TÍNH TOÁN KHUNG PHẲNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ RỜI RẠC BIẾN THẾ SỬ DỤNG MÔ HÌNH CHUYỂN VỊ

Nguyễn Công Chí, Nguyễn Thị Hiền Lương
Trường Đại Học Bách Khoa, ĐHQG- HCM.
(Bài nhận ngày 28 tháng 11 năm 2005, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 10 tháng 09 năm 2006)

TÓM TẮT. *Trong các phương pháp tính toán kết cấu, phương pháp Phần tử Hữu hạn (PTHH) được sử dụng rộng rãi và có độ chính xác cao. Tuy nhiên, việc tìm kiếm những phương pháp mô phỏng khác, tin cậy và đơn giản, để giải quyết những lớp bài toán đặc thù khác nhau vẫn rất cần thiết. Trong bài báo này, tác giả giới thiệu một phương pháp tính toán nội lực dầm, khung phẳng- phương pháp Phần tử Rời rạc Biến thể (PTRRBT). Chương trình KHUNGPHANG xây dựng trên Matlab 6, dựa trên cơ sở phương pháp này được dùng để khảo sát một số ví dụ, Kết quả cho thấy phương pháp PTRRBT sử dụng đơn giản và hiệu quả cao.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, với sự tiến bộ của công nghệ thông tin, việc ứng dụng máy tính vào việc giải quyết các bài toán kỹ thuật đã trở nên gần gũi. Để có thể ứng dụng máy tính, ta cần phải mô phỏng các ứng xử của hệ thật, chuyển chúng thành các hệ phương trình, sử dụng tốc độ và độ tin cậy của máy tính để giải các hệ phương trình này.Trong tính toán kết cấu, ta có thể dùng nhiều phương pháp khác nhau: phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp Phần tử Hữu hạn (PTHH) [1-6]... Trong đó, phương pháp PTHH, với sự trợ giúp của máy tính, đang được ứng dụng rộng rãi trong các bài toán kỹ thuật. Tuy nhiên, việc tìm kiếm thêm những phương pháp mô phỏng mới, tin cậy và đơn giản, để giải quyết những lớp bài toán đặc thù vẫn rất cần thiết.

Bài báo giới thiệu phương pháp *Phần tử Rời rạc Biến thể* (PTRRBT) sử dụng mô hình chuyển vị với các bậc tự do là các chuyển vị thẳng và áp dụng phương pháp này để tính toán kết cấu. Phương pháp này được xây dựng dựa trên cơ sở ý tưởng phương pháp Phần tử Rời rạc (PTRR) đã được trình bày trong [1]. Để ứng dụng trong việc tính toán khung phẳng, trong [1, 2] đã giới thiệu các công thức tính toán khung phẳng với các bậc tự do là các góc xoay của phần tử. Tuy có những kết quả khả quan nhưng cách giải chưa tổng quát, khó áp dụng cho các bài toán lớn với mô hình phức tạp (khung nhiều tầng nhiều nhịp, liên kết đàn hồi với đất, chịu tải moment tập trung...). Trong [1] cũng đề cập tới mô hình PTRR sử dụng mô hình chuyển vị với các bậc tự do là các chuyển vị thẳng, nhưng việc xác định các ma trận độ cứng còn phức tạp, cần phải nội suy thêm sử dụng ma trận hiệu (submatrix).

Trong bài báo này, trên cơ sở phương pháp PTRRBT, tác giả đặt mục đích xây dựng các công thức ma trận của phần tử mẫu, ghép nối các phần tử mẫu, và tính toán dầm, khung phẳng. Chương trình *KHUNGPHANG* xây dựng trên Matlab 6.0 dựa trên cơ sở phương pháp PTRRBT được sử dụng để khảo sát một số ví dụ và so sánh với phương pháp giải tích. Kết quả số của các phương pháp trên được biểu diễn bằng đồ thị và kết hợp so sánh.

2.PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ RỜI RẠC BIẾN THẾ

2.1.Phương pháp Phần tử Rời rạc

Ý tưởng cơ bản của phương pháp PTRR được trình bày trong [1] là xấp xỉ đường đàn hồi của hệ thành n thanh cứng nối với nhau bởi các lò xo xoay. Độ cứng lò xo xoay:

