PHẦN TỬ TƯƠNG THÍCH HCT VỚI BÀI TOÁN DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM KIRCHHOFF

Nguyễn Quang Tuyến[1]; Chu Quốc Thắng[2]; Lê Hoài Long[1]
(1)Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM
(2)Trường Đại học Quốc tế, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 04 tháng 10 năm 2006, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 01 tháng 02 năm 2007)

TÓM TẮT: *Bài báo này giới thiệu cách phát triển và ứng dụng phần tử tương thích HCT để phân tích động lực học kết cấu tấm. Ở đây trình bày cách xây dựng ma trận khối lượng của phần tử HCT sử dụng lý thuyết tấm mỏng của Kirchhoff là phát triển tiếp theo của [8]. Các lời giải số về tần số dao động riêng của hai bài toán tấm minh họa hiệu quả sử dụng của dạng phần tử này.*

1. GIỚI THIỆU

Các tính toán giải tích truyền thống đa phần dựa trên lý thuyết tấm mỏng của Kirchhoff với giả thuyết về mặt trung bình không biến dạng đã được phát triển dù rất tốt với các lời giải của Ritz, Reyleigh, Navier...dưới dạng chuỗi nhưng chỉ giới hạn với một số điều kiện biên nhất định và phần lớn chỉ dùng để giải tìm nội lực mà thôi. Đối với phân tích động lực học bài toán tấm thì các nghiên cứu giải tích dựa trên định luật Newton, phương trình công ảo...còn hạn chế hơn nữa vì khó khăn toán học. Một số các phương pháp xấp xỉ như phương pháp biến phân, Galerkin...cũng được phát triển tuy nhiên kết quả vẫn rất hạn chế. Một số các kết quả có thể tìm thấy trong [5,11,13]. Cùng với sự phát triển của công nghệ máy tính hiện nay, các phương pháp số như phần tử hữu hạn, phần tử biên, phương pháp không phần tử (meshless)...đã được nghiên cứu áp dụng và cho kết quả rất tốt. Các khó khăn vì khối lượng tính toán nhiều đã được máy tính với tốc độ và khả năng xử lý cao giải quyết. Trong tất cả các phương pháp số thì phương pháp phần tử hữu hạn có thể được coi như một công cụ rất mạnh để giải quyết hầu hết tất cả các bài toán cơ hiện nay đặc biệt là bài toán tấm.

Bài báo này muốn giới thiệu ứng dụng một phần tử tương thích vào nghiên cứu động lực học bài toán tấm đó là phần tử HCT, được đề xuất bởi ba tác giả là Hseigh – Clough – Tocher, tuân theo các giả thiết tấm mỏng của Kirchhoff. Phần tử này cũng đã được Hùng [9,10] và Dương [8] nghiên cứu áp dụng tính toán và đánh giá sai số lời giải nội lực cho bài tóan tấm và vỏ.

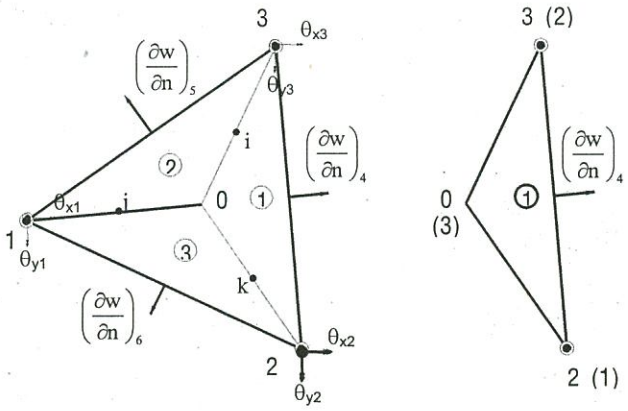
Chúng tôi sẽ trình bày cách xây dựng ma trận khối lượng của phần tử HCT và một số các ví dụ tính toán, so sánh với một số kết quả đã có hiện nay để đánh giá hiệu quả của phần tử này trong tính toán động lực học kết cấu tấm.

