

## ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI GALERKIN CHO BÀI TOÁN UỐN TẮM

Ngô Thành Phong, Vũ Đỗ Huy Cường

Trường Đại Học Khoa Học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 29 tháng 03 năm 2007, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 05 tháng 06 năm 2008)

**TÓM TẮT:** Nội dung của báo cáo là giới thiệu Phương pháp phần tử tự do Galerkin (PP PTTDG), Thuật toán của PP PTTDG cho bài toán uốn tấm và các kết quả số. Phần giới thiệu sẽ trình bày cụ thể thuật toán tổng quát của PPKL. Tiếp theo trình bày PP PTTDG cho bài toán uốn tấm tổng quát và đưa ra sơ đồ khối của thuật toán. Cuối cùng là kết quả giải số cho một số bài toán uốn tấm đơn giản như tấm hình vuông tựa tự do, tấm tròn ngàm chu tuyến với lực phân bố đều. Kết quả được so sánh với nghiệm giải tích để đánh giá.

**Từ khóa:** Phương pháp Không lưới, Phần tử tự do Galerkin, Miền giá đỡ, Tấm, độ võng

### 1. GIỚI THIỆU PP PTTDG

Trong việc giải các bài toán cơ học hiện nay, có rất nhiều phương pháp số được sử dụng và đã cho kết quả rất tốt. Một trong những phương pháp mới nhất và có nhiều ưu điểm hơn các phương pháp khác chính là phương pháp không lưới. Ưu điểm của PPKL cũng giống như tên gọi của nó, chính là không xây dựng nên các mắt lưới, hay còn gọi là các phần tử.

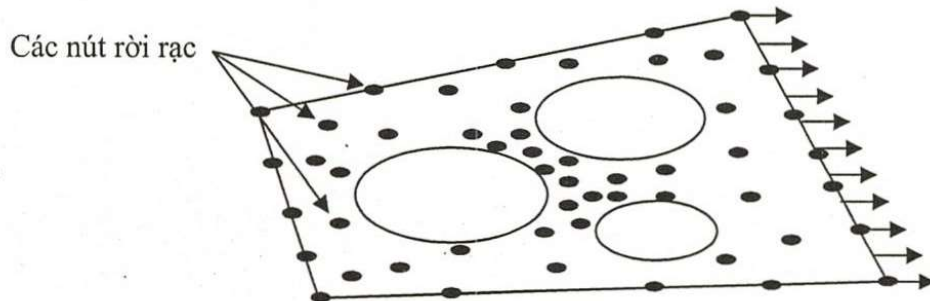
PPKL cũng được dùng để thiết lập hệ phương trình đại số cho toàn miền bài toán nhưng không phân lưới. PPKL dùng tập các nút rời rạc nằm trong miền bài toán cũng như trên biên để biểu diễn mà không rời rạc miền bài toán. Chính vì thế, nên ta có thể chủ động phân bố các nút rời rạc theo cách của mình một cách tùy ý. Khi một bài toán vừa được giải xong, nếu thấy chưa ưng ý ta có thể cho thêm hoặc rút bớt một số nút mà không ảnh hưởng nhiều đến quá trình thực hiện. Thông thường người ta tập trung nhiều nút ở các vị trí có ứng suất hoặc biến dạng lớn để cho được kết quả chính xác nhất.

#### 1.1. Thuật toán của PPKL [1]

Thuật toán PPKL có thể chia thành 4 bước như sau:

a) Biểu diễn miền bài toán:

Lấy ví dụ cần giải quyết một bài toán về cấu trúc vật rắn. Ta sẽ biểu diễn miền bài toán bằng tập hợp các nút rời rạc trong tấm và trên biên của nó. Mật độ của các nút này thì không đồng đều: ở những nơi có biến dạng lớn thì sẽ tập trung nhiều nút. Bởi vì mật độ của các nút có tham gia vào thuật toán của PPKL, nó sẽ góp phần làm cho nghiệm bài toán được chính xác hơn.