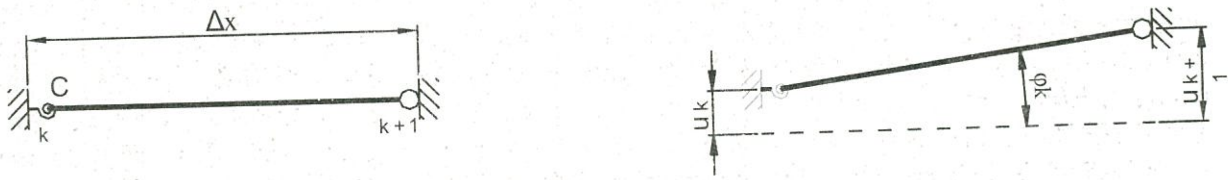
$$C = \frac{EI}{\Delta x} \qquad (1)$$

Năng lượng tích luỹ trong mỗi lò xo xoay:

$$U_i = \frac{1}{2} C_i (\Delta \psi_i)^2 \quad (2)$$

với $\Delta\psi_i$ là độ lệch góc xoay của hai phần tử liên kết với lò xo xoay. Năng lượng tích lũy trong hệ bằng tổng năng lượng tích lũy trong các lò xo xoay.

Phương pháp PTRR [1] sử dụng các biến số là các góc xoay phần tử. Khi chuyển sang sử dụng các biến số là các chuyển vị thẳng, trong [1] xác định 2 loại phần tử: một có liên kết lò xo xoay ở một đầu, đầu còn lại là liên kết khớp (phần tử có liên kết khớp với đất), và một loại có liên kết lò xo xoay ở hai đầu. Mô hình loại đầu tiên như ở Hình 1.



Hình 1. Mô hình phần tử mẫu PTRR sử dụng các biến chuyển vị nút của El Naschie [1]

Năng lượng tích luỹ trong phần tử:

$$U = \frac{1}{2} C\varphi_k^2 = \frac{C}{2\Delta x^2}\left(u_{k+1}^2 - 2u_k u_{k+1} + u_k^2\right) \quad (3)$$

Từ điều kiện thế năng toàn phần dừng, từ biểu thức $(\partial U/\partial u_k)$ và $(\partial U/\partial u_{k+1})$ ta xác định được ma trận độ cứng phần tử:

$$[k] = \frac{C}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Với loại phần tử có lò xo xoay ở cả 2 đầu thì ma trận độ cứng được xác định tương tự và chỉ khác ma trận ở (4) ở chỗ được nhân đôi:

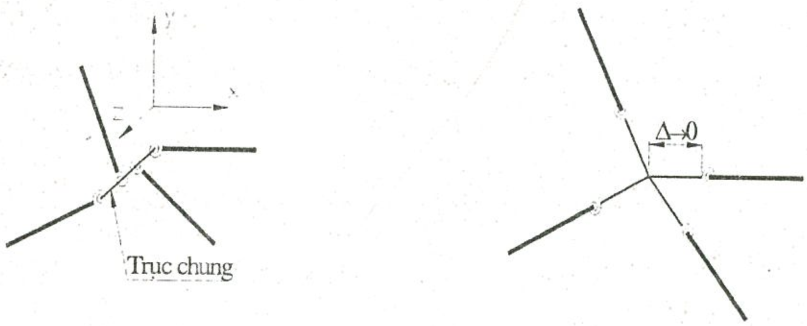
$$[k] = 2\frac{C}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Khi tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử thành ma trận độ cứng tổng thể giống như phương pháp PTHH thì năng lượng tích lũy tại mỗi khớp đàn hồi là $\frac{1}{2}C\left(\varphi_k^2 + \varphi_{k+1}^2\right)$, trong khi thực tế, năng lượng tích lũy này là $\frac{1}{2}C(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$ nên ma trận độ cứng tổng thể thu được không chính xác, phải hiệu chỉnh. Trong [1] đã hiệu chỉnh bằng cách xác lập ma trận độ cứng tổng thể từ hệ ban đầu, sau đó so sánh với ma trận được ghép nối từ ma trận độ cứng phần tử và tìm ra ma trận hiệu (*submatrix*) [1].

Như vậy, bằng phương pháp PTRR trong [1] đã thu được kết quả phù hợp với nghiệm giải tích khi áp dụng tính toán các ví dụ khung phẳng nhưng vẫn còn tồn tại một số khó khăn: khó xác định độ cứng lò xo xoay khi liên kết hai hoặc nhiều hơn hai phần tử, liên kết các phần tử có chiều dài hoặc độ cứng khác nhau, khó xác định độ cứng lò xo xoay liên kết hệ với đất trong trường hợp tổng quát, chưa thấy đề cập cách tính công do moment tập trung gây ra, độ chính xác của nghiệm còn thấp… Phương pháp PTRRBT được đề xuất để khắc phục những khó khăn kể trên.

2.2.Phương pháp PTRR biến thể

Tại mỗi lò xo xoay liên kết n phần tử, ta phân tích lò xo xoay này thành *n* lò xo xoay mắc nối tiếp [6]. Các lò xo xoay nối với nhau tại một *trục chung*, và trục này cũng có thể xoay được trong mặt phẳng. Mô hình phân tích này được thể hiện trong Hình 2.