2. PHẦN TỬ HCT

Phần tử ban đầu có 12 bậc tự do trên biên (Hình 1), nhưng với những giả thiết và biến đổi, phần tử HCT sẽ giảm xuống còn 9 bậc tự do:

Hàm chuyển vị của từng phần tử có thể được biểu diễn qua các bậc tự do của nút và hàm dạng: $w = N.q$ (1)

với: N : là ma trận hàm dạng; q : là vector chuyển vị nút.



Hình 1.Phần tử tương thích HCT với 12 bậc tự do.

Trong phần tử, ngoài chuyển vị của các góc w_i còn có các góc xoay của mỗi góc phần tử.

$$\theta_{xi} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_i = \partial_1 w|_i \qquad \text{với } i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

$$\theta_{yi} = -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_i = \partial_2 w|_i \tag{3}$$

Không những thế còn có góc xoay tại 3 nút ở giữa các cạnh θ_4, θ_5, θ_6

$$\theta_i = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i = \partial_n w|_i \quad \text{với } i = 4, 5, 6 \tag{4}$$

Chuyển vị nút của phần tử bây giờ được biểu diễn qua các phần tử con

$$w^{(k)}(x,y) = N^{(k)}(x,y).q^{(k)} \tag{5}$$

Chuyển vị nút của phần tử con số 1

$$q^{(1)} = \left[w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ w_0\ \theta_{x0}\ \theta_{y0}\theta_4\ \right]^T \tag{6}$$

$q^{(1)}$ là vector bao gồm 10 thành phần chuyển vị, ta sử dụng hàm đa thức nội suy bậc ba 10 thành phần của Lagrange [11] cho một phần tử con và được biểu diễn trong hệ tọa độ tự nhiên $L = (L_1, L_2, L_3)$ như sau:

$$w = \mathbf{P}\alpha \tag{7}$$

trong đó:

$$\mathbf{P} = [\,L_1^3\ L_2^3\ L_3^3\ L_1^2L_2\ L_1^2L_3\ L_2^2L_3\ L_2^2L_1\ L_3^2L_1\ L_3^2L_2\ L_1L_2L_3\,]$$

$$\alpha^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8\ \alpha_9\ \alpha_{10}]$$

Đối với các phần tử con k = 1→ 3 thì hàm dạng sẽ được biểu diễn $\overline{N}(L)$. Từ (6) ta suy ra vector chuyển vị toàn bộ các nút q là:

$$\underline{q}^T = [w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ \theta_4\ \theta_5\ \theta_6\ |\ w_0\ \theta_{x0}\ \theta_{y0}\ ]$$

$$= \left[q_R^T\ |\ q_E^T\ \right]$$

Chuyển vị trong phần tử con số 1 được biểu diễn như sau:

$$w^{(1)}(L) = N^{(1)} \times q = \begin{bmatrix} N_e^{(1)} & N_0^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_E \end{bmatrix} \tag{8}$$

$N_e^{(1)}$ và $N_0^{(1)}$ lần lượt là các hàm dạng đối với chuyển vị nút bên ngoài và bên trong (nút 0).

Tương tự như trong (8), ta áp dụng cho hai phần tử con 2 và 3, ta được mối liên hệ giữa toàn bộ các chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^{(1)} & N_0^{(1)} \\ N_e^{(2)} & N_0^{(2)} \\ N_e^{(3)} & N_0^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_E \end{bmatrix} \tag{9}$$

2.1 Ma trận độ cứng

$$k_e^m = \int_{V_e^{(m)}} [B]^T [D][B] dV = \int_{A_e^{(m)}} [\overline{B}]^T [H][\overline{B}] dA \tag{10}$$

trong đó: m là số phần tử con, m = 1, 2, 3.

và $$[H] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad [B] = (\partial\nabla)[N]$$

2.2 Ma trận khối lượng phần tử

$$m_e^m = \int_{A_e^{(m)}} \left[I_0 [N]^T [N] + I_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dA \tag{11}$$

trong đó: m là số phần tử con. m = 1, 2, 3; I_0, I_1 là momen quán tính của khối lượng.

$$I_0 = \int_{-t/2}^{t/2} \rho dz = \rho.t; \qquad I_1 = \int_{-t/2}^{t/2} \rho z^2 dz = \frac{\rho.t^3}{12} \tag{11*}$$

ρ là khối lượng riêng của vật liệu làm tấm.