Hình 1. Biểu diễn một cấu trúc vật rắn bằng tập các nút rời rạc theo PPKL

b) *Xây dựng chuyển vị – Xây dựng hàm dạng:*

Vì không có phần tử sử dụng trong PPKL, cho nên để nội suy một giá trị  $u$  tại điểm  $x = (x, y)$  ta phải xây dựng một miền, gọi là miền giá đỡ, tại điểm  $x$  đó để nội suy  $u$

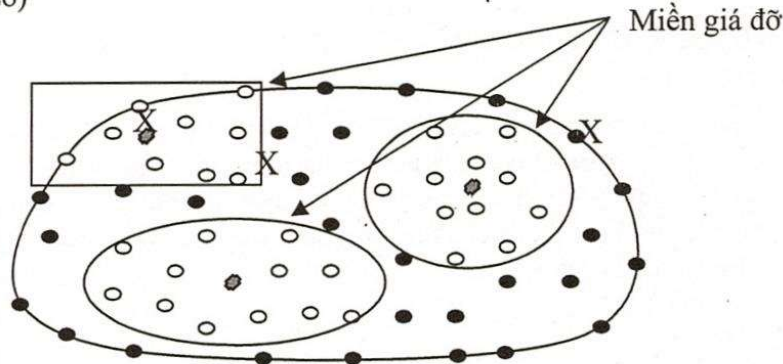
$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i$$

với  $n$  là tổng số nút trong miền giá đỡ.

$u_i$  là giá trị của các nút trong miền giá đỡ.

$\phi_i$  là hàm dạng (shape function) của nút thứ  $i$ .

Ta nói rõ khái niệm miền giá đỡ: miền giá đỡ của điểm  $x$  cho ta biết các nút nằm trong nó, từ đó ta có thể xấp xỉ được các giá trị tại  $x$ . miền giá đỡ có thể có trọng số được cho bởi hàm trọng số. Hàm trọng số này có kích thước và hình dạng khác nhau tùy theo vị trí điểm  $x$ . Thông thường miền giá đỡ có dạng tròn hoặc chữ nhật. (Miền giá đỡ cũng chính là tập xác định của hàm trọng số)



Hình 2. Miền giá đỡ của các nút X và các nút rời rạc nằm trong nó. Miền giá đỡ có thể là hình tròn, elip hoặc chữ nhật.

c) *Thành lập hệ phương trình:*

Xuất phát từ dạng mạnh hoặc dạng yếu của bài toán cùng với các hàm dạng vừa thành lập, ta sẽ tìm được những phương trình rời rạc. Những phương trình này thường được viết trong dạng ma trận và được tập hợp lại thành ma trận toàn cục trên toàn miền bài toán.

d) *Giải hệ phương trình toàn cục:*

Đối với bài toán tĩnh, thông thường kết quả của bước trên là 1 hệ phương trình đại số tuyến tính và ta giải bằng các phương pháp quen thuộc như khử Gauss, phân tích LU...

## 1.2. Miền giá đỡ và Miền ảnh hưởng

Ở phần này, ta sẽ nói rõ hơn về miền giá đỡ (support domain) và miền ảnh hưởng (influence domain).

Miền giá đỡ sử dụng rất tốt khi mật độ nút không quá nhiều. Tuy nhiên trong thực tế có nhiều bài toán cần mật độ nút lớn như bài toán ứng suất suy biến. Dùng miền giá đỡ dựa trên các nút hiện hành tại điểm đó có thể dẫn đến việc mất cân bằng trong việc lựa chọn các nút xây dựng hàm dạng. Để tránh trường hợp này, khái niệm miền ảnh hưởng của một nút được sử dụng.

Miền ảnh hưởng là một miền mà 1 nút có ảnh hưởng ở đó. Nó đi liền với nút, ngược lại với miền giá đỡ đi liền với một điểm không nhất thiết là một nút. Dùng miền ảnh hưởng là một cách khác để chọn nút cho việc nội suy, và nó vẫn tốt cho các nút phân bố không đều. Miền



ảnh hưởng được xác định cho mỗi nút trong miền bài toán, và nó có thể khác nhau từ nút này sang nút khác. Kích thước của miền ảnh hưởng cũng được xác định như của miền giá đỡ.

Để xác định kích thước  $d_s$  của miền giá đỡ, người ta dùng công thức sau:

$$d_s = \alpha_s d_c$$

trong đó  $\alpha_s$  là hệ số của miền giá đỡ, thông thường  $\alpha_s$  nằm trong khoảng từ 2.0 đến 3.0  $d_c$  là đại lượng đặc trưng cho khoảng cách giữa các nút. Nếu các nút được phân bố đều,  $d_c$  đơn giản là khoảng cách giữa hai nút, ngược lại  $d_c$  là “kích thước trung bình” trong miền giá đỡ. Ta có thể tính  $d_c$  bằng cách ước lượng như sau:

Đối với 1D,  $d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)}$  với  $D_s$  là 1 ước lượng của  $d_s$  và  $n_{D_s}$  là số nút nằm trong miền có kích thước  $D_s$ . Tương tự đối với 2D và 3D.

### 1.3. Hàm trọng số và Hàm dạng [1],[3],[4]

a) Hàm trọng số:

Hàm trọng số đóng một vai trò rất quan trọng trong việc xây dựng hàm dạng: Nó giúp cho trọng số thặng dư (Weighted Residual) tại những điểm khác nhau trong miền giá đỡ sẽ khác nhau: nút ở gần sẽ “nặng” hơn, nút ở xa sẽ “nhẹ” hơn. Ngoài ra nó còn bảo đảm các nút khi rời hoặc vào miền giá đỡ (khi x di chuyển) thì hàm trọng số thặng dư vẫn liên tục. Sau đây là một số hàm trọng số thông dụng:

Hàm trọng số bậc ba

$$\widehat{W}(x - x_i) \equiv \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{khi } \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & 1 < \bar{d} \end{cases}$$

Hàm trọng số bậc bốn

$$\widehat{W}(x - x_i) \equiv \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{khi } 1 < \bar{d} \end{cases}$$

Trong các phương trình trên,  $\bar{d}$  được xác định như sau  $\bar{d} = \frac{|x - x_i|}{d_w} = \frac{d}{d_w}$  với  $d_w$  chính là

kích thước của miền ảnh hưởng.

b) Xây dựng Hàm dạng bằng PP BPTT:

Đặt  $u(x)$  là hàm của trường biến trên miền  $\Omega$ . Xấp xỉ của  $u(x)$  tại điểm x là được xây dựng từ 1 tập n giá trị nút trong trường hàm  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tại n nút  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nằm trong miền giá đỡ của x:

$$u^h(x) = u^h(x, x_i) = \sum_j^m p_j(x_i) a_j(x) = p^T(x_i) a(x) \quad (1)$$

với  $m$  là bậc của đa thức  $p$ .

Hàm trọng số thặng dư (Weighted Residual) được xây dựng bằng cách xấp xỉ giá trị của trường hàm và các tham số nút  $u_i = u(x_i)$ :

$$J = \sum_i^n \widehat{W}(x-x_i) [u^h(x, x_i) - u(x_i)]^2$$

$$= \sum_i^n \widehat{W}(x-x_i) [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2$$

với  $u_i$  là tham số nút của trường biến tại nút  $i$ ,  $\widehat{W}(x-x_i)$  là hàm trọng số. Để đơn giản ta viết  $\widehat{W}_i(x)$  thay cho  $\widehat{W}(x-x_i)$ .

Theo PP BPTT, tại bất kì điểm  $x$  nào,  $a(x)$  được chọn sao cho hàm  $J$  tối thiểu. Nghĩa là  $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$ . Điều này cho ta hệ phương trình tuyến tính như sau

$$A(x)a(x) = B(x)U_s$$

với  $A(x)$  là ma trận moment trọng số cho bởi:  $A(x) = \sum_i^n \widehat{W}_i(x) p(x_i) p^T(x_i)$

còn ma trận  $B(x)$  có dạng:  $B(x) = [B_1, B_2, \dots, B_n]$  với  $B_i = \widehat{W}_i(x) p(x_i)$

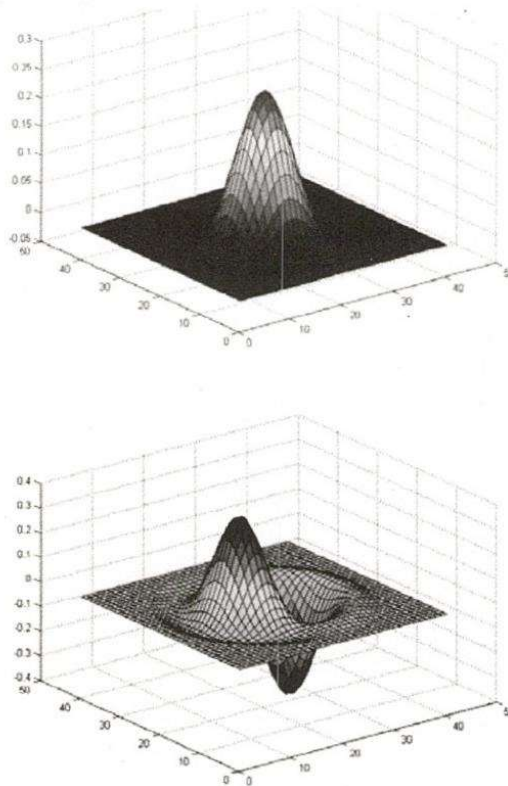
và  $U_s$  là vec tơ chứa các nút nằm trong miền giá đỡ  $U_s = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

Giải phương trình trên, ta được:  $a(x) = A^{-1}(x)B(x)U_s$ . Thay vào phương trình (1), ta được:

$$u^h(x) = \sum_j^m \sum_j^n p_j(x) (A^{-1}(x)B(x))_{ji} u_i$$

So sánh với phương trình (1.1), ta rút ra được hàm dạng cần tìm.

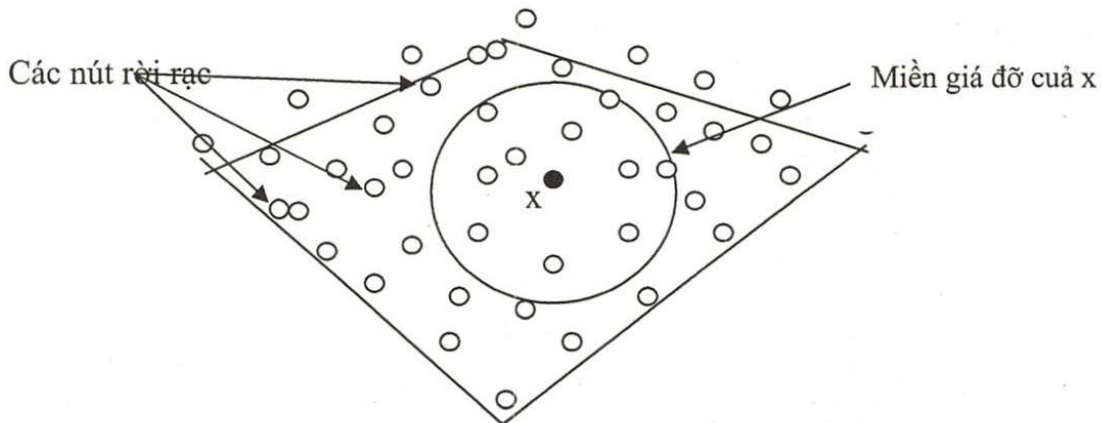
$$\phi_i(x) = \sum_j^m p_j(x) (A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T A^{-1} B_i$$



Hình 3. Hàm dạng và đạo hàm bậc nhất của hàm dạng sử dụng hàm trọng số bậc ba.

## 2.ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ TỰ DO GALERKIN CHO BÀI TOÁN TẮM [1],[2],[5],[6]

Xét 1 tấm như trong hình vẽ. Tấm được biểu diễn bằng mặt trung hoà của tấm. Chuyển vị của tấm theo phương  $x, y, z$  ( trong toạ độ Decarte ) được kí hiệu lần lượt là  $u, v, w$ . Dựa theo giả thuyết Kirchhoff về tấm mỏng, độ võng  $w(x)$  của mặt trung hoà tại điểm  $x$  có thể xem là biến độc lập, và hai chuyển vị còn lại được biểu diễn qua  $w(x)$ .



Hình 4. Xây dựng các nút rời rạc biểu diễn tấm



Tấm được biểu diễn bằng tập các nút đặt rải rác trên miền tấm. Vì không có phần tử sử dụng trong PPKL, cho nên để nội suy giá trị  $w$  tại điểm  $x$  ta phải xây dựng một miền, gọi là miền giá đỡ ( support domain ), tại điểm  $x$  đó để nội suy  $w$

Độ võng của tấm được xấp xỉ dùng các tham số là độ võng các nút  $w_i$  :

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)w_i$$

với  $n$  là tổng số nút trong miền giá đỡ,  $w_i$  là giá trị của các nút trong miền giá đỡ,  $\phi_i$  là hàm dạng (shape function) của nút thứ  $i$ .

Dạng yếu Galerkin cho bài toán uốn tấm được cho bởi phương trình :

$$\int_A \delta \varepsilon_p^T \sigma_p dA - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{S_i} \delta u^T \bar{t} dS - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (\omega - \bar{\omega}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \omega^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (2)$$

với  $\Omega$  là thể tích của tấm,  $A$  là diện tích của tấm,  $S_i$  là bề mặt của cạnh tấm trên biên tự nhiên,  $\Gamma_u$  là phần biên chính,  $\varepsilon_p$  là pseudo-strain,  $\sigma_p$  là pseudo-stress,  $b$  là vec tơ lực khối,  $\bar{t}$  là vec tơ lực trên biên,  $u$  là vec tơ chuyển dịch,  $\omega, \bar{\omega}$  lần lượt là vec tơ độ võng xấp xỉ, vec tơ độ võng cho trước và  $\lambda$  là nhân tử Lagrange

Trong phương trình trên, số hạng đầu thể hiện công ảo của nội lực trong tấm, số hạng thứ hai thể hiện lực khối trên toàn tấm, số hạng thứ ba là công ảo thực hiện do công của lực trên biên tự nhiên và hai số hạng cuối cùng tính đến điều kiện biên.

Ta lần lượt tìm được

$$\delta \varepsilon_p^T \sigma_p = \begin{pmatrix} \partial w_1 \\ \vdots \\ \partial w_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Ma trận độ cứng  $K$  có kích thước  $(n \times n)$ .

$$\delta u^T b = \begin{pmatrix} \partial w_1 \\ \vdots \\ \partial w_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_1^b \\ \vdots \\ F_n^b \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \delta u^T \bar{t} = \begin{pmatrix} \partial w_1 \\ \vdots \\ \partial w_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_1^t \\ \vdots \\ F_n^t \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Vecto cột  $F = F^b + F^t$  kích thước là  $(n \times 1)$

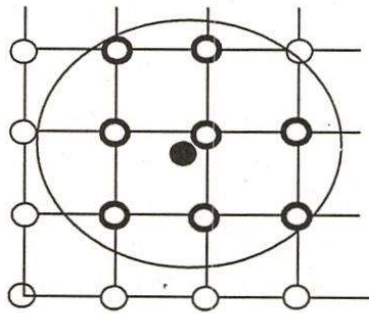
$$\delta \lambda^T \omega = \begin{pmatrix} \partial \lambda_1 \\ \vdots \\ \partial \lambda_l \\ \vdots \\ \partial \lambda_l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} G'_{11} & \dots & G'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G'_{l1} & \dots & G'_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G'_{2l1} & \dots & G'_{2ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ma trận  $G'$  có kích thước là  $(2l \times n)$

$$\delta \lambda^T \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \partial \lambda_1 \\ \vdots \\ \partial \lambda_l \\ \partial \lambda_1 \\ \vdots \\ \partial \lambda_l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \bar{w}_1 + \dots + q_{1n} \bar{w}_n \\ \vdots \\ q_{l1} \bar{w}_1 + \dots + q_{ln} \bar{w}_n \\ q_{l+1,1} \bar{w}_1 + \dots + q_{l+1,n} \bar{w}_n \\ \vdots \\ q_{2l,1} \bar{w}_1 + \dots + q_{2l,n} \bar{w}_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ma trận q có kích thước (2l x 1)

Mỗi một ma trận vừa tìm được chỉ ứng với một điểm nằm trong ô tích phân. Vì vậy số nút rời rạc xuất hiện trong từng số hạng trên là có giới hạn. Tuy nhiên khi ta lấy tích phân trên cả miền bài toán thì tất cả các nút rời rạc đều tham gia vào hệ phương trình đại số.

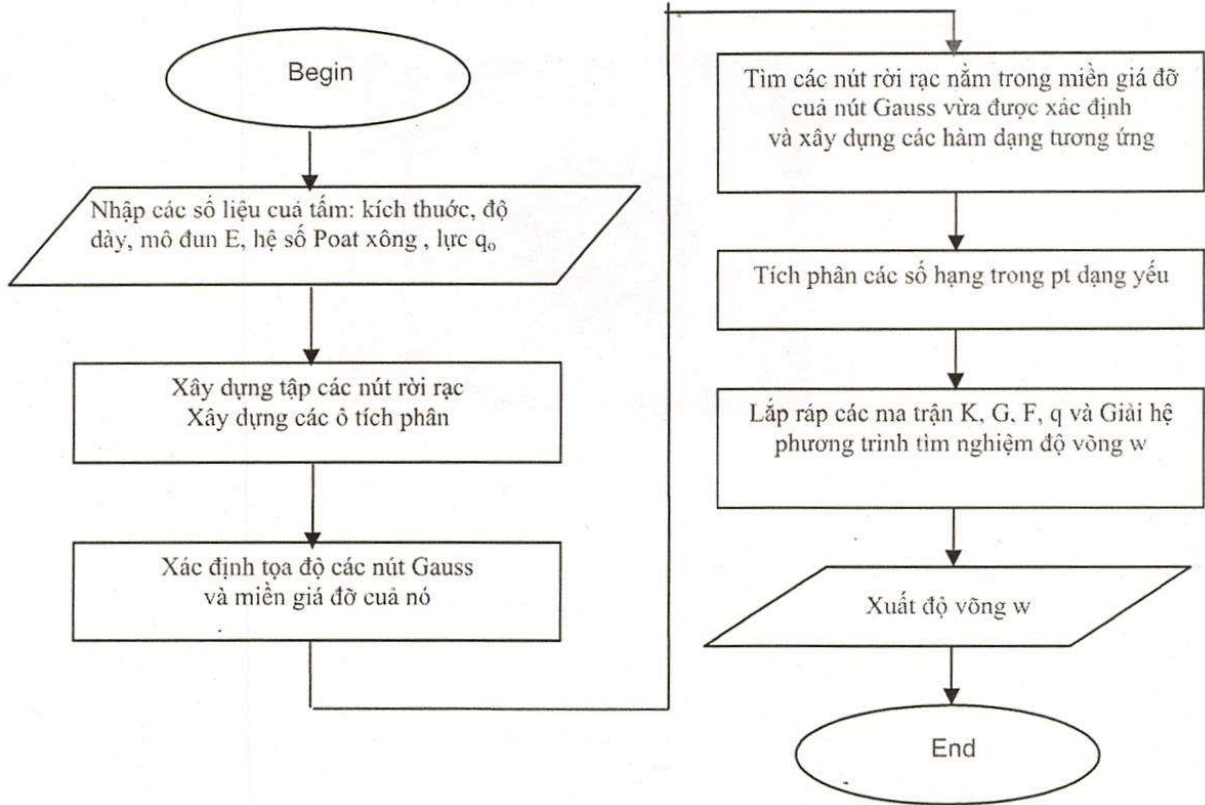


Hình 5. Số nút rời rạc ứng với một điểm nằm trong một ô tích phân

Sau khi có được các số hạng đã rời rạc, ta sẽ tích phân chúng lên và lắp ráp vào ma trận toàn cục như sau:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ q \end{bmatrix}$$

Với K, G ( $G' = G^T$ ), F, q được xây dựng trong phương trình (2.1), (2.2), (2.3), (2.4). Giải hệ trên ta sẽ tìm được độ võng w của các nút rời rạc.



Hình 6. Sơ đồ khối của bài toán tìm độ võng của tấm bị uốn

### 3. KẾT QUẢ SỐ

*Bài toán 1:* Cho tấm hình vuông có chiều dài  $a = 2$  mét, chiều cao  $h = 0.04$  mét, mô đun Young  $E = 2.10^9$  Niuton/met<sup>2</sup>, hệ số Poatxông  $\nu = 0.3$ . tấm được tựa tự do trên các biên và chịu tác dụng của lực phân bố đều  $q_0 = 100$  N/m<sup>2</sup>.

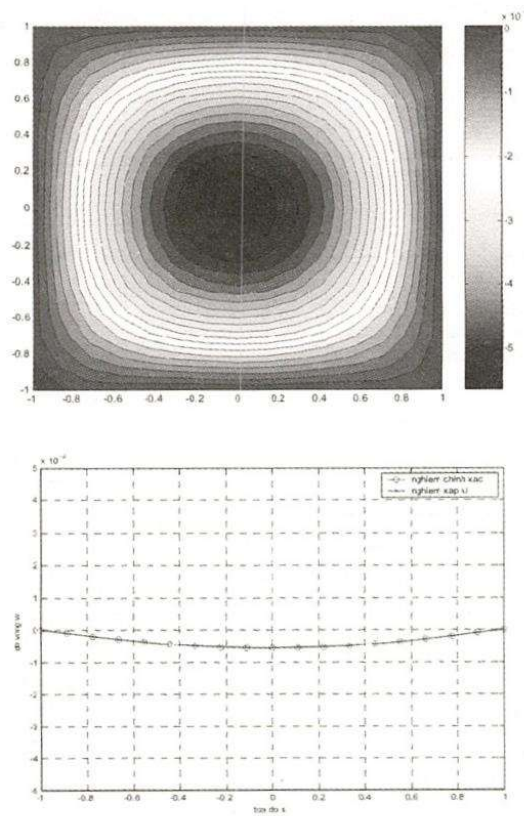
Nghiệm chính xác của độ võng theo phương pháp Bubnov-Galerkin cho bởi công thức sau:  $w(x, y) = C_1 \frac{q_0 a^4}{D} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$

với  $D$  là độ cứng tấm khi uốn  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  và  $C_1 = \frac{4}{\pi^6} = 0.00416 = 4,16.10^{-3}$

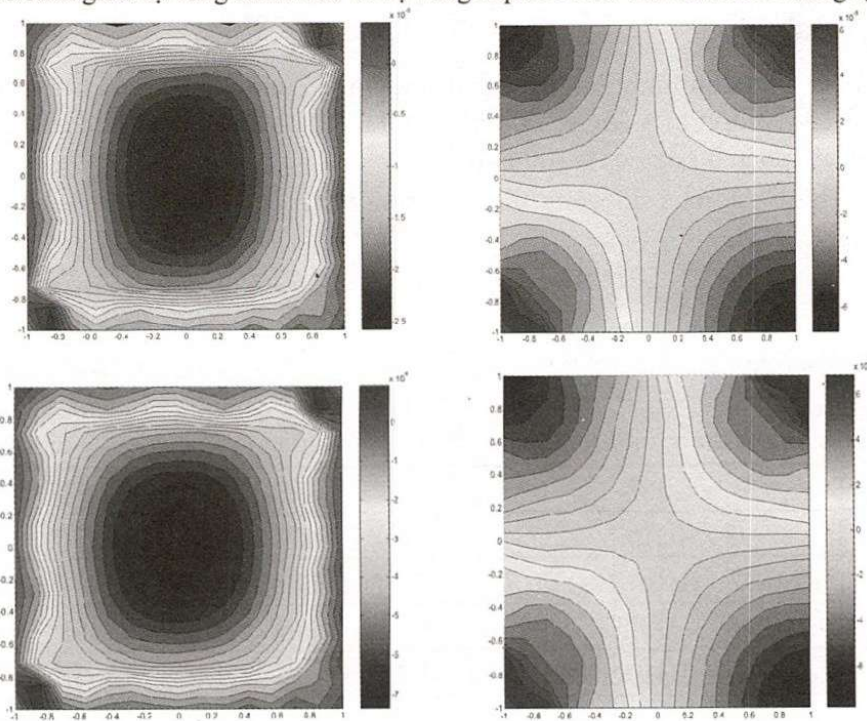
Giá trị độ võng ( đơn vị mm) chính xác ( $W_{cx}$ ) và xấp xỉ ( $W_{xx}$ ) tại tọa độ  $x$  là:

x	-1	-0.875	-0.75	-0.625	-0.5	-0.375	-0.25	-0.125	0
$W_{cx}$	0	-0.1108	-0.21734	-0.31552	-0.40159	-0.47222	-0.5247	-0.55702	-0.56793
$W_{xx}$	-0.00237	-0.11657	-0.22607	-0.32449	-0.4085	-0.47566	-0.52448	-0.55402	-0.56384
x	1	0.875	0.75	0.625	0.5	0.375	0.25	0.125	
$W_{cx}$	0	-0.1108	-0.21734	-0.31552	-0.40159	-0.47222	-0.5247	-0.55702	
$W_{xx}$	-0.00188	-0.1159	-0.22545	-0.32375	-0.40782	-0.47504	-0.52403	-0.55377	





Hình 7. So sánh giữa độ võng chính xác và độ võng xấp xỉ PPKL của tấm hình vuông tựa tự do



Hình 8. Biến dạng  $\epsilon_{yy}$  và  $\gamma_{xy}$  và ứng suất  $\sigma_{yy}$  và  $\tau_{xy}$  của mặt trên của tấm vuông

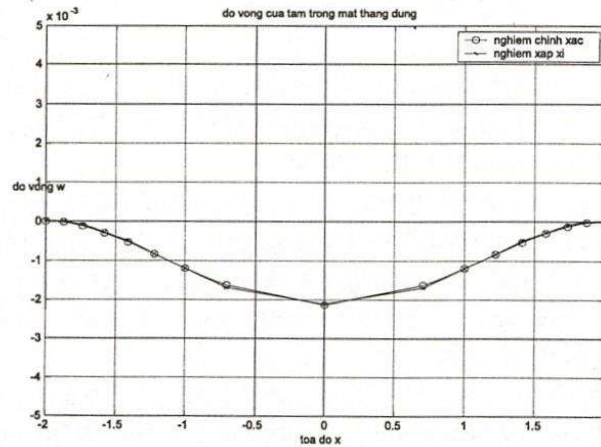
Bài toán 2: Cho tấm hình tròn có bán kính  $R = 2$  mét, chiều cao  $h = 0.04$  mét, mô đun Young  $E = 2.109$  Niuton/met<sup>2</sup>, hệ số Poatxông  $\nu = 0.3$ . Tấm được ngàm trên chu tuyến và chịu tác dụng của lực phân bố đều  $q = 100$  N/m<sup>2</sup>.

Nghiệm chính xác của độ võng được cho bởi công thức sau:

$$w(r) = C_2 \frac{q_0}{D} (R^2 - r^2)^2 \quad \text{với } C_2 = 0.015625$$

Giá trị độ võng (đơn vị mm) chính xác ( $W_{cx}$ ) và xấp xỉ ( $W_{xx}$ ) tại tọa độ  $x$  là:

$x$	-2	-1.82574	-1.63299	-1.41421	-1.1547	-0.8165	0
$W_{cx}$	0	-0.05924	-0.23698	-0.5332	-0.94792	-1.48112	-2.13281
$W_{xx}$	0.008708	-0.03471	-0.20851	-0.52297	-0.92333	-1.51848	-2.0334
$x$	2	1.825742	1.632993	1.414214	1.154701	0.816497	
$W_{cx}$	0	-0.05924	-0.23698	-0.5332	-0.94792	-1.48112	
$W_{xx}$	0.010672	-0.03492	-0.20821	-0.52305	-0.92328	-1.51851	



Hình 9. So sánh giữa độ võng chính xác và độ võng xấp xỉ PPKL của tấm hình tròn ngàm chu tuyến

**Kết luận:** Kết quả cho thấy nghiệm xấp xỉ của PPKL Phần tử tự do Galerkin rất gần với nghiệm chính xác. PPKL còn phù hợp với các miền bài toán khác nhau mà không gặp phải những khó khăn như các phương pháp khác.



## APPLICATION OF GALERKIN MESHLESS METHOD FOR BENDING PLATE PROBLEMS

Ngo Thanh Phong, Vu Do Huy Cuong  
University of Natural Sciences, VNU-HCM

*ABSTRACT: This paper introduces Meshless Method: Element Free Galerkin with Lagrange multipliers applying for plate problems, the algorithm of it and numerical examples. The first presents algorithm of Meshless Method. The second talks about algorithm of Element Free Galerkin Method for plate problem. The last is numerical examples for some simple plates: Uniformly Loaded Simply Supported Square Plate and Clamped Circle Plate. The results are compared with analytical results.*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. G.R.Liu, *Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method*, CRC Press (2002).
- [2]. Đào Huy Bích, *Lý thuyết Đàn hồi*, NXB ĐHQG Hà Nội (2002).
- [3]. Bùi Quốc Tính, *Application of the element free Galerkin method for dual analysis*, Thesis Master of Science EMMC (2005).
- [4]. Ngô Thành Phong, Bùi Quốc Tính, *Ap dụng phương pháp meshless cho bài toán ứng suất phẳng*, Tạp chí Phát triển Khoa học & Công nghệ Tập 8 tháng 10 năm 2005.
- [5]. J. Sladek, V. Sladek and H.A Mang, *Meshless formulations for simple supported and clamped plate problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering; 55:359-375,(2002).
- [6]. T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, *Meshless methods - an overview and recent developments*, Computer methods in applied mechanics and engineering 139, 33-47, (1996).