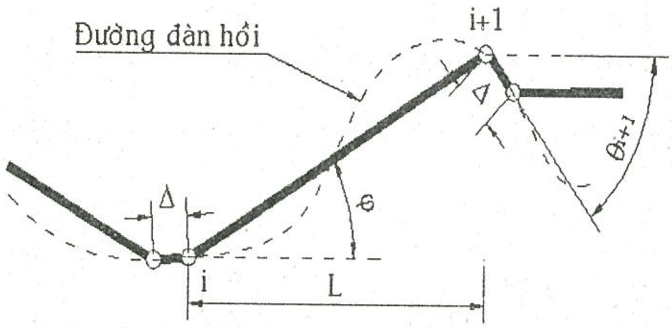


(a) Biểu diễn không gian (b) Biểu diễn trên mặt phẳng

Hình 2. Mô hình PTRR biến thể

Ở hình 2(a), các lò xo được gắn vào một trục chung tuyệt đối cứng vuông góc với mặt phẳng chứa các phần tử. Góc xoay của trục chung trong mặt phẳng XY là góc θ, góc xoay của phần tử quanh trục chung là góc φ. Khi chiếu bằng, các lò xo xoay sẽ trùng lên nhau. Để dễ quan sát, ta tách các lò xo ra khỏi trục chung một đoạn Δ như ở Hình 2(b), với giả thiết $\Delta \rightarrow 0$.

Để xác định độ cứng lò xo tại mỗi đầu phần tử, ta xét mô hình sau:



Hình 3. Mô hình xác định độ cứng lò xo xoay.

Khai triển Taylor đường đàn hồi lân cận điểm i, chỉ xét đến bậc 2:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{6}$$

Ta có:
$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = L \\ \varphi \approx \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{L} \\ y'(x_i) = \theta_i \; khi\, \Delta \rightarrow 0 \\ y''(x_i) = \dfrac{M_i}{EI} \\ M = C\Delta\psi \end{cases} \tag{7}$$

Với $\Delta\psi$ là độ lệch hai góc xoay giữa hai đầu lò xo xoay. Thế (7) vào (6), ta xác định được:

$$C_i = 2\frac{EI}{L} \tag{8}$$

Tương tự cho điểm x_{i+1}, ta có:

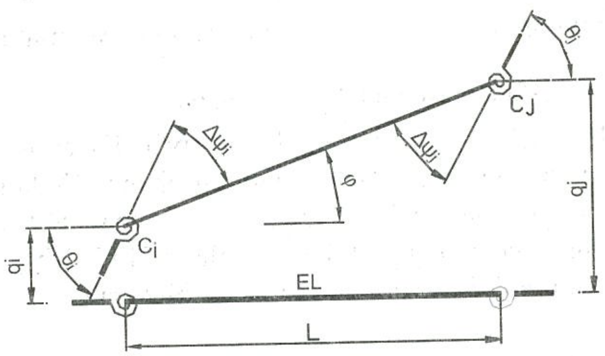
$$C_{i+1} = 2\frac{EI}{L} \tag{9}$$

Như vậy, mỗi phần tử sẽ có hai lò xo xoay ở hai đầu, mỗi lò xo có giá trị $C = 2\dfrac{EI}{L}$. Nếu hai phần tử cùng độ cứng EI, cùng chiều dài nối với nhau thì lò xo xoay giữa chúng có giá trị $C_{td} = C/2 = EI/L$, trùng với cách tính theo [1].

3.PHẦN TỬ MẪU – CÁC CÔNG THỨC MA TRẬN PTRRBT

3.1.Các công thức ma trận

Xét phần tử như hình vẽ:



Hình 4. Phần tử Rời rạc biến thể

Trường chuyển vị nút phần tử là $\{q_e\} = \{q_i, \theta_i, q_j, \theta_j\}^T$. Vì chuyển vị là bé nên ta có thể xấp xỉ $\varphi \approx \sin\varphi = \dfrac{q_j - q_i}{L}$. Ta có:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \dfrac{q_j - q_i}{L} \\ \dfrac{q_j - q_i}{L} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ \theta_i \\ q_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [F]\{q_e\} \tag{10}$$

Với $[F] = \dfrac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ được gọi là *ma trận tính góc nghiêng phần tử.*

$$\begin{aligned} \{\Delta\psi\} &= \begin{Bmatrix} \Delta\psi_i \\ \Delta\psi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_i - \theta_i \\ \theta_j - \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\{\varphi\} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & L \end{bmatrix}\{q_e\} = [S]\{q_e\} \end{aligned} \tag{11}$$

Với $[S] = \dfrac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & L \end{bmatrix}$ được gọi là *ma trận tính độ lệch góc xoay của phần tử.*

