# VỀ ƯỚC LƯỢNG BAYES TRONG KHÔNG GIAN BANACH

**Ung Ngọc Quang**
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM
*(Bài nhận ngày 02 tháng 04 năm 2007, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 15 tháng 12 năm 2007)*

***TÓM TẮT:*** *Trong bài này, tác giả chỉ ra sự tồn tại ước lượng Bayes trong một lớp hàm đo được, bị chặn nhưng không liên tục. Tác giả cũng tìm được xấp xỉ của ước lượng Bayes trong một lớp hàm đo được, bị chặn.*
***Từ khóa:*** *Tiêu chuẩn compact tương đối, mô hình phi tuyến 2_chiều, ước lượng Bayes.*

## 1.ĐẶT VẤN ĐỀ

Thống kê Bayes nói chung và ước lượng Bayes nói riêng đang được khảo sát rộng rãi ( xem [1] – [5]). Trong [5] đã chứng minh sự tồn tại ước lượng Bayes dựa trên tiêu chuẩn về tính compact tương đối của một lớp hàm đo được bị chặn( tiêu chuẩn này tương tự như tiêu chuẩn compact tương đối của Ascoli – Arzela đã được phát triển trong [6]).

Bài này sẽ tiếp tục khảo sát ước lượng Bayes dựa vào tiêu chuẩn compact tương đối nêu trên. Trước hết ta đưa ra vài ký hiệu :

I : Không gian metric compact với metric $d(x,y), x,y \in I$ .

X : Phần tử quan trắc ngẫu nhiên có tập trị là $I$

$R^r$ : Không gian Euclide r_chiều

$\mathsf{B}(I), \mathsf{B}_r$ : Các $\sigma$ _đại số Borel trên $I$ và $R^r$

## 2. VỀ MỘT TIÊU CHUẨN COMPACT TƯƠNG ĐỐI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Xét mô hình thống kê phi tuyến có dạng:

$$X = \varphi(\theta) + \varepsilon$$

Trong đó:

$\varepsilon$ : Vectơ sai số ngẫu nhiên có trị trong $I$

$\theta$ : Tham ẩn định vị, $\theta \in \Theta$

$\varphi$ : Hàm phi tuyến cho trước, $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^r$

$\Theta$ : Tập compact thuộc $\mathbb{R}^r$

**Định nghĩa 2.1**

Hàm Borel đo được $h : (I, \mathsf{B}(I)) \to (\mathbb{R}^r, \mathsf{B}_r)$ gọi là ước lượng của tham ẩn $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$ .

Ước lượng $h$ gọi là bị chặn nếu: $\sup\limits_{x \in I} \|h(x)\|_{\mathbb{R}^r}$ .

Tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn ký hiệu là $B(I, \mathbb{R}^r)$

**Định lý 2.1**: Tập hợp $B(I, \mathbb{R}^r)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|h\|_B = \sup_{x \in I} \|h(x)\|_{\mathbb{R}^r}$$

**Định nghĩa 2.2**: Tập hợp $K \subset B(I,\mathbb{R}^r)$ gọi là đồng liên tục tại từng điểm trên I nếu $(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta_x = \delta(\varepsilon, x))$ sao cho

$$(d(x,y) < \delta_x \Rightarrow \|h(x) - h(y)\|_{\mathbb{R}^r} < \varepsilon, \forall h \in K)$$

Tập hợp $K \subset B(I,\mathbb{R}^r)$ gọi là đồng bị chặn tại từng điểm trên I nếu $(\forall x \in I, \exists M_x > 0)$ sao cho $(\|h(x)\|_{\mathbb{R}^r} \le M_x, \forall h \in K)$

Tiếp theo, ta sẽ phát biểu một tiêu chuẩn compact tương đối trong $B(I,\mathbb{R}^r)$. Tiêu chuẩn này đã được chứng minh trong [5] (xem [5], định lý 2.2).