2.3 Ghép nối và loại bỏ nút giữa của phần tử

Ở đây, trong (9) biểu diễn các thành phần chuyển vị bậc ba của 3 phần tử con. Bây giờ chúng ta xét 2 phần tử kề nhau có chung giao tuyến. Dọc theo cạnh 02 của phần tử con số 1 và 3 trong Hình 1, chuyển vị đứng duy nhất được biểu diễn bằng các giá trị chuyển vị nút tại 0 và 2 nhưng các độ dốc pháp tuyến là khác nhau giữa hai nút. Thật vậy, (5) không diễn tả được miền chuyển vị tương thích bên trong phần tử. Đưa vào các điểm i, j, k tại trung điểm của các giao tuyến của các phần tử con. Bằng cách lấy vi phân $w^{(1)}$ của (8) thì độ dốc pháp tuyến hướng ra phía ngoài là: $\partial_n w^{(1)}\big|_k = \begin{bmatrix} B_k^{(1)} & B_0^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_E \end{bmatrix}$

Từ những điều kiện liên tục tại các nút i, j, k:

$$\partial_n w^{(1)}\big|_{i,j,k} = -\partial_n w^{(3)}\big|_{i,j,k} \tag{12}$$

Chúng ta thiết lập các ma trận theo những điều kiện tương thích như sau:

$$\begin{bmatrix} B_k^{(1)} + B_k^{(3)} & | & B_{0,k}^{(1)} + B_{0,k}^{(3)} \\ B_i^{(1)} + B_i^{(2)} & | & B_{0,i}^{(1)} + B_{0,i}^{(2)} \\ B_j^{(2)} + B_j^{(3)} & | & B_{0,j}^{(2)} + B_{0,j}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_E \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

Vì vậy:

$$q_E = -B_0^{-1} B q_R = C q_R \tag{14}$$

Bằng cách thay (14) vào trong (9), ta có được hàm chuyển vị như sau:

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e^{(1)} & N_0^{(1)} C \\ N_e^{(2)} & N_0^{(2)} C \\ N_e^{(3)} & N_0^{(3)} C \end{bmatrix} \times q_R \tag{15}$$

Ma trận độ cứng của phần tử có được bằng cách "lấy tổng" độ cứng của 3 phần tử con. Tiếp theo sử dụng sự cô đặc tĩnh (static condensation) để giảm các bậc tự do bên trong phần tử. và sử dụng điều kiện năng lượng toàn phần dừng để tìm được ma trận độ cứng phần tử. Các thủ tục nêu trên có thể tìm thấy được trong [8].

Ma trận khối lượng m của phần tử được thiết lập theo trình tự như trên, như sau:

$$\underline{m} = \sum_{i=1}^{3} \underline{m}^{(i)} \tag{16}$$

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{RE} \\ m_{ER} & m_{EE} \end{bmatrix}$$

Trong đó chỉ số R và E trong các ma trận lần lượt dùng để quy định cho các thành phần của phần tử tam giác tương ứng với các bậc tự do của các nút 1,2,3,4,5,6 và các bậc tự do bên trong nút 0 mà đã được giản lược.

Với một phần tử, động năng T_e có thể được tính như sau:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{\underline{w}}\}_e^T \{\dot{\underline{w}}\}_e \, dV \tag{17}$$

Mà như ta đã biết, do chuyển vị là hàm thời gian, các điểm của phần tử chuyển động với vận tốc bằng đạo hàm bậc nhất của chuyển vị theo thời gian t:

$$\{\dot{\underline{w}}\}_e = [N] \{\dot{\underline{q}}\}_e$$

Ở đây, $\{\dot{\underline{q}}\}_e$ là vector vận tốc của các điểm nút của phần tử.