Moment phát sinh tại các lò xo xoay :

$$[M] = \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_i\Delta\psi_i \\ C_j\Delta\psi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & C_j \end{bmatrix}\{\Delta\psi\} = [C][S]\{q_e\} \tag{12}$$

Với $[C] = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & C_j \end{bmatrix}$ là *ma trận độ cứng các lò xo xoay.* Thế năng biến dạng đàn hồi tích luỹ trong hệ là:

$$U_e = \frac{1}{2}[M]^T\{\Delta\psi\} = \frac{1}{2}\{q_e\}^T[B]^T[C]^T[B]\{q_e\} = \frac{1}{2}\{q_e\}^T[K_e]\{q_e\} \tag{13}$$

Với $$[K_e] = [B]^T[C]^T[B] = \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} (C_i + C_j) & C_i L & -(C_i + C_j) & C_j L \\ & C_i L^2 & -C_i L & 0 \\ & & (C_i + C_j) & -C_j L \\ & DX & & C_j L^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ma trận $[K_e]$ được gọi là *ma trận độ cứng phần tử.*

Giả thiết rằng hệ lực tác động lên hệ kết cấu chỉ đặt tại các nút. Gọi $\{P_n\}$ là các ngoại lực tập trung tác động lên các nút theo các bậc tự do tương ứng. Khi hệ kết cấu có chuyển vị $\{\overline{q}\}$ thì công do ngoại lực $\{P_n\}$ sinh ra là:

$$A = \{\overline{q}\}^T\{P_n\} \tag{15}$$

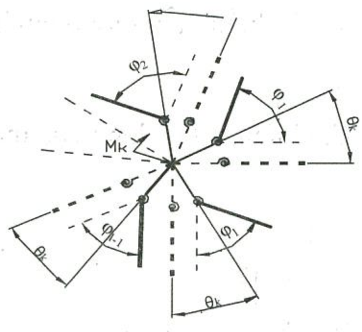
Tương tự phương pháp PTHH ([4]), ta ghép nối các ma trận của phần tử mẫu vào ma trận tổng thể của hệ, áp đặt các điều kiện biên. Hệ phương trình để giải của hệ có dạng:

$$[\overline{K}]\{\overline{q}\} = \{P_n\} \tag{16}$$

Trong đó, $[\overline{K}]$ là *ma trận độ cứng tổng thể*, được ghép nối từ các ma trận độ cứng phần tử, $\{\overline{q}\}$- trường chuyển vị tổng thể, bao gồm *chuyển vị thẳng tổng thể* $\{\overline{q^q}\}$, và *chuyển vị xoay tổng thể* $\{\overline{q^\theta}\}$.

3.2.Phép đổi biến

Theo cách trình bày trên, phương pháp PTRR tương đương với phương pháp PTHH về mặt số lượng công thức, khối lượng tính toán. Cũng có thể xem phương pháp PTRR là trường hợp đặc biệt của phương pháp PTHH khi hàm dạng là không liên tục. Tuy nhiên, ở phương pháp PTRR, trên cơ sở mô hình các phần tử là những đoạn thẳng nối với nhau bằng các lò xo xoay, biến dạng của hệ kết cấu liên tục có thể biểu diễn bằng các quan hệ hình học nên việc thiết lập các công thức tính toán cho phương pháp PTRR đơn giản hơn. Nếu như ở phương pháp PTHH, các biến là độc lập với nhau, thì trong phương pháp PTRR, do có quan hệ các biến góc xoay và các biến chuyển vị thẳng phụ thuộc nhau, nên ta có thể giảm không gian biến trong phương pháp PTRR thông qua *Phép đổi biến.* Ta có trường chuyển vị phần tử là $\{q_e\} = \{q_i, \theta_i, q_j, \theta_j\}^T$. Có nghĩa là tại mỗi nút, ngoài các chuyển vị thẳng, ta còn có các chuyển vị xoay. Xét tại nút thứ k như trên Hình 5.



Hình 5. Chuyển vị tại nút k

Nút có moment tập trung M_k, được liên kết với đất bằng một lò xo xoay C_{dk}. Gắn vào nút là l phần tử có các độ cứng lò xo xoay là C_{klm}. Nút có chuyển vị như H.5. Chiều dương của góc xoay và moment là ngược chiều kim đồng hồ. Ở C_{klm}, *k* là số hiệu nút. *l*- số phần tử liên kết với nút, m lấy giá trị i hoặc j, là chỉ số của lò xo xoay của phần tử thứ l liên kết với nút thứ k (vì phần tử thứ l liên kết với nút k bằng một trong hai lò xo xoay của nó).