**Định lý 2.2** (Tiêu chuẩn compact tương đối trong $B(I,\mathbb{R}^r)$ : Cho tập $K \subset B(I,\mathbb{R}^r)$ thỏa các điều kiện :

(i) K đồng liên tục tại từng điểm trên I

(ii) K đồng bị chặn từng điểm trên I

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(I,\mathbb{R}^r)$.

Ta sẽ dùng tiêu chuẩn này để khảo sát bài toán ước lượng tham ẩn $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$. Mặt khác tiêu chuẩn này khá giống tiêu chuẩn compact tương đối của Ascoli-Arzela, tức là tiêu chuẩn compact tương đối cho lớp hàm đồng liên tục và đồng bị chặn trong không gian các hàm liên tục $C(I,\mathbb{R}^r)$.

Để chứng tỏ rằng tiêu chuẩn compact tương đối này là một mở rộng đáng kể của tiêu chuẩn Ascoli-Arzela, ta phải xậy dựng một lớp hàm K gồm các hàm đo được, bị chặn nhưng không liên tục và tạo thành một tập compact tương đối trong không gian Banach $B(I,\mathbb{R}^r)$.

Định lý sau đây sẽ chỉ ra sự kiện đó cho tập $\overline{K} \subset B(I,\mathbb{R}^1)$, với $I \subset \mathbb{R}^1$ (xem [7], bài tập 576).

**Định lý 2.3** (Về một tập compact tương đối trong $B(I,\mathbb{R}^1)$): Cho tập compact $I = [0,1]$. Xét các tập hợp thuộc I có dạng:

Xét tập $K = \{f_n : n \ge 1\}$, trong đó

$$f_n = \begin{cases} 1 & x \in E_n \\ 0 & x \in E_n^c \end{cases}$$

với $E_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2i-1}{2^n}, \frac{2i}{2^n}\right]$ và $E_n^c = \bigcup_{i=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n}\right]$

Khi ấy K là tập compact tương đối trong không gian Banach $B(I) = B(I,\mathbb{R}^1)$

***Chứng minh***: Trước hết, ta thấy $diamE_n = \dfrac{2i}{2^n} - \dfrac{2i-1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$ và

$$diamE_n = \frac{2i+1}{2^n} - \frac{2i}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Ta chứng tỏ rằng K thỏa các tính chất của định lý 2.2.

Thật vậy, lấy $x \in E_n$. Ta thấy $\exists i$ sao cho $x \in \left[\frac{2i-1}{2^n}, \frac{2i}{2^n}\right]$.

Lúc đó, $\forall \varepsilon > 0$, ta chọn $\delta_x = \delta(\varepsilon, x) < \frac{1}{2^n}$.

Khi ấy với $d(x,y) < \delta_x$, ta có $d(x,y) < \frac{1}{2^n}$. Suy ra $y \in \left[\frac{2i-1}{2^n}, \frac{2i}{2^n}\right] \in E_n$

Do đó $f_n(x) = f_n(y) = 1$. Nên $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \forall f_n \in K$.

Mặt khác, lấy $x \in E_n^c$. Ta thấy $\exists i$ sao cho $x \in \left[\frac{2i}{2^n}, \frac{2i-1}{2^n}\right)$.

Lúc đó $\forall \varepsilon > 0$, ta chọn $\delta_x = \delta(\varepsilon, x) < \frac{1}{2^n}$

Khi ấy với $d(x,y) < \delta_x$, ta có $d(x,y) < \frac{1}{2^n}$

Suy ra $y \in \left[\frac{2i}{2^n}, \frac{2i-1}{2^n}\right) \in E_n^c$

Do vậy $f_n(x) = f_n(y) = 0$. Nên $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \forall f_n \in K$.

Từ đây suy ra K là họ hàm đồng liên tục tại từng điểm trên I. Hơn nữa $|f_n(x)| \le 1, \forall f_n \in K$, vậy K là họ hàm đồng bị chặn tại từng điểm trên I. Nên, theo định lý 2.2, K là tập compact tương đối trong không gian Banach $B(I) = B(I, R^1)$ và định lý 2.1 được chứng minh.