Suy ra:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\underline{q}}\}_e^T \left(\int_{V_e} \rho [N]^T [N] \, dV \right) \{\dot{\underline{q}}\}_e = \frac{1}{2} \{\dot{\underline{q}}\}_e^T \underline{m} \{\dot{\underline{q}}\}_e$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_R^T & \dot{q}_E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{RE} \\ m_{ER} & m_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_R \\ \dot{q}_E \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_R^T & \dot{q}_R^T C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{RR} & m_{RE} \\ m_{ER} & m_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_R \\ C\dot{q}_R \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}_R^T\left(m_{RR} + C^T m_{ER} + m_{RE}C + C^T m_{EE}C\right)\dot{q}_R$$

Trong đó:

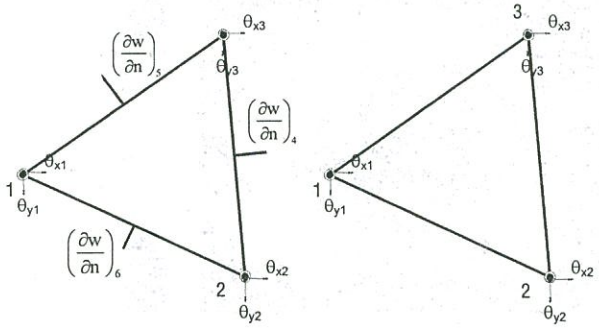
$$\underline{m}_e = m_{RR} + C^T m_{ER} + m_{RE}C + C^T m_{EE}C \qquad (18)$$

Thực tế thấy rằng, phân tích các nút giữa cạnh 4,5,6 là phức tạp. Tuy nhiên, nếu độ dốc pháp tuyến thay đổi tuyến tính dọc theo cạnh thì nút tại giữa cạnh được bỏ đi và coi góc xoay tại nút giữa là trung bình cộng của các góc xoay tại nút i và nút j:

$$\theta_k = \theta_{xk}\cos\alpha_{ij} + \theta_{yk}\sin\alpha_{ij} = \left(\frac{\theta_{xi} + \theta_{xj}}{2}\right)\cos\alpha_{ij} + \left(\frac{\theta_{yi} + \theta_{yj}}{2}\right)\sin\alpha_{ij} \qquad (19)$$

với k = 4, 5, 6 và α_{ij} là góc giữa các cạnh *ij* = 23, 31, 12

Lúc này phần tử HCT chỉ còn lại 9 bậc tự do (thay vì 12) nhưng hoàn toàn tương thích với sự ràng buộc về độ dốc pháp tuyến tuyến tính khác dọc theo các cạnh biên (Hình 2).



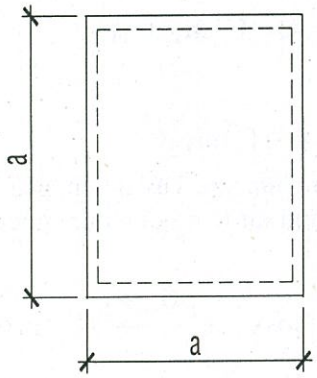
Hình 2. Phần tử HCT sau khi đã giản lược

3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

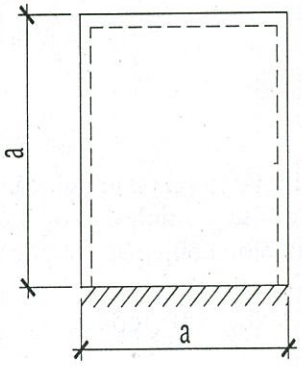
3.1 Phần tử HCT và một số phần tử khác

Xem xét hai bản vuông làm bằng vật liệu đẳng hướng có các thông số như sau: kích thước: a = 4 m; chiều dày bản: h = 0.1 m; module đàn hồi: $E = 2.5311\times10^9$ Kg/m^2; hệ số Poison: $\nu = 0.2$; khối lượng riêng: $\rho = 244.8$ kg/m^3 với các điều kiện biên như Hình 3, 4.