Moment phát sinh tại mỗi lò xo xoay của phần tử:

$$M_{klm} = C_{klm}(\varphi_l - \theta_k) \tag{17}$$

Moment phát sinh tại lò xo xoay liên kết với đất:

$$M_{kd} = -C_{kd}\theta_k \tag{18}$$

Vì nút cân bằng nên tổng moment tác động lên nút phải bằng 0:

$$M_k + \sum C_{klm}(\varphi_l - \theta_k) - C_{dk}\theta_k = 0$$

$$\text{Suy ra: } \theta_k = \frac{\sum C_{klm}\varphi_l}{C_{dk} + \sum C_{klm}} + \frac{M_k}{C_{dk} + \sum C_{klm}} \tag{19}$$

Ứng với mỗi phần tử thứ l, ta có:

$$C_{klm}\varphi_l = C_{klm}\left(\frac{q_{lj} - q_{li}}{L_l}\right) = \frac{C_{klm}}{L_l}[-1 \quad 1]\{q_{el}^{q}\}$$

$$= \frac{C_{klm}}{L_l}[-1 \quad 1][T_{el}^{q}]\{q_{el}^{q\prime}\} = \frac{C_{klm}}{L_l}[-1 \quad 1][T_{el}^{q}][L_{el}^{q}]\{\overline{q^{q}}\} \tag{20}$$

$$C_{klm}\varphi_l = \{D_l\}\{\overline{q^{q}}\}$$

Với $\{q_{el}^{q}\}$- trường chuyển vị phần tử chỉ bao gồm các chuyển vị thẳng, $\lfloor T_{el}^{q} \rfloor$- ma trận biến đổi trục toạ độ chỉ bao gồm các chuyển vị thẳng và $\lfloor L_{el}^{q} \rfloor$- ma trận định vị phần tử bao gồm các chuyển vị thẳng vào $\{\overline{q^{q}}\}$.

$$\{D_l\} = \frac{C_{klm}}{L_l}[-1 \quad 1][T_{el}^{q}][L_{el}^{q}]$$

Thế (20) vào (19) ta có:

$$\theta_k = \left(\frac{\sum\{D_l\}}{C_{dk} + \sum C_{klm}}\right)\{\overline{q^{q}}\} + \frac{M_k}{C_{dk} + \sum C_{klm}} = \{Q_k\}\{\overline{q^{q}}\} + R_k \tag{21}$$

Với $\{Q_k\} = \left(\dfrac{\sum\{D_l\}}{C_{dk} + \sum C_{klm}}\right)$ là ma trận biểu diễn mối quan hệ giữa θ_k và $\{\overline{q^{q}}\}$.

$R_k = \dfrac{M_k}{C_{dk} + \sum C_{klm}}$ là thừa số thể hiện sự tác động của moment tập trung.

Ghép nối các θ_k ta có:

$$\{\overline{q^{\theta}}\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{Q_1\} \\ \{Q_2\} \\ \vdots \\ \{Q_r\} \end{bmatrix}\{\overline{q^{q}}\} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{Bmatrix} = [Q]\{\overline{q^{q}}\} + \{R\} \tag{22}$$

Với $\left\{\overline{q^{\theta}}\right\}$- trường chuyển vị tổng thể chỉ bao gồm các chuyển vị xoay, $[Q]$- ma trận có hàng thứ i là ma trận $\{Q_i\}$ và $\{R\}$-ma trận cột có hàng thứ i là R_k. Sắp xếp lại trường chuyển vị tổng thể $\left\{\overline{q}\right\}$ ta có:

$$\left\{\overline{q}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overline{q^{q}} \\ \overline{q^{\theta}}\end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix}[I] \\ [Q]\end{bmatrix}\left\{\overline{q^{q}}\right\} - \begin{bmatrix}\{0\} \\ \{R\}\end{bmatrix} = [J]\left\{\overline{q^{q}}\right\} + \left\{\overline{R}\right\} \tag{23}$$

Với $[J] = \begin{bmatrix}[I] \\ [Q]\end{bmatrix}$ gọi là *ma trận đổi biến,* $\left\{\overline{R}\right\} = \left\{\begin{matrix}\{0\} \\ \{R\}\end{matrix}\right\}$- ma trận chứa các moment tập trung.

Từ (23), ta thu được:

$$\frac{\partial\left\{\overline{q}\right\}}{\partial\left\{\overline{q^{q}}\right\}} = [J] \tag{24}$$

Nếu θ_k là hằng số (áp điều kiện biên góc xoay) thì đạo hàm của nó với $\left\{\overline{q^{q}}\right\}$ bằng 0. Khi đó, ma trận $[J]$ sẽ có hàng $\{Q_k\} = \{0\}$.

