Delta t)=\exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t}\lambda(x)dx\right\}$$

Bằng phương pháp xấp xỉ tích phân như [5] ta được :

$$S(t,t+\Delta t)=\exp\left\{-\int_{t}^{t+\Delta t}\lambda(x)dx\right\}\approx\exp\left\{-\frac{\Delta n}{n(t)}\right\}$$

Và bài toán 3.2 đã giải quyết xong.

Mặt khác ta có thể dùng phương pháp kiểm định giả thiết thống kê vào việc khảo sát khả năng tử vong trong bảo hiểm nhân thọ. Vấn đề này sẽ được trình bày ở mục 4 dưới đây.

4. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ TRONG BẢO HIỂM NHÂN THỌ

Như đã nêu qua ở mục 3, còn có một phương pháp khác để tiếp cận bài toán bảo hiểm nhân thọ. Đó là phương pháp kiểm định giả thuyết thống kê.

Để làm điều này ta xem xét một số lượng lớn những người mua bảo hiểm và đặt:

T = " Thời gian sống của những người mua bảo hiểm cho tới lúc tử vong".

Theo cách đặt này, thì đại lượng T ở đây khác với đại lượng T ở mục trước.

Bằng cách lấy số liệu(xem [7] và phần phụ lục) ta thấy T là một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị : T = {0,1,2,…,108}.

Chú ý rằng trong bài toán bảo hiểm, đại lượng Poisson thường được sử dụng (xem [3]). Nên ta sẽ đưa ra giả thuyết T có phân phối Poisson. Lúc đó ta có bài toán kiểm định và lời giải tối ưu như sau (xem [6]).

Bài toán

Giả thuyết H : T có phân phối Poisson

Đối thuyết K: T không có phân phối Poisson

Lời giải tối ưu của bài toán 4.1 có dạng:

$$\begin{cases}\text{Bác bỏ H} & : Q^2 > C\\ \text{Chấp nhận H} & : Q^2 \le C\end{cases}$$

Trong đó C tra từ bảng χ^2 và Q^2 tính theo công thức như sau

$$Q^2=\sum_{i=0}^{108}\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}=6.10^{32}$$

với $n_i'=n.p_i$. Cho mức ý nghĩa $\alpha=0.005$ và bậc tự do k – r -1 = 109 – 1 -1 = 107, tra bảng χ^2, ta được C = 140. Vậy Q^2 > C. Nên ta bác bỏ H, tức là đại lượng T không có phân phối Poisson.

Mặt khác dựa vào số liệu ta vẽ được đồ thị của số người tử vong (xem phần phụ lục)

Vậy xuất hiện một đại lượng ngẫu nhiên T liên quan tới bảo hiểm nhân thọ có phân phối chưa biết: Khảo sát đại lượng này sẽ là nội dung của bài báo tiếp theo.

ON THE RELIABILITY OF LIFE INSURRANCE PROBLEM

Ung Ngoc Quang, To Anh Dung
Nguyen Minh Hai, Nguyen Duc Phuong, Phan Trong Nghia
University of Natural Sciences, VNU-HCM

ABSTRACT: *In this paper, we applied the reliability theory in the life insurance problem.*

Keyword: *Reliability, life insurance, hypothesis testing.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Gerber H. *Life insurance mathematics*. Springer, (1997).

[2]. Ottaviani G. *Finacial Risk in insurance.* Springer, (1995).

[3]. Nguyễn Văn Thu, Trần Thu Hà. *Mô hình dự trữ ngẫu nhiên*. Kỷ yếu Trường Đông về Xác suất - Thống kê, Vinh, 26 – 28/12/2003.

[4]. Gnedenco B.V., Beliaev.IU.K, Xolovicv A.D. *Các phương pháp toán học trong lý thuyết độ tin cậy.* (Bản dịch tiếng Việt), Khoa học Kỹ thuật, (1981)(.

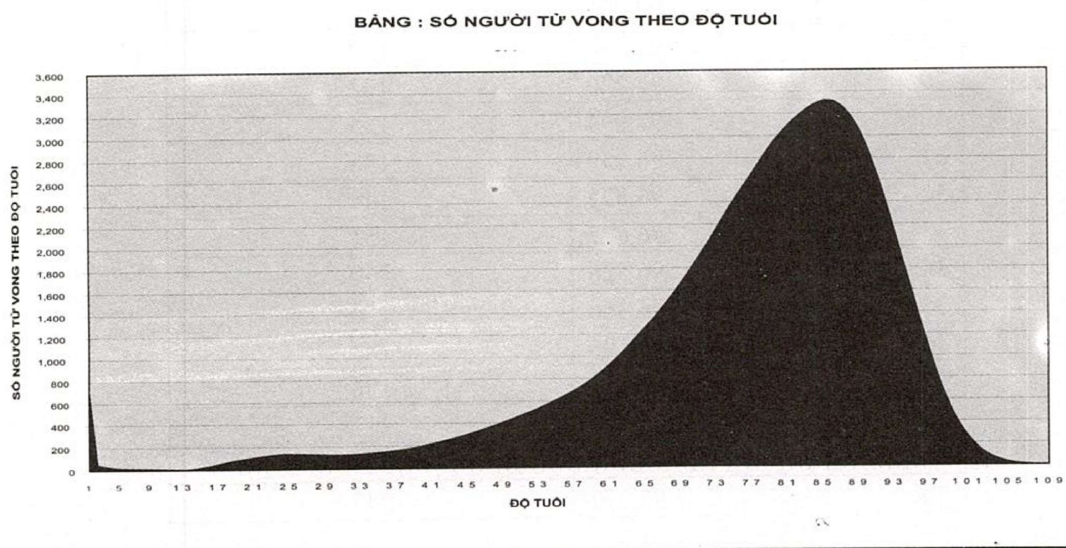
[5]. Ung ngọc Quang, Đặng Đông Triều, Dương Tôn Đảm, Tô Anh Dũng, Võ Minh Trí, Nguyễn Minh Hải. *Về độ tin cậy trong hệ thống phát thanh tin học hóa.* Tạp chí phát triển Khoa học và Công nghệ, tập 8, Số 9, (2005), 5 – 13.

[6]. Hoàng Hữu Như, Nguyễn Văn Hữu, Đào Hữu Hồ. *Thống kê Toán học*. Đại học và Trung học chuyên nghiệp, (1983).

[7]. Period Life Table; Website : http://www.ssa.gov/OACT/STATS/table4c6.html

PHỤ LỤC

Đồ thị số người tử vong theo độ tuổi.



Bảng số liệu (Period Life Table,Website: http://www.ssa.gov/OACT/STATS/table4c6.html)

Số người khảo sát là 100.000 người		
Tuổi		Số người tử vong ở độ tuổi t
0	100,000	764
1	99,236	53
2	99,183	35
3	99,148	27
4	99,121	23
5	99,098	20
6	99,078	18
7	99,060	17
8	99,043	15
9	99,028	13
10	99,015	11
11	99,004	11
12	98,993	18
13	98,975	29
14	98,946	46
15	98,900	63
16	98,837	80
17	98,757	95
18	98,662	108
19	98,554	117
20	98,437	127
21	98,310	136
22	98,174	142
23	98,032	142
24	97,890	139
25	97,751	135
26	97,616	131
27	97,485	129
28	97,356	130
29	97,226	132
30	97,094	135
31	96,959	138
32	96,821	144
33	96,677	151
34	96,526	160
35	96,366	170
36	96,196	183
37	96,013	196
38	95,817	211
39	95,606	229
40	95,377	247

41	95,130	267
42	94,863	289
43	94,574	312
44	94,262	338
45	93,924	366
46	93,558	394
47	93,164	425
48	92,739	454
49	92,285	484
50	91,801	518
51	91,283	555
52	90,728	593
53	90,135	633
54	89,502	674
55	88,828	720
56	88,108	772
57	87,336	829
58	86,507	896
59	85,611	969
60	84,642	1,050
61	83,592	1,136
62	82,456	1,224
63	81,232	1,312
64	79,920	1,402
65	78,518	1,500
66	77,018	1,605
67	75,413	1,717
68	73,696	1,834
69	71,862	1,954
70	69,908	2,085
71	67,823	2,219
72	65,604	2,349
73	63,255	2,469
74	60,786	2,584
75	58,202	2,707
76	55,495	2,830
77	52,665	2,943
78	49,722	3,038
79	46,684	3,120
80	43,564	3,192
81	40,372	3,253
82	37,119	3,298
83	33,821	3,323
84	30,498	3,315
85	27,183	3,267
86	23,916	3,173

87	20,743	3,031
88	17,712	2,845
89	14,867	2,617
90	12,250	2,360
91	9,890	2,079
92	7,811	1,789
93	6,022	1,498
94	4,524	1,220
95	3,304	960
96	2,344	729
97	1,615	534
98	1,081	378
99	703	258
100	445	172
101	273	110
102	163	69
103	94	42
104	52	24
105	28	14
106	14	7
107	7	4
108	3	3