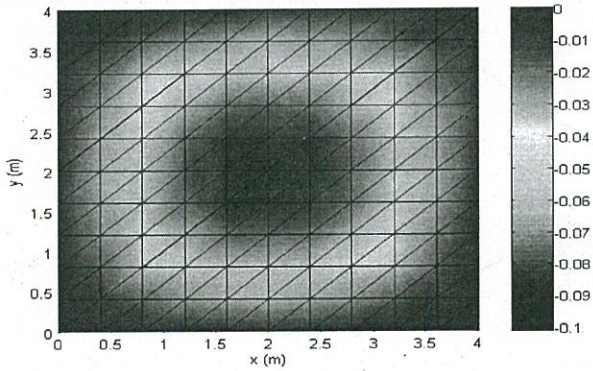
Chúng ta sẽ xem xét các giá trị tần số vòng của tấm trong 2 mode đầu tiên. Các kết quả của phần tử HCT sẽ được so sánh với các kết quả của phần mềm Sap2000 sử dụng phần tử thin-plate. Ngoài ra ở đây còn so sánh với một kết quả nghiên cứu trước đây trong [14]. Phần này một lưới chia duy nhất được sử dụng là lưới 10x10 (đối với HCT là 2x(10x10) như Hình 5). Các kết quả từ các phần tử khác nhau sẽ được so sánh với lời giải giải tích (chính xác) trong [5].



Hình 3.Tấm bốn cạnh tựa đơn

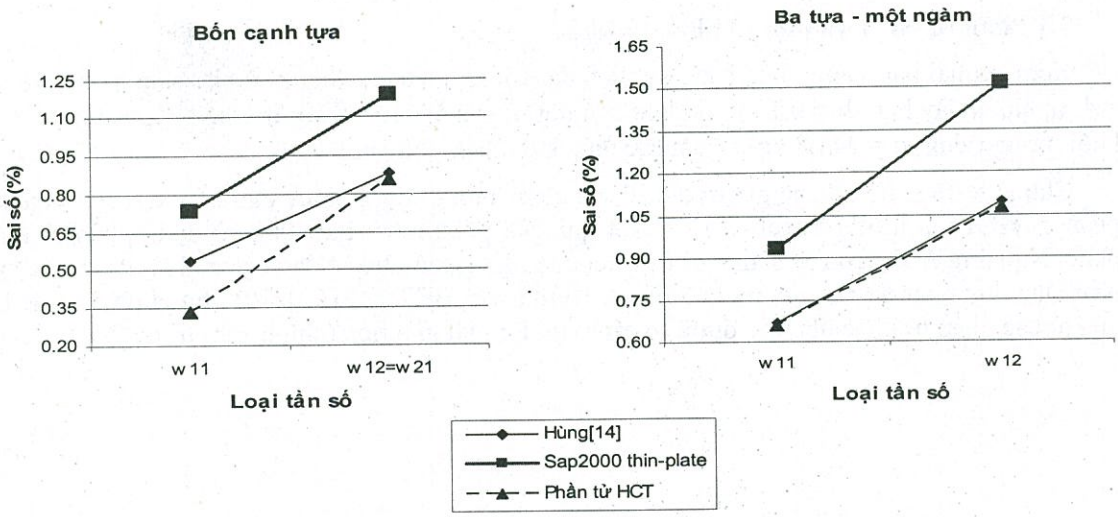


Hình 4.Tấm ba cạnh tựa và một cạnh ngàm



Hình 5. Mode shape của w_{11} và lưới chia 2x(10x10) của phần tử HCT (bốn cạnh tựa)

Có thể thấy rằng,phần tử HCT cho kết quả khá tốt. So với hai phần tử cùng tuân theo lý thuyết Kirchhoff là phần tử số 1 và 2 còn cho kết qủa tốt hơn.