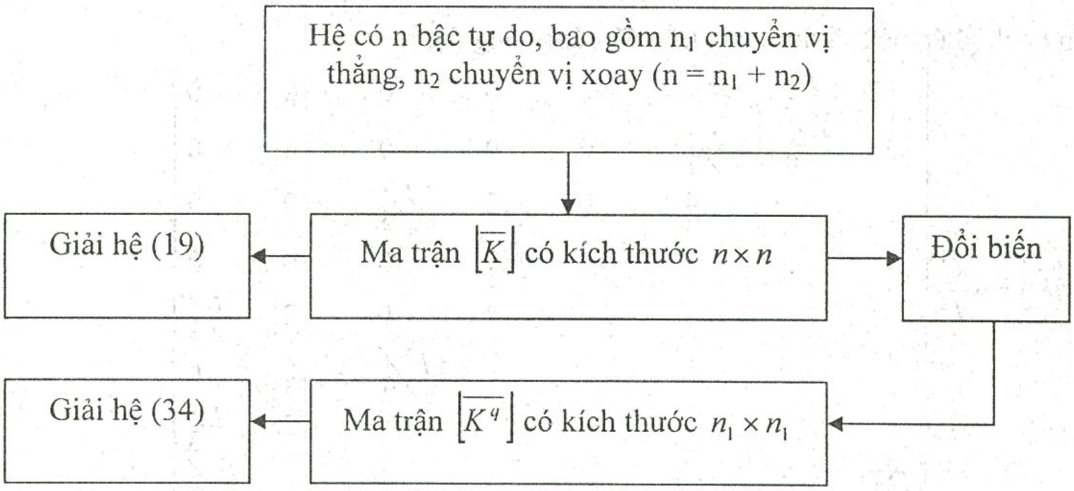
Áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng (nguyên lý Lagrange), ta sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại các điểm nút:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\left\{\overline{q^{q}}\right\}} = \frac{\partial U}{\partial\left\{\overline{q^{q}}\right\}} - \frac{\partial A}{\partial\left\{\overline{q^{q}}\right\}} = 0 \tag{25}$$

Suy ra $\left[\overline{K^{q}}\right]\left\{\overline{q^{q}}\right\} = \left[\overline{P^{q}}\right]$ gọi là hệ phương trình để giải (26)

Với $\left[\overline{K^{q}}\right] = [J]^{T}\left[\overline{K}\right][J]$, (27)

$$\left[\overline{P^{q}}\right] = [J]^{T}\{P_n\} + [J]^{T}\left[\overline{K}\right]\left\{\overline{R}\right\} \tag{28}$$

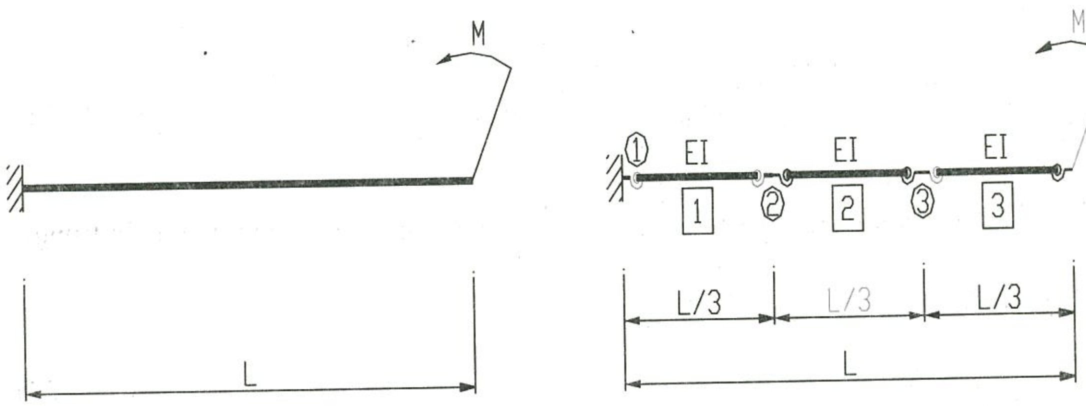


Hình 6. Lưu đồ tính toán

Hệ (26) là hệ phương trình cân bằng nút tổng thể có dạng quen thuộc tương tự hệ (16) nhưng với trường chuyển vị nút tổng thể chỉ còn lại các chuyển vị thẳng, các chuyển vị xoay bị loại bỏ nên số ẩn số phải tìm sẽ ít hơn. Sự khác biệt giữa việc giải hệ theo (16) và giải hệ (26) được tóm tắt qua sơ đồ ở Hình 6.

4.VÍ DỤ MINH HỌA

4.1.Ví dụ 1: Dầm console chịu moment tập trung (Hình 7).