Cũng theo cách xây dựng này thì $f_n$ là các hàm gián đoạn trên $I = [0,1]$. Vậy ta đã xây dựng được một lớp hàm đo được, bị chặn, không liên tục trên I và tạo thành một lớp compact tương đối trong không gian Banach $B(I) = B(I, R^1)$.

Như vậy tiêu chuẩn compact trong định lý 2.2 là một mở rộng đáng kể của tiêu chuẩn compact tương đối Ascoli – Arzela( Về lớp hàm K, xem thêm phần phụ lục).

Trong mục 3 tiếp theo, ta sẽ dùng tiêu chuẩn compact tương đối trong định lý 2.2 để giải quyết một bài toán ước lượng tham ẩn thống kê.

## 3.ƯỚC LƯỢNG BAYES TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Ta trở lại mô hình thống kê phi tuyến đã xét trong mục 2.

$$X = \varphi(\theta) + \varepsilon$$

Ta sẽ sử dụng khái niệm như hàm tổn thất $L(h(x), \theta)$, hàm mạo hiểm $\psi(h)$, phân phối tiên nghiệm $\tau(d\theta)$, ước lượng Bayes v.v...đã trình bày trong các định nghĩa 3.3, 3.4 trong [5]. Tương tự như định lý 3.2 trong [5], ta có định lý tồn tại ước lượng Bayes như sau:

**Định lý 3.1**: Giả sử $K \subset B(I, R^r)$ là tập các ước lượng của tham ẩn $\theta \in \Theta \subset R^r$ thỏa các điều kiện:

(i) $h(I) \subset \Theta, \forall h \in K$

(ii) K đồng liên tục tại từng điểm trên I

(iii) Hàm tổn thất $L(y,\theta)$ thỏa điều kiện Lipshitz, tức là :

$$\exists C > 0 : \left|L(y',\theta) - L(y'',\theta)\right| \le C\left\|y' - y''\right\|_{R^2}, \forall y', y'' \in R^r, \forall \theta \in \Theta$$

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(I, R^r)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$, tồn tại ước lượng Bayes

Tiếp theo, ta xét bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến 2_chiều có dạng như sau:

$$X = \varphi(\theta) + \varepsilon$$

Trong đó:

I: Tập compact thuộc $\mathbb{R}^2$

X: Đại lượng quan trắc ngẫu nhiên có tập trị là $I \subset \mathbb{R}^2$

$\Theta$ : Tập compact thuộc $\mathbb{R}^2$

$\theta$: Tham ẩn định vị, $\theta \in \Theta$

$\varphi$: Hàm phi tuyến cho trước, $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^2$.

C(I): Tập các hàm liên tục xác định trên $I \subset \mathbb{R}^2$ và có trị trong $\mathbb{R}^r$

Tương tự như định lý 2.2 trong [4], ta có định lý xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ trong mô hình phi tuyến 2_chiều như sau.

**Định lý 3.2**: Cho K là tập các ước lượng của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ thoa các điều kiện của định lý 3.1.

Giả sử $\exists C' : \left|f_\theta(x)\right| \le C', \forall x \in I, \forall \theta \in \Theta$

Khi ấy có thể xây dựng được một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h}$ của tham ẩn $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$

Trong [5] đã chỉ ra đa thức ấy có dạng $P_{n+m,a}(x_1, x_2)$, với số bậc $(n+m) = (n+m)(h,\varepsilon)$ và với hệ số $a = (a^1, a^2, ..., a^r)$, trong đó

$$\hat{a}^j = \hat{a}^j_{ks} \in M((n+1)\times(m+1)), \forall j = \overline{1,r}.$$

Nhắc lại rằng, ta kí hiệu $M((n+1)\times(m+1))$ là tập hợp tất cả các ma trận có $(n+1)$ hàng và $(m+1)$ cột.

Cũng chú ý rằng số bậc $(n+m) = (n+m)(\hat{h},\varepsilon)$ nên số bậc ấy phụ thuộc vào $\hat{h} \in \overline{K}$. Mặt khác, theo định nghĩa của hàm mạo hiểm $\psi$, ta thấy $\psi(P_{n+m,a})$ chỉ phụ thuộc vào hệ số $a^j = \left(a^j\right)_{j=1}^r$, với $\hat{a}^j = \hat{a}^j_{ks} \in M((n+1)\times(m+1))$. Điều này có nghĩa, $\forall a = \left(a^j\right)_{j=1}^r, \exists! \psi(P_{n+m,a}) \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Do đó tồn tại hàm nhiều biến

$$F : \left[M((n+1)\times(m+1))\right]^r \to \overline{\mathbb{R}}^+ \text{ sao cho } F(a) = \psi(P_{n+m,a})$$

Do vậy, với $h' \in \overline{K}$ và $h' \neq \hat{h}$ sẽ tồn tại $(n'+m') = (n'+m')(h', \varepsilon)$. Từ đây suy ra tồn tại ánh xạ $F : [M((n'+1)\times(m'+1))]^r \to \overline{\mathbb{R}}^+$ được xác định bởi $F(a) = \psi(P_{n'+m',a})$.

Như vậy số bậc $n + m$ không được xác định duy nhất và do đó hàm F không được xác định trên cùng một không gian $[M((n+1)\times(m+1))]^r$. Điều này gây khó khăn cho việc xây dựng đa thức xấp xỉ $P_{n+m,a(n+m)}$.

Tuy nhiên, do tính compact của tập $\overline{K}$, điều khó khăn này có thể vượt qua bởi định lý sau.

**Định lý 3.3**: Cho tập compact $\overline{K} \subset B(I)$ và $\varepsilon > 0$ như trong định lý 3.2. Khi ấy tồn tại duy nhất $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ và đa thức tương ứng $P_{n+m,a}$ sao cho:

$$\left|\psi(h) - \psi(P_{m+n,a})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$$

***Chứng minh***: Vì $\overline{K}$ compact, nên $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại hữu hạn $h_1, h_2, ..., h_q \in \overline{K}$ sao cho:

$\overline{K} \subset \bigcup_{j=1}^{q} B(h_j, \frac{\varepsilon}{2.C.C'})$, trong đó $C, C'$ : là hằng số được xác định theo các định lý 3.1 và 3.2.

Tiếp theo, ta xét các điểm $h_1, h_2, ..., h_q \in \overline{K}$.

Trước hết với $h_1$, theo định lý 3.2, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}, m_1 \in \mathbb{N}$ và đa thức tương ứng $P_{n_1+m_1,a(n_1+m_1)}(x_1, x_2)$ có bậc $(n_1 + m_1) = (n_1 + m_1)(h_1, \varepsilon)$ và có hệ số $a(n_1, m_1) \in [M((n_1+1)\times(m_1+1))]^r$ sao cho

$$\left|\psi(h_1) - \psi(P_{n_1+m_1,a(n_1+m_1)})\right| < \varepsilon.$$

Lập luận tương tự cho các $h_j$ còn lại, cuối cùng ta thấy, với $h_q$, theo định lý 3.2, tồn tại $n_q \in \mathbb{N}, m_q \in \mathbb{N}$ và đa thức tương ứng $P_{n_q+m_q,a(n_q,m_q)}$ có số bậc $(n_q + m_q) = (n_q + m_q)(h_q, \varepsilon)$ và có hệ số $a(n_q, m_q) \in [M((n_q+1)\times(m_q+1))]^r$ sao cho

$$\left|\psi(h_q) - \psi(P_{n_q+m_q,a(n_q+m_q)})\right| < \varepsilon$$

Đặt $n = \max_{1\le j\le q}(n_j), m = \max_{1\le j\le q}(m_j)$

Khi ấy, ta tìm được đa thức $P_{n+m,a(n,m)}$ có bậc n + m và có hệ số $a(n,m) \in [M((n+1)\times(m+1))]^r$ sao cho

$$\left|\psi(h) - \psi(P_{m+n,a(n,m)})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$$

Thật vậy, lấy $\hat{h} \in \overline{K}$. Vì $\overline{K} \subset \bigcup_{j=1}^{q} B(h_j, \frac{\varepsilon}{2C.C'})$, nên tồn tại chỉ số j sao cho:

$$\left\|\hat{h} - h_j\right\|_{B(I)} < \frac{\varepsilon}{2C.C'}$$

Do đó: $\left|\psi(\hat{h}) - \psi(h_j)\right| \le \int_{\Theta}\int_{I}\left|L(\hat{h}(x), \theta) - L(h_j(x), \theta)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$

$$\leq \int_{\Theta}\int_{I} C\left\|\hat{h}(x)-h_j(x)\right\|_{R^r} f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$= \int_{\Theta}\int_{I} C\left\|\hat{h}-h_j\right\|_{B(I)} f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Vậy $\left|\psi(\hat{h})-\psi(h_j)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Mặt khác, với $h_j \in B(I)$ như trên, theo định lý 3.2, tồn tại hàm $g_j \in C(I)$ sao cho

$$\left|\psi(h_j)-\psi(g_j)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

với hàm $g_j$ này, sẽ tồn tại các số nguyên dương $n_j, m_j$ và đa thức tương ứng với chúng là $P_{n_j+m_j}$ có bậc $n_j+m_j$ và có hệ số $a(n_j,m_j) \in \left[M((n_j+1)\times(m_j+1))\right]^r$ sao cho

$$\left\|g_j - P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}\right\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4C.C'}$$

Suy ra:

$$\left|\psi(g_j)-\psi(P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)})\right| \leq \int_{\Theta}\int_{I}\left|L(g_j(x_1,x_2),\theta)-L(P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}(x_1,x_2),\theta)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\leq \int_{\Theta}\int_{I} C\left\|g_j - P_{n_j+m_j}\right\|_{C(I)} f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

Tiếp theo, vì $n = \max_{1\leq j\leq q}(n_j), m = \max_{1\leq j\leq q}(m_j)$, nên ta xây dựng được đa thức $P_{n+m,a(n,m)}$ có bậc m + n và có hệ số $a(n,m) \in \left[M((n+1)\times(m+1))\right]^r$ thỏa tính chất sau:

$$P_{n+m,a(n,m)}(x_1,x_2) = P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}(x_1,x_2) + 0.x_1^{n_j+1}.x_2^{m_j+1} + \ldots + 0.x_1^n.x_2^m = P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}(x_1,x_2)$$

Khi ấy: $\left|g_j(x_1,x_2) - P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}(x_1,x_2)\right| = \left|g_j(x_1,x_2) - P_{n+m,a(n,m)}(x_1,x_2)\right|$

Do đó: $\left\|g_j(x_1,x_2) - P_{n_j+m_j,a(n_j,m_j)}(x_1,x_2)\right\|_{C(I)} = \left\|g_j(x_1,x_2) - P_{n+m,a(n,m)}(x_1,x_2)\right\|_{C(I)}$

Suy ra: $\left\|g_j(x_1,x_2) - P_{n+m,a(n,m)}(x_1,x_2)\right\|_{C(I)} < \dfrac{\varepsilon}{4C.C'}$

Vậy nên: $\left|\psi(g_j)-\psi(P_{n+m,a(n,m)})\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Cuối cùng: $\left|\psi(\hat{h})-\psi(P_{n+m,a(n,m)})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$ và định lý chứng minh xong.

# ON THE BAYESIAN ESTIMATORS IN A BANACH SPACE

**Ung Ngoc Quang**
University of Natural Sciences, VNU – HCM

***ABSTRACT***: *In this paper, we prove existence of Bayesian estimators in a class bounded measurable and noncontiguous functions. We investigated an approximation for the Bayesian estimators in the 2_dimensional nonlinear models.*

***Keywords***: *Relatively compact criterion, nonlinear statistical models, Bayesian estimators.*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. P.M. Lee, *Bayesian statistics*, Oxford University Press (2004).

[2]. P. Condon, *Bayesian statistical modeling*, John Wiley (2005).

[3]. Ung Ngoc Quang, *On the existence of Bayesian estimates in nonlinear statistical models with compact parameter space*, Acta. Math. Vietnamica, Vol.19, No.2, 149 – 160 (1994).

[4]. Ung Ngọc Quang, *Xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình hồi quy phi tuyến 2_chiều*, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ, Tập 8, số 11 (2005), 5-15.

[5]. Ung Ngọc Quang, *Về tiêu chuẩn compact tương đối trong không gian hàm và ứng dụng trong cấu trúc thống kê*, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ, Tập 9, số 9 (2006), 5-16.

[6]. R.Meise, D.Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, (1997).

[7]. Yu.S.Otran, *Bài tập lý thuyết hàm số, biến số thực*, NXB Đại học, Hà Nội, (1979).

## PHỤ LỤC

Trong phụ lục này, ta mô tả và biểu thị bằng hình vẽ hàm đo được, bị chặn, không liên tục đã được khảo sát trong định lý 2.3

Xét đoạn *I = [0,1]*. Ta đặt $E_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], E_1^c = \left[0, \frac{1}{2}\right)$

Lúc đó $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_1 \\ 0 & x \in E_1^c \end{cases}$

Đặt $E_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right] = \bigcup_{i=1}^{2^{2-1}} \left[\frac{2i-1}{2^2}, \frac{2i}{2^2}\right]; E_2^c = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right) = \bigcup_{i=0}^{2^{2-1}-1} \left[\frac{2i}{2^2}, \frac{2i+1}{2^2}\right)$

Lúc đó $f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_2 \\ 0 & x \in E_2^c \end{cases}$

Đặt

$$E_3=\left[\frac{1}{2^3},\frac{2}{2^3}\right]\cup\left[\frac{3}{2^3},\frac{4}{2^3}\right]\cup\left[\frac{5}{2^3},\frac{6}{2^3}\right]\cup\left[\frac{7}{2^3},\frac{8}{2^3}\right]=\bigcup_{i=1}^{2^{3-1}}\left[\frac{2i-1}{2^3},\frac{2i}{2^3}\right]$$

$$E_3^c=\left[0,\frac{1}{2^3}\right)\cup\left[\frac{2}{2^3},\frac{3}{2^3}\right)\cup\left[\frac{4}{2^3},\frac{5}{2^3}\right)\cup\left[\frac{6}{2^3},\frac{7}{2^3}\right)=\bigcup_{i=0}^{2^{3-1}-1}\left[\frac{2i}{2^3},\frac{2i+1}{2^3}\right)$$

Lúc đó $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in E_3\\ 0 & x\in E_3^c\end{cases}$

Đặt

$$E_4=\left[\frac{1}{2^4},\frac{2}{2^4}\right]\cup\left[\frac{3}{2^4},\frac{4}{2^4}\right]\cup\left[\frac{5}{2^4},\frac{6}{2^4}\right]\cup\left[\frac{7}{2^4},\frac{8}{2^4}\right]\cup\left[\frac{9}{2^4},\frac{10}{2^4}\right]\cup$$

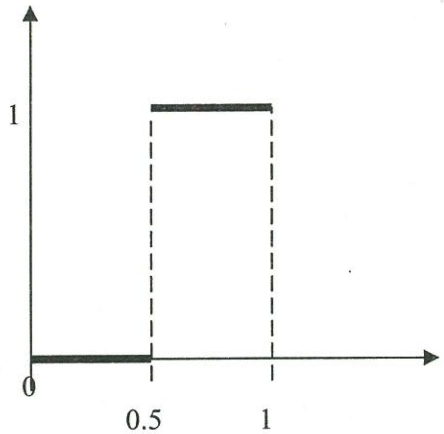
$$\cup\left[\frac{11}{2^3},\frac{12}{2^3}\right]\cup\left[\frac{13}{2^4},\frac{14}{2^4}\right]\cup\left[\frac{15}{2^4},\frac{16}{2^4}\right]=\bigcup_{i=1}^{2^{4-1}}\left[\frac{2i-1}{2^4},\frac{2i}{2^4}\right]$$

$$E_4^c=\left[0,\frac{1}{2^4}\right)\cup\left[\frac{2}{2^4},\frac{3}{2^4}\right)\cup\left[\frac{4}{2^4},\frac{5}{2^4}\right)\cup\left[\frac{6}{2^4},\frac{7}{2^4}\right)\cup\left[\frac{8}{2^4},\frac{9}{2^4}\right)\cup$$

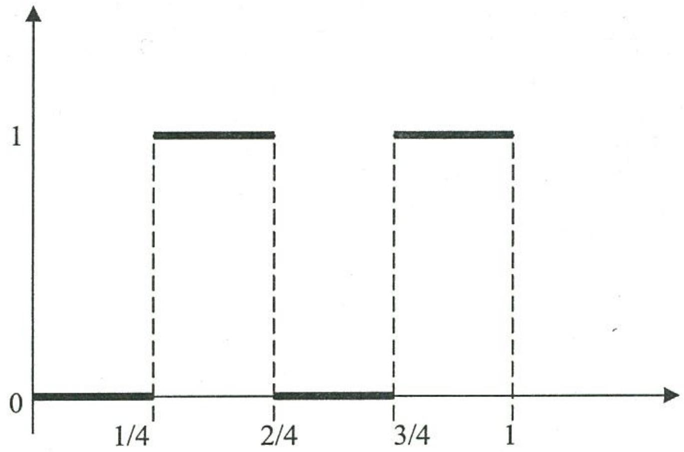
$$\cup\left[\frac{10}{2^4},\frac{11}{2^4}\right)\cup\left[\frac{12}{2^4},\frac{13}{2^4}\right)\cup\left[\frac{14}{2^4},\frac{15}{2^4}\right)=\bigcup_{i=0}^{2^{4-1}-1}\left[\frac{2i}{2^4},\frac{2i+1}{2^4}\right)$$

Lúc đó $f_4(x)=\begin{cases}1 & x\in E_4\\ 0 & x\in E_4^c\end{cases}$

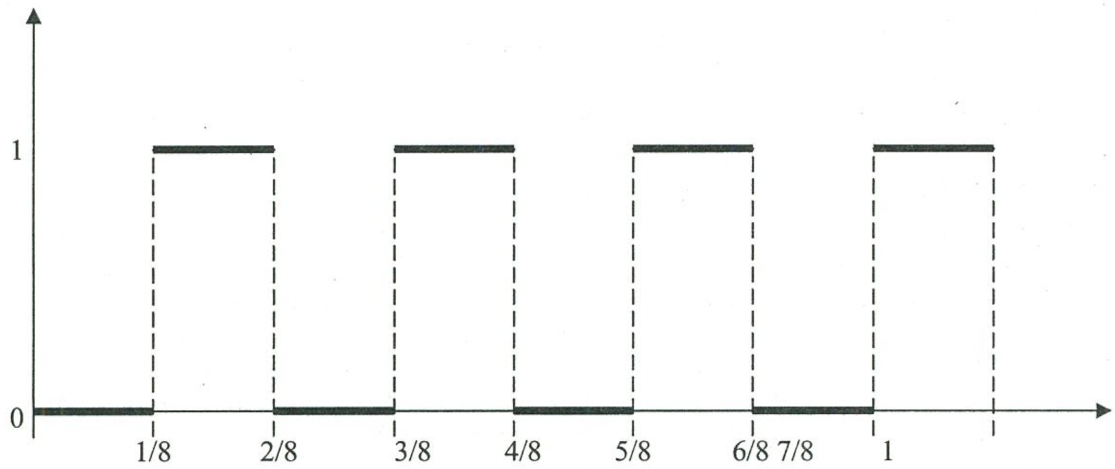
**Các hình vẽ:**




**Hình 1** (cho hàm $f_1(x)$)




**Hình 2**.(cho hàm $f_2(x)$)




**Hình 3** (cho hàm $f_3(x)$)