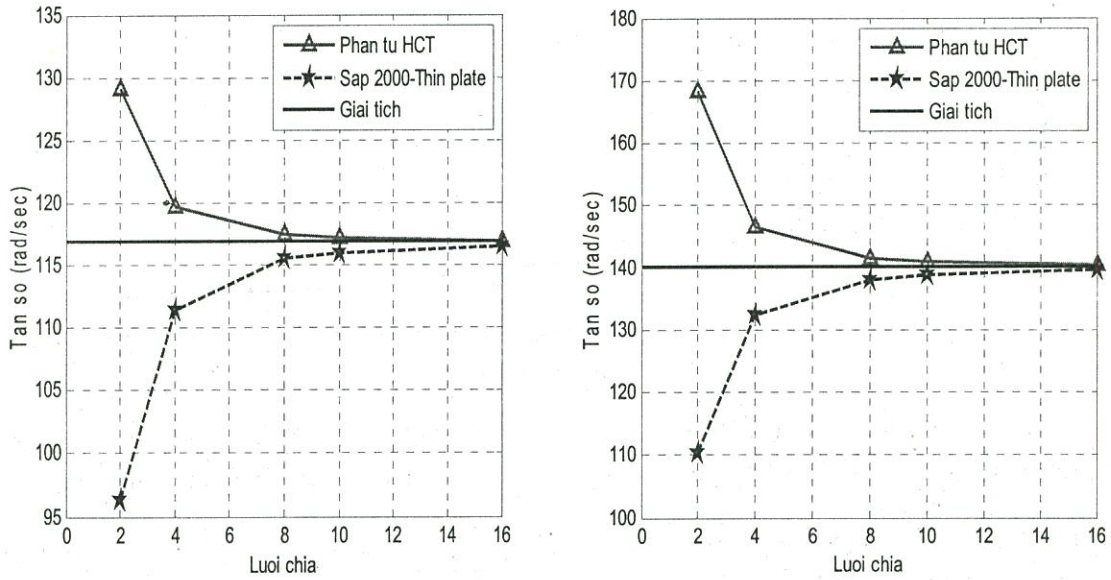
Hình 6. Sai số % của các phần tử so với lời giải chính xác [5]

Bảng 1.Sai số (%) tần số của các phần tử trong 2 mode dao động đầu tiên so với [5]

STT	Các loại phần tử	Bốn cạnh tựa đơn		Ba cạnh tựa, một cạnh ngàm	
		w_{11}	$w_{12} = w_{21}$	w_{11}	w_{12}
1	Hùng[14]	0,539	0,880	0,671	1,098
2	SAP2000	0,736	1,188	0,936	1,510
3	Phần tử HCT	0,334	0,859	0,657	1,078

❖ Độ hội tụ của lời giải sử dụng phần tử HCT

Sử dụng lại các đặc trưng vật liệu như trên để tính toán. Độ mịn lưới chia được thay đổi như sau: 2x2, 4x4, 8x8, 10x10, 16x16 (ở đây ghi tắt vì phần tử HCT lưới chia thật sự là 2x(...)) và cũng so sánh với lời giải giải tích dưới dạng sai số %. Chỉ khảo sát với mode dao động đầu tiên w_{11}. Lời giải chính xác cho trong [5] cho mode này đối với tấm bốn cạnh tựa là 116.87 rad/sec và cho ba cạnh tựa – một cạnh ngàm là 140.03 rad/sec. Các kết quả tính toán được trình bày ở Hình 7 và liệt kê trong Bảng 2.



Hình 7.Độ hội tụ của phần tử HCT (a: bốn cạnh tựa; b: ba tựa – một ngàm)

Ta thấy lời giải của phần tử HCT hội tụ rất nhanh. độ hội tụ đến lời giải chính xác khi độ mịn lưới tăng lên của HCT là rất tốt. chỉ cần lưới chia thô 2x(4x4) là sai số giữa lời giải HCT so với giải tích đã dưới 2.5% và khi đến lưới chia 2x(8x8) thì sai số này chỉ còn khoảng 1%.

Bảng 2. Tần số dao động mode đầu tiên với các lưới chia phần tử (rad/sec) (tấm bốn cạnh tựa)

Loại phần tử	2x2	4x4	8x8	10x10	16x16
SAP2000 - Thin-plate	96,36	111,44	115,52	116,02	116,54
Phần tử HCT lưới chia 2x(...)	129,17	119,71	118,09	117,27	117,23

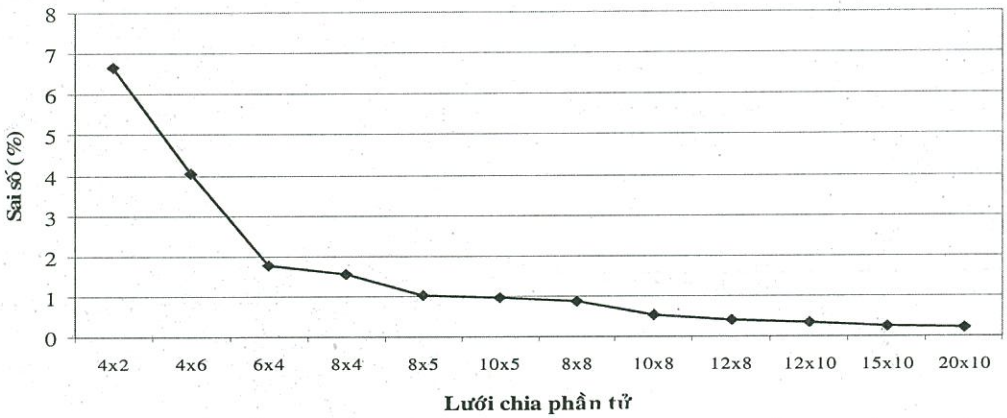
Bảng 2(tt). Tần số dao động mode đầu tiên với các lưới chia phần tử (rad/sec) (tấm ba tựa – một ngàm).

Loại phần tử	2x2	4x4	8x8	10x10	16x16
SAP2000 - Thin-plate	110,291	132,216	138,001	138,720	139,50
Phần tử HCT lưới chia 2x(…)	168,284	146,675	141,544	140,952	140,323

Độ hội tụ của phần tử trong Sap2000 cũng rất nhanh nhưng hơi kém hơn một chút so với của HCT. Một đặc biệt nữa là HCT tìm đến lời giải chính xác như một cận trên còn Sap2000 thin-plate thì như một cận dưới. Ta có thể sử dụng phần tử này trong bài toán đối ngẫu.

3.2 Khảo sát mật độ lưới chia sử dụng phần tử HCT

Ta khảo sát thêm một trường hợp nữa với tấm chữ nhật kích thước 6mx4m. Các đặc trưng vật liệu vẫn giữ nguyên. Các lưới chia phần tử khác nhau được sử dụng để rút ra một tỷ lệ lưới chia thích hợp với phần tử HCT. Các sai số của các lưới chia của mode dao động đầu tiên (so với [5]) được trình bày trong Bảng 3 và thể hiện trên Hình 8.



Hình 8. Sai số (%) so với lời giải chính xác của các lưới chia khác nhau.

Bảng 3. Sai số (%) so với lời giải chính xác của các lưới chia khác nhau (tấm chữ nhật).

Lưới chia	4x2	4x6	6x4	8x4	8x5	10x5
Sai số (%)	6,672	4,061	1,774	1,549	1,034	0,968
Lưới chia	8x8	10x8	12x8	12x10	15x10	20x10
Sai số (%)	0,876	0,531	0,399	0,35	0,241	0,211

Theo kết quả khảo sát ta thấy, để có thể đạt được một sai số xấp xỉ 1% thì chỉ cần sử dụng lưới chia 2x(8x8) và chỉ cần tăng độ mịn lưới đến lưới chia có tỷ lệ chiều dài giữa hai điểm chia trên cạnh tấm và chiều dài tấm của hai cạnh là 1/10 thì lời giải đạt được đã tương đối ổn định với sai số 1%.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã đề ra được cách xây dựng ma trận khối lượng m của phần tử HCT và ứng dụng vào phân tích dao động riêng bài toán tấm.

Sử dụng phần tử HCT đã cho các kết quả tốt, lời giải số gần như sát với lời giải chính xác khi lưới chia còn khá thô. Đặc biệt khi so sánh với phần tử được sử dụng trong phần mềm rất thông dụng hiện nay ở Việt Nam đó là Sap2000 để phân tích động lực học bài toán tấm mỏng đã cho kết quả tương đối tốt hơn. HCT đã cho kết quả hội tụ rất nhanh, số bậc tự do của phần tử này cũng ít, do đó nếu sử dụng phần tử này để phân tích sẽ không cần chia lưới mịn và có thể rút ngắn được thời gian tính toán. Một đề xuất khi sử dụng phần tử này là chỉ cần sử dụng lưới chia có tỷ lệ chiều dài giữa hai điểm chia trên cạnh tấm và chiều dài tấm là 1/10 đã có kết quả gần chính xác với sai số nhỏ hơn 1,5% cho 2 mode dao động đầu tiên như đã khảo sát.

Đặc điểm hội tụ của lời giải như một cận trên cho bài toán dao động của phần tử HCT là một đặc trưng có thể ứng dụng vào loại bài toán phân tích đối ngẫu (duality).

Tuy nhiên trong khuôn khổ một bài báo, bài nghiên cứu này mới chỉ phân tích bài toán dao động riêng không xét đến hệ số nhớt. Các vấn đề dao động khác của bài toán dao động như dao động có cản, dao động với lực kích thích … hi vọng sẽ được trình bày trong các nghiên cứu tiếp theo. Phân tích dao động bài toán vỏ mỏng là những phát triển mà các tác giả đang thực hiện.

Một hướng phát triển tương lai nữa đó là vận dụng lý thuyết tấm dày của Mindlin vào loại phần tử này cũng là những nghiên cứu khá thú vị.

CONFORMING ELEMENT HCT WITH DYNAMICS OF KIRCHHOFF PLATE

Nguyen Quang Tuyen[(1)]; Chu Quoc Thang[(2)]; Le Hoai Long[(1)]
(1) University of Technology, VNU-HCM
(2) International University, VNU-HCM

ABSTRACT: *In this paper, we will present the application of HCT element in analyzing dynamics of Kirchhoff plate. And the procedures to construct the mass matrix of HCT element will also be displayed. This paper is a development from a previous study [8]. Some numerical solutions will justify the effectiveness when using this element.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque et all, Analysis of Thin Isotropic Rectagular and Circular Plates with Multiquadrics, *Strength of Materials*, Vol. 37, No. 2, (2005)

[2]. Ansel C. Ugural, *Stresses in Plates and Shell* (Second Edition), New Jersey Institute of Texhnology – McGraw-Hill Inc (1999)

[3]. Chu Quốc Thắng, *Phương pháp phần tử hữu hạn,* NXB KHKT (1997)

[4]. Clough, R.W and C.A Felippa, A Refined Quadrilateral Element for the Analysis of Plate Bending, *Pro. Of the Second Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, (10/1968)

[5]. Eduard Ventsel and Theodor Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, (2001)

[6]. Hutton, *Fundamental of Finite Element Analysis,* McGraw-Hill, (2004)

[7]. J. H. Argyris, Energy Theorems of Structural Analysis, *Aircraft Engineering*, Vol. 26,pp. 347-356 and 383-387 (1954)

[8]. Nguyễn Ngọc Dương, *Conforming Model And Error Estimation FEM for Plate Bending and Thin Shell Structures*, Master thesis of EMMC 9, (10/2005)

[9]. Nguyễn Xuân Hùng, *Ladeveze-type compatibily error assessment for plate bending*, Master thesis of EU-EMMC, ĐH Bách Khoa TPHCM (02/2003)

[10]. Nguyễn Xuân Hùng, The equilibrium element finite model and error estimation for plate bending, *Int Congress Engineering Mechanics Today*, Ho Chi Minh City, (8/2004)

[11]. O.C.Zienkiewicz, CBE, FRS, FREng and R.T. Taylor, *The Finite Element Method*, MPG Books Ltd, (2000)

[12]. R. L.Taylor, S. Govindjee, Solution of clamped rectangular plate problem, *UCB/SEMM* (9/2002)

[13]. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Mcgraw-Hill, New York, (1959)

[14]. Trần Quốc Hùng, *Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên, độ dày, tỷ lệ các cạnh đến đặc trưng động lực học của tấm chữ nhật*, Luận văn thạc sỹ ĐH Bách Khoa TPHCM, (2001)