(a) Bài toán thực tế (b) Mô hình Phần tử Rời rạc

Hình 7. Bài toán dầm console chịu moment tập trung

Ta chia dầm thành ba phần tử rời rạc. Các phần tử có cùng tiết diện và chiều dài bằng nhau nên độ cứng lò xo xoay tại các đầu phần tử là giống nhau và bằng $C = \dfrac{2EI}{L/3} = 6\dfrac{EI}{L}$. Ma trận độ cứng phần tử của các phần tử là:

$$[K_e]_1 = [K_e]_2 = [K_e]_3 = 9\frac{C}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & L/3 & -2 & L/3 \\ & L^2/9 & -L/3 & 0 \\ & & 2 & -L/3 \\ DX & & & L^2/9 \end{bmatrix}$$

Tiến hành ghép nối, ta được ma trận độ cứng tổng thể:

$$\left[\overline{K}\right] = 9\frac{C}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & L/3 & -2 & L/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2/9 & -L/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & -2 & L/3 & 0 & 0 \\ & & & 2L^2/9 & -L/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4 & 0 & -2 & L/3 \\ & & & & & 2L^2/9 & -L/3 & 0 \\ & & & & & & 2 & -L/3 \\ DX & & & & & & & L^2/9 \end{bmatrix}$$

Vectơ tải trọng $\{P_n\} = \{0,0,0,0,0,0,0,M\}^T$. Áp điều kiện biên $\{q_1, q_2\}^T = \{0,0\}^T$ ta giải được bài toán với nghiệm là:

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \\ \bar{q}_7 \\ \bar{q}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \\ q_2 \\ \theta_2 \\ q_3 \\ \theta_3 \\ q_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}\frac{ML}{C} \\ 2\frac{M}{C} \\ \frac{4}{3}\frac{ML}{C} \\ 4\frac{M}{C} \\ 3\frac{ML}{C} \\ 6\frac{M}{C} \end{Bmatrix}$$

Xét $q_4 = 3\frac{ML}{C} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{EI}$. Chú ý trong [1] không trình bày cách thức xác định nội lực trong trường hợp chịu moment tập trung. Ở đây, kết quả chính xác của trường hợp này là $\frac{1}{2}\frac{ML^2}{EI}$.

Tiến hành đổi biến: vì có moment tập trung nên ta xác định ma trận $\{\bar{R}\} = \frac{M}{C}\{0,0,0,0,0,0,0,1\}$.

Ma trận $[\bar{K}]$ được sắp xếp lại:

$$[\bar{K}] = 9\frac{C}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & L/3 & L/3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & -L/3 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & -L/3 & 0 & L/3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -L/3 & -L/3 \\ L/3 & -L/3 & 0 & 0 & L^2/9 & 0 & 0 & 0 \\ L/3 & 0 & -L/3 & 0 & 0 & 2L^2/9 & 0 & 0 \\ 0 & L/3 & 0 & -L/3 & 0 & 0 & 2L^2/9 & 0 \\ 0 & 0 & L/3 & -L/3 & 0 & 0 & 0 & L^2/9 \end{bmatrix}$$

Ma trận $[Q] = \frac{3}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[J] = \frac{3}{L}\begin{bmatrix} L/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Vì góc xoay $\theta_1 = 0$, áp các điều kiện biên về góc xoay vào các ma trận $[\bar{K}], [J]$ ta có:

$$\left[\overline{K^q}\right]=[J]^T\left[\overline{K}\right][J]=9\frac{C}{L^2}\begin{bmatrix} 3/2 & -2 & 1/2 & 0 \\ & 7/2 & -2 & 1/2 \\ & & 5/2 & -1 \\ DX & & & 1/2 \end{bmatrix}$$

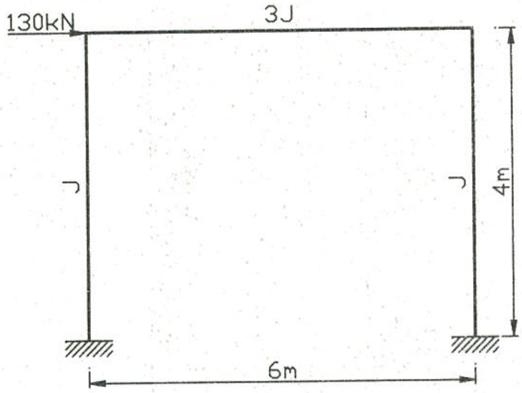
$$\left[\overline{P^q}\right]=[J]^T\{P_n\}+[J]^T\left[\overline{K}\right]\left\{\overline{R}\right\}=3\frac{M}{L}\{0,0,-1,1\}^T$$

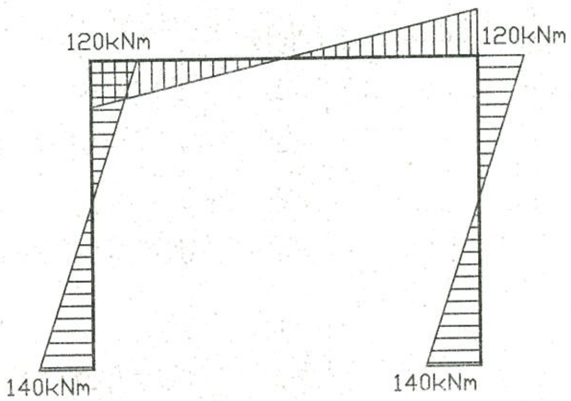
Áp điều kiện biên $\left\{\overline{q_1^q}\right\}=\{0\}$ ta giải được bài toán với nghiệm là:

$$\left\{\overline{q^q}\right\}=\begin{Bmatrix} \overline{q_1^q} \\ \overline{q_2^q} \\ \overline{q_3^q} \\ \overline{q_4^q} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\frac{ML}{C} \\ \frac{4}{3}\frac{ML}{C} \\ 3\frac{ML}{C} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{18}\frac{ML^2}{EI} \\ \frac{2}{9}\frac{ML^2}{EI} \\ \frac{1}{2}\frac{ML^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

Kết quả giống như khi chưa đổi biến.

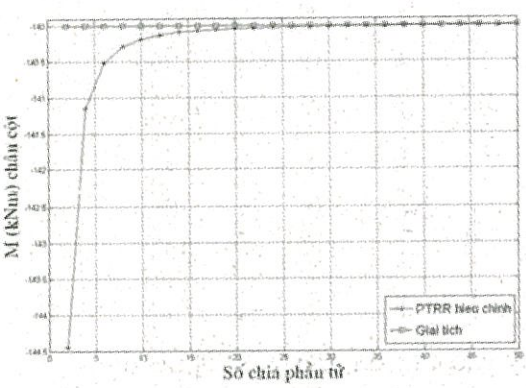
4.2.Ví dụ 2: Khung phẳng một tầng một nhịp chịu tải trọng ngang (Hình 8)

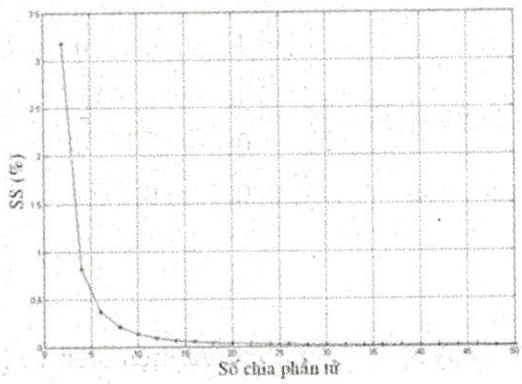




Hình 8. Sơ đồ lực và kết quả nội lực theo giải tích [5]

Khảo sát độ hội tụ của phương pháp PTRRBT theo số phần tử, moment uốn tại chân cột, ta có đồ thị ở Hình 9:





Hình 9. Moment tại chân cột – Độ hội tụ nghiệm

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo đã giới thiệu phương pháp PTRRBT, chương trình *KHUNGPHANG* dựa trên cơ sở lý thuyết của phương pháp này và tính toán một số ví dụ cụ thể cho kết quả ổn định, đáng tin cậy. Phương pháp PTRRBT có số bậc tự do ít so với phương pháp PTHH nên rất có lợi thế khi giải các bài toán lớn, khi giải lặp... và đặc biệt hiệu quả khi giải các bài toán ổn định, dao động.

Do tính toán đơn giản, phương pháp PTRRBT có thể có ưu thế lớn khi thiết lập các phần tử mẫu cho các lớp bài toán khác nhau: phần tử có đầu liên kết nửa cứng, các bài toán đàn dẻo, khảo sát ứng xử sau mất ổn định (*postbuckling behavior*)..., và mở rộng cho các bài toán khung không gian, tấm, vỏ...

LỜI CÁM ƠN: Bài báo này được hoàn thành với sự hỗ trợ của Hội đồng Khoa học Tự Nhiên

PLANE FRAME ANALYSIS BY MODIFIED DISCRETE ELEMENT METHOD USING DISPLACEMENT MODEL

Nguyen Cong Chi, Nguyen Thi Hien Luong
University of Technology, VNU-HCM

ABSTRACT. *Among the methods for structures analysis, the Finite Element Method (FEM) is widely used and provides solutions with a high accuracy. However, it is also necessary to find more reliable and simple methods for solving different specific problems. In this paper, the authors propose the method called Modified Discrete Element Method (DEM) to analyze the internal forces of steel beams, plane frames. Based on this method, the program KHUNGPHANG developed in Matlab 6.0 was built up to investigate a number of examples. Numerical results obtained shown the Modified Discrete Element Method is simple to use and effectiv.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. M.S.El Naschie, *Stress, