XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CHO THAM ẨN HỖN HỢP TRONG MÔ HÌNH PHI TUYẾN 2-CHIỀU

Ung Ngọc Quang
Trường Đại học khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 02 tháng 07 năm 2007, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 05 tháng 05 năm 2008)

TÓM TẮT: *Trong bài này, tác giả tìm xấp xỉ cho ước lượng Bayes của tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai trong mô hình phi tuyến 2-chiều. Dựa trên các kết quả đó, tác giả đưa ra xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn hỗn hợp bằng hàm đa thức.*
Từ khóa: *Ước lượng Bayes, tham ẩn hỗn hợp, mô hình phi tuyến 2 – chiều, hàm đa thức.*

1. MỞ ĐẦU

Ước lượng Bayes là vấn đề cập nhật và thời sự hiện nay trong thống kê và đã được tiếp cận theo nhiều hướng khác nhau (xem [1], [2], [3]).

Tác giả bài này tiếp cận bài toán ước lượng Bayes bằng công cụ và phương pháp giải tích hàm (xem [4] – [10]). Trong đó, vấn đề tồn tại ước lượng Bayes đối với các mô hình phi tuyến khác nhau đã được khảo sát ở các bài [4] – [7]. Còn vấn đề xấp xỉ ước lượng Bayes đối với các tham ẩn định vị, phương sai và hỗn hợp trong mô hình 1-chiều đã được khảo sát ở các bài [8] – [10].

Liên tục theo hướng trên, bài này sẽ khảo sát xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn hỗn hợp đối với lớp các ước lượng bị chặn trong mô hình phi tuyến 2-chiều.

Trước hết tác giả trình bày xấp xỉ ước lượng cho tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai. Sau đó ứng dụng các kết quả ấy cho tham ẩn hỗn hợp.

2. XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CHO THAM ẨN ĐỊNH VỊ TRONG MÔ HÌNH PHI TUYẾN 2-CHIỀU.

Xét mô hình hồi qui phi tuyến 2-chiều có dạng: $X = \varphi(\theta) + \varepsilon$

Trong đó:

X : vectơ quan trắc ngẫu nhiên 2-chiều có trị trong không gian R^2

ε : vectơ sai ngẫu nhiên 2-chiều có trị trong không gian R^2

θ : tham ẩn định vị và $\theta \in \Theta$

Θ : tập hợp compắc trong không gian R^r

φ : hàm phi tuyến cho trước, $\varphi : \Theta \to R^2$

Ánh xạ Borel đo được $h : R^2 \to R^r$ gọi là ước lượng của tham ẩn định vị

Tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn của tham ẩn định vị θ tạo thành một không gian Banach và kí hiệu là $B(R^2; R^r)$. Tương tự như trong bài [2], phiếm hàm

$\Psi : B\left(R^2; R^r\right) \to \overline{R}^+$

được xác định bởi hệ thức $\Psi(h)=\int_{\Theta}\int_{R^2} L\big(h(x),\theta\big) f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$ gọi là hàm mạo hiểm Bayes với phân phối xác suất tiên nghiệm τ trên không gian tham Θ. Nhắc lại rằng $L\big(h(x),\theta\big)$ được gọi là hàm tổn thất , $f_\theta(x)$ gọi là hàm mật độ có điều kiện chính qui và ø μ là độ đo Lebesgue trên R^2 (xem [2])

Ước lượng $\hat{h}\in B\left(R^2;R^r\right)$ gọi là ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\theta\in\Theta$ với phân phối tiên nghiệm τ nếu

$$\Psi\left(\hat{h}\right)=\inf_{h\in B\left(R^2;R^r\right)}\Psi(h)$$

Tương tự như trong bài [5] ta có định lí về sự tồn tại ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị

Định lí 1.1: Cho K là tập các ước lượng của tham ẩn định vị $\theta\in\Theta$ và thoả các điều kiện:

i. $h\left(R^2\right)\subset\Theta, \forall h\in K$

ii. $\forall\varepsilon>0, \exists$ phân hoạch $\{E_i\}_{i=1}^m\subset R^2$ và các điểm $x_i\in E_i, i=\overline{1,m}$

sao cho:

$$\sup_{x\in E_i}\left\|h(x)-h(x_i)\right\|<\varepsilon, \forall h\in K, \forall i=\overline{1,m}$$

iii.Tồn tại $C>0$ sao cho:

$$\left|L(y',\theta)-L(y'',\theta)\right|\le C\left\|y'-y''\right\|_{R^r}, \forall y',y''\in R^r, \forall\theta\in\Theta$$

Khi ấy K là tập compăc tương đối trong $B\left(R^2,R^r\right)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes.

Tiếp theo, để xét bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị, ta đưa thêm một số giả thiết và kí hiệu. Giảsử tập trị của véctơ quan trắc ngẫu nhiên 2-chiều X là tập compắc $I\subset R^2$. Không gian tất cả các hàm bị chặn, xác định trên I, có trị trong R^r, ký hiệu là B(I) . Không gian các hàm liên tục, xác định trên I, có trị trong R^r, kí hiệu là C(I). Hiển nhiên B(I), C(I) là các không gian Banach và $C(I)\subset B(I)$.

Định lí 1.2: Giả sử tập K các ước lượng của tham ẩn định vị $\theta\in\Theta$ thoả các điều kiện của định lí 1.1. Giả sử hàm $f_\theta(x)$ bị chặn đều. Khi ấy có thể xây dựng được một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes .

Chứng minh : Trước hết, theo định lí 1.1, tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$.

Theo giả thuyết $\exists C':\left|f_\theta(x)\right|\le C', \forall x\in I, \forall\theta\in\Theta$

Tiếp theo lấy ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$. Khi ấy $\exists C''>0$ sao cho:

$$\left\|\hat{h}(x)\right\|_{R^r} = \sum_{j=1}^{r}\left|\hat{h}_j(x)\right| \le C'', \hat{h}(x) = \left(\hat{h}_1(x)\hat{h}_2(x),...,\hat{h}_r(x)\right)$$

Trong đó các hàm $\hat{h}_j, j=\overline{1,r}$ là đo được bị chặn , xác định trên I, có trị trong R.

Theo định lí Lusin, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại các hàm $g_j, j=\overline{1,r}$ liên tục, xác định trên I sao cho:

$$\mu\left\{x \in I : \hat{h}_j(x) \ne g_j(x)\right\} < \frac{\varepsilon}{4.r.C.C'.C''}$$

với μ là độ đo Lebesgue trên R^2

Đặt $g=(g_1, g_2, ..., g_r)$. Ta thấy $\hat{h}(x) \ne g(x)$ khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một j sao cho: $\hat{h}_j(x) \ne g_j(x)$.

Hơn nữa $\left\|g(x)\right\|_{R^r} \le C''$

Vậy nên, nếu đặt

$$A = \left\{\hat{h}(x) \ne g(x)\right\}, A_j = \left\{\hat{h}_j(x) \ne g_j(x)\right\}, j=\overline{1,r}$$

ta sẽ có: $A = \bigcup_{j=1}^{r} A_j$

Suy ra : $\mu(A) \le \sum_{j=1}^{r}\mu(A_j) < \frac{\varepsilon}{4.C.C'.C''}$

Với A như trên, theo định nghĩa của hàm mạo hiểm Bayes, ta có :

$$\left|\Psi(\hat{h}) - \Psi(g)\right| \le \iint_{\Theta I}\left|L(h(x),\theta) - L(g(x),\theta)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \iint_{\Theta A} C\left\|\hat{h}(x) - g(x)\right\| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) + \int_{\Theta}\int_{I-A} C\left\|\hat{h}(x) - g(x)\right\| f_\sigma(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$= \iint_{\Theta A} C\left\|\hat{h}(x) - g(x)\right\| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ và với các hàm liên tục $g_j, j=\overline{1,r}$ như trên, theo định lí xấp xỉ Weierstrass cho hàm nhiều biến, sẽ tồn tại các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}(x_1,x_2)$ sao cho

$$\left\|g_j - P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\right\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2.r.C}, \forall j=\overline{1,r}$$

Trong đó, các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}$ có bậc $n_1+n_2=(n_1+n_2)(\hat{h},\varepsilon)$

và có hệ số : $\hat{a}^j = \left(\hat{a}^j_{ks}\right) \in M\left((n_1+1)(n_2+1)\right)$,

với $M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)$ là không gian các ma trận cấp $(n_1+1)\times(n_2+1)$ và

$k=\overline{0,n_1}; s=\overline{0,n_2}$.

Ký hiệu họ đa thức :

$\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}^1}, P_{n_1+n_2,\hat{a}^2},\dots,P_{n_1+n_2,\hat{a}^r}\right)=P_{n_1+n_2,\hat{a}}$,

ta thấy : $\left\|g(x)-P_{n_1+n_2,\hat{a}}(x)\right\|_{R^r}=\sum_{j=1}^{r}\left|g_j(x)-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}(x)\right|$

Do đó :
$$\left|\Psi(g)-\Psi\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}}\right)\right|\le\iint_{\Theta I}C\left\|g(x)-P_{n_1+n_2,\hat{a}}(x)\right\|_{R^r}f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$
$$=\sum_{j=1}^{r}\iint_{\Theta I}C\left|g_j(x)-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}(x)\right|f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$
$$\le\sum_{j=1}^{r}\iint_{\Theta I}C\left\|g_j-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\right\|_{C(I)}f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra: $\left|\Psi\left(\hat{h}\right)-\Psi\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ và định lý 2.1 chứng minh xong [a]

Thuật toán: Tiếp theo ta đưa ra một thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ $P_{n_1+n_2,a}$.

Trước hết , theo cách xây dựng trên , với bất kỳ $h\in\overline{K}$, ta được họ đa thức hai biến :

$P_{n_1+n_2,a}=(P_{n_1+n_2,a^1},P_{n_1+n_2,a^2},\dots,P_{n_1+n_2,a^r})$ có bậc $n_1+n_2=(n_1+n_2)(h,\varepsilon)$ và có hệ số $a=\left(a^1,a^2,\dots,a^r\right)$, trong đó $a^j=(a^j_{ks})\in M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right),\forall j=\overline{1,r}$.

Vì $\overline{K}$ là tập compact nên ta có thể tìm được số n_1+n_2 chung cho tất cả các $h\in\overline{K}$ .Như vậy bậc (n_1+n_2) chỉ còn phụ thuộc ε , nên ta ký hiệu :

$n_1+n_2=(n_1+n_2)(\varepsilon)$

Bước tiếp theo , ta sẽ cố định số nguyên : $n_1+n_2=(n_1+n_2)(\varepsilon)$.

Từ đây , do định nghĩa của phiếm hàm Ψ , ta thấy $\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$ chỉ phụ thuộc vào hệ số :

$$a=\left(a^1,a^2,\dots,a^r\right)\in M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)\times M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)\times\dots\times M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)$$
$$=\left[M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)\right]^r$$

Tức là với mỗi $a\in\left[M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right)\right]^r$, tồn tại duy nhất một giá trị $\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)\in\overline{R}^{+}$.

Điều này có nghĩa tồn tại một hàm số $F:\left[M((n_1+1)\times(n_2+1))\right]^r\to\overline{R^+}$, sao cho

$F(a)=\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$

Tiếp theo, đặt :

$$A_{\varepsilon,h} = \left\{ a \in \left[M\left((n_1+1)\times(n_2+1) \right) \right]^r : \left| \Psi(h) - F(a) \right| < \varepsilon \right\}$$

$$A_\varepsilon = \bigcup_{h\in\overline{K}} A_{\varepsilon,h}$$

Hàm F được xác định như trên có thể đạt hoặc không đạt cực tiểu trên A_ε. Trong thuật toán này, ta chỉ xét trường hợp F đạt cực tiểu trên A_ε. Hàm F như vậy thường gặp trong một số phân phối xác suất thông dụng . Có thể xem thí dụ trong [9], trang 61.

Ta gọi $a^* \in A_\varepsilon$ là giá trị cực tiểu của F trên A_ε, tức là :

$$F(a^*) = \inf_{a\in A_\varepsilon} F(a)$$

Gọi $\hat{h}$ là ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là

$$\Psi(\hat{h}) = \inf \Psi(h),\ h\in\overline{K}$$

Với ước lượng Bayes $\hat{h}$ này , theo cách xây dựng trên, sẽ tồn tại họ đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}}$ có hệ số $\hat{a} \in \left[M\left((n_1+1)\times(n_2+1) \right) \right]^r$, sao cho $\left| F(\hat{a}) - \Psi(\hat{h}) \right| < \varepsilon$

Vì vậy , theo định nghĩa của A_ε, ta có $\hat{a} \in A_\varepsilon$.

Bằng cách lập luận tương tự như trong [8], ta thấy

$$\left| \Psi(\hat{h}) - F(a^*) \right| < 4\varepsilon .$$

Từ các hệ số $a^* = (a^1, a^2, ..., a^r) \in \left[M\left((n_1+1)\times(n_2+1) \right) \right]^r$, ta sẽ xây dựng được đa thức cực tiểu 2 biến $P_{n_1+n_2,a^*}$.

Với đa thức này , ta có : $\left| \Psi(\hat{h}) - \Psi\left(P_{n_1+n_2,a^*}\right) \right| < 4\varepsilon$

Như vậy ta có thể lấy đa thức cực tiểu $P_{n_1+n_2,a^*}$ để xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$ và thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị giải quyết xong .

3. XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THAM ẨN PHƯƠNG SAI

Định nghĩa 2.1: Xét mô hình hồi qui phi tuyến: $X = \varphi(\theta) + \varepsilon$. Ta gọi ma trận hiệp phương sai $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{cov}(\varepsilon,\varepsilon)$ là tham ẩn phương sai của mô hình nói trên và kí hiệu:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon,\varepsilon) = \sigma^2$$

Như biết trong bài $[6]$, $\sigma^2 \in M^+(2\times 2) \subset M(2\times 2)$, trong đó $M(2\times 2)$ là không gian các ma trận cấp 2 và $M^+(2\times 2)$ là không gian các ma trận xác định không âm cấp 2 .

Kí hiệu $\mathscr{B}(2\times 2)$ và $\mathscr{B}^+(2\times 2)$ là các σ - đại số Borel trên $M(2\times 2)$ và $M^+(2\times 2)$.

Định nghĩa 2.2 : Ánh xạ Borel đo được $h:\left(R^2,\mathscr{B}_2\right)\to\left(M\left(2\times2\right),\mathscr{B}\left(2\times2\right)\right)$ gọi là ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2\in M^+\left(2\times2\right)$ (xem [6])

Kí hiệu $B\left(R^2,M\left(2\times2\right)\right)$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn xác định trên R^2 và có trị trong M (2×2) . Ta gọi độ đo xác suất υ là phân phối xác suất tiên nghiệm của tham ẩn σ^2 trên không gian tham $\left(M^+\left(2\times2\right)\ ,\mathscr{B}^+\left(2\times2\right)\right)$. Tương tự như trong bài [3] , ta có thể định nghĩa hàm mạo hiểm Bayes và ước lượng Bayes cho tham ẩn phương sai $\sigma^2\in M^+\left(s\times s\right)$ với phân phối xác suất tiên nghiệm ν .

Định lí 2.1 : Cho $K\subset B\left(R^2,M\left(2\times2\right)\right)$ là 1 lớp các ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2\in M^+\left(2\times2\right)$ thoả các điều kiện:

(i) $h\left(R^2\right)\subset M^+\left(2\times2\right),\forall h\in K$

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists$ phân hoạch $\left\{E_i\right\}_{i=1}^m\subset R^2$ và các điểm $x_i\in E_i, i=\overline{1,m}$ sao cho:

$$\sup_{x\in E_i}\left\|h\left(x\right)-h\left(x_i\right)\right\|_{M(2\times2)}<\varepsilon,\forall h\in K,\forall i=\overline{1,m}$$

(iii) Tồn tại $C>0$ sao cho:

$$\left|L\left(y',\sigma^2\right)-L\left(y'',\sigma^2\right)\right|\le C\left\|y'-y''\right\|_{M(2\times2)},\forall\sigma^2\in M^+\left(2\times2\right),\forall y',y''\in M\left(2\times2\right).$$

Khi ấy K là tập compắc tương đối trong $B(R^2,M\left(2\times2\right))$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes .

Chứng minh định lí này tương tự như chứng minh định lí 3.1 trong bài [5] .

Định lí 2.2: Giả sử K là lớp các ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2\in M^+\left(2\times2\right)$ thoả các điều kiện như trong định lí 2.1. Giả sử hàm mật độ có điều kiện chính qui $f_{\sigma^2}\left(x\right)$ bị chặn đều. Khi ấy có thể xây dựng được một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn phương sai .

Chứng minh: Chứng minh tương tự định lí 1.2.

Nhận xét: Có thể coi ma trận hiệp phương sai σ^2 như là phần tử thuộc R^4. Lúc đó cách chứng minh định lý 2.2 được suy ra trực tiếp từ chứng minh của định lý 1.2.

Thuật toán: Để đưa ra thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$ cho tham ẩn phương sai ,ta cũng xét hàm nhiều biến $F\left(a\right)=\psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$.

Bằng cách tương tự như thuật toán cho ước lượng Bayes $\hat{h}$ của tham ẩn định vị, ta cũng xây dựng được đa thức cực tiểu $P_{n_1+n_2,a^*}$ sao cho $\left|\psi\left(\hat{h}\right)-\psi\left(P_{n_1+n_2,a^*}\right)\right|<4\varepsilon$.

4. XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CHO THAM ẨN HỖN HỢP

Xét mô hình phi tuyến 2-chiều có dạng sau :

$X = \varphi(\theta) + \varepsilon$

Trong đó :

X : vectơ quan trắc ngẫu nhiên có trị trong không gian R^2

ε : vectơ sai ngẫu nhiên có trị trong không gian R^2

θ : tham ẩn định vị, $\theta \in \Theta$ với Θ là tập compact trong không gian R^r

φ : Hàm phi tuyến cho trước , $\varphi : \Theta \to R^2$.

Trong mục này, ta khảo sát ước lượng Bayes đồng thời cho tham ẩn định vị $\theta \in \Theta \subset R^r$ và tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^+(2\times 2) \subset M(2\times 2)$.

Trước hết, dễ thấy $M = R^r \times M(2\times 2)$ là không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều với chuẩn :

$\|y\|_M = \|y'\|_{R^r} + \|y''\|_{M(2\times 2)}, y = (y', y'') \in M = R^r \times M(2\times 2)$.

Ký hiệu $\mathscr{B}(M) = \mathscr{B}_r \times \mathscr{B}(2\times 2)$ là σ _ đại số tích của các σ _ đại số $\mathscr{B}_r$ và $\mathscr{B}(2\times 2)$.

Xét không gian tham $\Theta \times M^+(2\times 2) \subset R^r \times M(2\times 2)$. Ký hiệu $\mathscr{B}(\Theta) \times \mathscr{B}^+(2\times 2)$ là vết của σ _ đại số $\mathscr{B}(M) = \mathscr{B}_r \times \mathscr{B}(2\times 2)$ trên $\Theta \times M^+(2\times 2)$.

Định nghĩa 3.1: Cho tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ và tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^+(2\times 2)$. Tham ẩn $\lambda = (\theta, \sigma^2)$ được gọi là tham ẩn hỗn hợp.

Hàm Borel đo được h : $(R^2, \mathscr{B}_2) \to (M, \mathscr{B}(M))$ gọi là ước lượng của tham hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$. Hàm Borel h được gọi là hàm bị chặn nếu $\|h\|_B = \sup_{x \in R^2} \|h(x)\|_M < +\infty$. Tập hợp tất cả các hàm Borel bị chặn ký hiệu $B(R^2, M)$.

Định nghĩa 3.2: Cho tham ẩn định vị θ có phân phối tiên nghiệm τ và tham ẩn phương sai σ^2 có phân phối tiên nghiệm ν. Người ta gọi độ đo tích $\eta = \tau \times \nu$ là phân phối tiên nghiệm của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$.

Như đã biết, với vectơ ngẫu nhiên X, tồn tại phân phối xác suất có điều kiện chính quy $P^{X|\lambda}$, ký hiệu $Q_\lambda, \lambda \in \Theta \times M^+(2\times 2)$. Cho μ là độ đo σ _ hữu hạn trên $(R^2, \mathscr{B}_2)$ và giả sử $Q_\lambda \ll \mu$, $\lambda \in \Theta \times M^+(2\times 2)$. Khi ấy tồn tại hàm mật độ xác suất có điều kiện chính quy $f_\lambda(x)$:

$$f_\lambda(x) = \frac{Q_\lambda(dx)}{\mu(dx)}$$

Định nghĩa 3.3 :Cho hàm H: $R^2 \times (\Theta \times M^+(2\times 2)) \to (R^2 \times M(2\times 2)) \times (\Theta \times M^+(2\times 2))$ được xác định bởi: $H(x, \lambda) = (h(x), \lambda)$

và cho hàm không âm L: $(R^2 \times M(2\times 2)) \times (\Theta \times M^+(2\times 2)) \to \overline{R}^+$

Người ta gọi hàm hợp $L(h(.),.) := L \circ H : R^2 \times (\Theta \times M^+(2\times 2)) \to \overline{R}^+$ là hàm tổn thất của ước lượng $h \in B(R^2, M)$.

Mệnh đề 3.1: Giả sử L là hàm $(\mathscr{B}_r \times \mathscr{B}(2\times 2)) \times (\mathscr{B}(\Theta) \times \mathscr{B}^+(2\times 2), \mathscr{B}(\overline{R}^+))$ _ đo được. Khi ấy $L(h(.),.)$ là hàm $(\mathscr{B}_r \times (\mathscr{B}(\Theta) \times \mathscr{B}^+(2\times 2), \mathscr{B}(\overline{R}^+))$ _ đo được .

Do mệnh đề này, ta có định nghĩa sau .

Định nghĩa 3.4: Phiến hàm $\psi : B(R^2, M) \to \overline{R}^+$ được xác định bởi

$\psi(h) = \int\limits_{\Theta \times M^+(2\times 2)} \int\limits_{R^2} L(h(x), \lambda) f_\theta(x) \mu(dx) \eta(dx)$ gọi là hàm mạo hiểm của ước lượng h với phân phối tiên nghiệm η.

Ước lượng $h \in B(R^2, M)$ thoả điều kiện:

$\psi(h) = \inf\limits_{h \in B(R^2, M)} \psi(h)$ gọi là ước lượng Bayes với phân phối tiên nghiệm η.

Mệnh đề 3.2: Cho hàm $h = (h', h'')$ trong đó $h' : R^2 \to R^r$ và $h'' : R^2 \to M(2\times 2)$. Khi ấy h là hàm $(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_r \times \mathscr{B}(2\times 2))$ đo được $\Leftrightarrow h'$ là hàm $(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_r)$ _đo được và h'' là hàm $(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}(2\times 2))$ _ đo được.

Theo mệnh đề này thì $h \in B(R^2, R^r \times M(2\times 2)) \Leftrightarrow h' \in B(R^2, R^r)$ và $h'' \in B(R^2, M(2\times 2))$.

Từ các định nghĩa và mệnh đề trên ta có các kết quả sau

Định lý 3.1: Cho $K \subset B(R^2, M)$ là một lớp các ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2) \in \Theta \times M^+(2\times 2) \subset R^r \times M(2\times 2)$ thoả các điều kiện:

(i) $h(R^2) \subset \Theta \times M^+(2\times 2), \forall h \in K$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \{E_i\}_{i=1}^m \subset R^2$ và các điểm $x_i \in E_i$ sao cho

$\sup\limits_{x \in E_i} \|h(x) - h(x_i)\| < \varepsilon, \forall h \in K, i = \overline{1,m}.$

(iii) $\exists C > 0$:

$|L(y', \lambda) - L(y'', \lambda)| \le C \|y' - y''\|_M, \forall y', y'' \in M, \forall \lambda \in \Theta \times M^+(2\times 2)$.

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(R^2, M)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes.

Tiếp theo, ta tìm xấp xỉ cho ước lượng Bayes $h \in \overline{K}$. Để làm điều này ta đưa ra thêm một số giả thiết và ký hiệu. Cho X là vectơ ngẫu nhiên có trị trong R^2. Giả sử tập trị I của X là tập compact trong R^2.

Ký hiệu : $B(I) := B(I, M)$ với $M = R^r \times M(2\times 2)$

$C(I) := C(I, M)$

$C'(I) := C(I, R^r)$

$$C''(I) := C(I, M(2\times 2))$$

$$C_1(I) := C(I, R^1)$$

Hiển nhiên các tập hợp này là các không gian Banach với các chuẩn sup tương ứng .

Định lý 3.2: Giả sử K là lớp các ước lượng của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$ thoả các điều kiện trong định lý 3.1. Giả sử hàm mật độ xác suất có điều kiện chính quy $f_\lambda(x)$ bị chặn đều. Khi ấy có thể xây dựng một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$.

Chứng minh: Vì K thoả các điều kiện của định lý 3.1, nên tồn tại ước lượng Bayes $h \in \overline{K}$ của tham ẩn hỗn hợp $\lambda = (\theta, \sigma^2)$.

Trước hết, theo giả thiết , $\exists C' > 0$ sao cho: $|f_\lambda(x)| \le C', \forall x \in I, \forall \lambda \in \Theta \times M^+(2\times 2)$.

Tiếp theo, với ước lượng Bayes $h \in \overline{K}$, $\exists C'' > 0$ sao cho

$$\|h(x)\|_M = \|h'(x)\|_{R^r} + \|h''(x)\|_{M(2\times 2)} \le C''$$

với h', h'' là các ước lượng bị chặn của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta \subset R^r$ và tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^+(2\times 2) \subset M(2\times 2)$. Khi ấy với $\varepsilon > 0$ cho trước, theo định lý Lusin, tồn tại các hàm liên tục g', g'' xác định trên $I \subset R^2$ sao cho

$$\mu\left\{x \in I : h'_j(x) \ne g'_j(x)\right\} < \frac{\varepsilon}{8.r.C.C'.C''} \forall j = \overline{1.r}$$

với $h' = (h'_1, h'_2, ..., h'_r)$ và $g' = (g'_1, g'_2, ..., g'_r)$

$$\mu\left\{x \in I : h''_{ij}(x) \ne g''_{ij}(x)\right\} < \frac{\varepsilon}{32.C.C'.C''}, \forall i, j = \overline{1,2}$$

với $h'' = \begin{pmatrix} h''_{11} & h''_{12} \\ h''_{21} & h''_{22} \end{pmatrix}, g'' = \begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12} \\ g''_{21} & g''_{22} \end{pmatrix}$

Trong đó μ là độ đo Lebesgue trên R^2 và C được xác định như trong định lý 1.1 và 1.2.

Tiếp theo, xét độ đo tích $\eta = \tau \times \nu$ với τ, ν là các phân phối tiên nghiệm trên các không gian tham Θ và $M^+(2\times 2)$. Khi ấy, ta có:

$$|\psi(h) - \psi(g)| \le \int_{\Theta\times M^+(2\times 2)} \int_I |L(h(x), \lambda) - L(g(x), \lambda)| f_\lambda(x) \mu(dx) \eta(dx)$$

$$\le \int_{\Theta\times M^+(2\times 2)} \int_I C \|h(x) - g(x)\|_M f_\lambda(x) \mu(dx) \eta(dx)$$

$$= \int_{\Theta\times M^+(2\times 2)} \int_I C(\|h'(x) - g'(x)\|_{R^r} + \|h''(x) - g''(x)\|_{M(2\times 2)}) f_\lambda(x) \mu(dx) \eta(dx) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tương tự như định lý 1.2 và 2.2 với hàm liên tục $g=(g',g'')$ và $\varepsilon>0$, theo định lý xấp xỉ Weierstrass tồn tại các đa thức $P_{n_1+n_2,\hat{a}}$ và $P_{n_1+n_2,\hat{b}}$ với hệ số

$a=(a^1,a^2,...,a^r)\in\left[M((n_1+1)\times(n_2+1))\right]^r$ và

$$b=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in\tilde{M}=\begin{pmatrix} M((n_1+1)\times(n_2+1)) & M((n_1+1)\times(n_2+1))\\ M((n_1+1)\times(n_2+1)) & M((n_1+1)\times(n_2+1))\end{pmatrix}$$

sao cho

$$\left\|g'_j-P_{n_1+n_2,a^j}\right\|_{C_1(I)}<\frac{\varepsilon}{2.r.C} \text{ với } g'=(g'_1,g'_2,...,g'_r)$$

$$\left\|g''_{ij}-P_{n_1+n_2,b^{ij}}\right\|_{C_1(I)}<\frac{\varepsilon}{16.C} \text{ với } g''=\begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12}\\ g''_{21} & g''_{22}\end{pmatrix}$$

Ký hiệu $P_{n_1+n_2,(\hat{a}.\hat{b})}=(P_{n_1+n_2,\hat{a}},P_{n_1+n_2,\hat{b}})$. Khi ấy, ta có :

$$\left|\psi(g)-\psi(P_{n_1+n_2,(a.b)})\right|\le\int_{\Theta\times M(2\times2)}\int_I\left|L(g(x),\lambda)-L(P_{n_1+n_2,(a,b)}(x),\lambda)\right|f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(dx)$$

$$\le\int_{\Theta\times M(2\times2)}\int_I C\left\|g-P_{n_1+n_2,(a,b)}\right\|_{C(I)}f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(dx)$$

$$\le\int_{\Theta\times M(2\times2)}\int_I C(\left\|g'-P_{n_1+n_2,a}\right\|_{C'(I)}+\left\|g''-P_{n_1+n_2,b}\right\|_{C''(I)})f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(dx)$$

$$\le\int_{\Theta\times M(2\times2)}\int_I C(\sum_{j=1}^{r}\left\|g'-P_{n_1+n_2,a}\right\|_{C_1(I)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|g''-P_{n_1+n_2,b}\right\|_{C_1(I)})f_\lambda(x)\mu(dx)\eta(dx)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra $\left|\psi(h)-\psi(P_{n_1+n_2,(a.b)})\right|<\varepsilon$ và định lý 3.2 chứng minh xong .

Thuật toán: Tiếp theo ta đưa ra thuật toán xây dựng đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\lambda=(\theta,\sigma^2)$.

Bằng lập luận tương tự như thuật toán của tham ẩn định vị, ta xây dựng các tập hợp:

$$A_{\varepsilon,h}=\left\{(a,b)\in\left[M((n_1+1)\times(n_2+1))\right]^r\times\tilde{M}:\left|\psi(h)-F(a,b)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$A_\varepsilon=\bigcup_{h\in\overline{K}}A_{\varepsilon,h}$$

Lập luận tương tự như trong mục 1 , ta xây dựng được đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,(a^*,b^*)}$ sao cho:

$$\left|\psi(h)-\psi(P_{n_1+n_2,(a^*.b^*)})\right|<4\varepsilon.$$

Đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,(a^*,b^*)}$ chính là đa thức cực tiểu phải tìm của ước lượng Bayes $h\in\overline{K}$ cho tham ẩn hỗn hợp $\lambda=(\theta,\sigma^2)$.

PHỤ LỤC

Ta xét thí dụ về ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị θ trong trường hợp 1_chiều (xem [9]).

Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên có tập trị $I=[0,2]\subset R$. Giả sử không gian tham Θ là tập compact $[1,2]\subset R$ và tham ẩn định vị $\theta\in\Theta=[1,2]$.

Giả sử phân phối xác suất điều kiện chính quy $Q_\theta, \theta\in\Theta$ là phân phối đều với hàm mật độ xác suất điều kiện chính quy có dạng :

$$f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}.1_{(0\le x\le\theta)}$$

trong đó $1_{(0\le x\le\theta)}=\begin{cases}1 & x\in[0,\theta]\\ 0 & x\notin[0,\theta]\end{cases}$

Giả sử phân phối tiên nghiệm τ cũng là phân phối đều với hàm mật độ xác suất có dạng: $t(\theta)=1;1\le\theta\le 2$

Giả sử hàm tổn thất $L(.,.)$ có dạng sau :

$L(h(x),\theta)=(h(x)-\theta)^2$.

Khi ấy hàm mạo hiểm Bayes của đa thức $P_{n,a}(x)$ với phân phối tiên nghiệm τ có dạng:

$$\psi(P_{n,a})=\int_\Theta\int_I L(P_{n,a},\theta).f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$=\int_1^2\int_0^2(P_{n,a}(x)-\theta)^2.f_\theta(x)dx\tau(d\theta)$$

$$=\int_1^2\int_0^\theta\left(\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n a_i.a_j.x^i.x^j-2\theta\sum_{i=0}^n a_i.x^i+\theta^2\right).\frac{1}{\theta}.dx(d\theta)$$

$$=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n a_i.a_j\frac{2^{i+j+1}-1}{(i+j+1)^2}-2\sum_{i=0}^n a_i\frac{2^{i+2}-1}{(i+1)(i+2)}+\frac{7}{3}$$

Điều này chứng tỏ từ phiếm hàm $\psi(P_{n,a})$ ta được hàm số nhiều biến $F(a)$ sau đây :

$$F(a)=F(a_0,a_1,a_2,...,a_n)$$

$$=\psi(P_{n,a})=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n a_i.a_j\frac{2^{i+j+1}-1}{(i+j+1)^2}-2\sum_{i=0}^n a_i\frac{2^{i+2}-1}{(i+1)(i+2)}+\frac{7}{3}$$

Khi $n=1$, ta có

$$F(a)=F(a_0,a_1)=a_0^2+\frac{3}{2}a_0.a_1+\frac{7}{9}a_1^2-3a_0-\frac{7}{3}a_1+\frac{7}{3}$$

Cực tiểu hoá hàm số 2 biến này, ta được :

$$a_0^*=\frac{42}{31};a_1^*=\frac{6}{31}$$

Vì vậy đa thức cực tiểu xấp xỉ ước lượng Bayes có dạng:

$$P_{a^{*}}(x) = \frac{42}{31} + \frac{6}{31}x$$

ON THE APPROXIMATION OF THE BAYESIAN ESTIMATORS FOR COMPOUND PARAMETER IN THE 2_ DIMENSIONAL NONLINEAR STATISTICAL MODELS

Ung Ngoc Quang
University of Natural Sciences, VNU-HCM

ABSTRACT: *The paper describes the approximation of Bayesian estimator for the location parameter, variance parameter and compound parameter in the 2 – dimensional nonlinear models.*

Keywords: *Bayesian estimators, compound parameter, two - dimensional nonlinear models, polynomial functions.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. P.Muller, F.A.Quintana, *Nonparameter Bayesian Data Analysis*, Statistical Sciences, Vol.19, No.1 (2004), 95 – 110.

[2]. [P.M.Lee, *Bayesian Statistics*, Oxford University Press Inc, (2004).

[3]. P.Congdon, *Bayesian Statistical Modelling*, John Wiley, 2005.

[4]. Ung Ngọc Quang (1990), *Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê với không gian tham compắc* , Tạp chí Toán học , Tập 18 , Số 1, 1-8 .

[5]. Ung Ngọc Quang (1994), *On the existence of Bayesian estimates in nonlinear statistical models with compact parameter space*, Acta Mathematica Vietnamica, Vol 19 .No.2 , 149 – 160 .

[6]. Ung Ngọc Quang (1995), *On the existence of Bayesian estimators in multidimensional nonlinear statistical models with compact parameter space* , Vietnam Journal of Mathematics , Vol.23 , No .2 , 229-240 .

[7]. Ung Ngọc Quang (2002), *Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê vô hạn chiều với không gian tham compắc* , Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ , Tập 5 , Số 11 , 5-11 .

[8]. Ung Ngọc Quang(1994) , *Về một xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến , Tạp chí Tin học và Điều khiển học* , Tập 10 , số 4 , 35_40

[9]. Ung Ngọc Quang(1995) , *Về ước lượng Bayes của phương sai trong mô hình thống kê phi tuyến 1- chiều* , Tạp chí Tin học và Điều khiển học , Tập 11 , Số 4 , 53_63

[10]. Ung Ngọc Quang(1998), *Về ước lượng Bayes của tham ẩn hỗn hợp trong mô hình hồi qui phi tuyến* , Tạp chí Tin học và Điều khiển học , Tập 14 , Số 2 , 19_29.

[11]. Ung Ngọc Quang(2007), *Về ước lượng Bayes trong không gian Banach* , Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ , Tập 10 , Số 12.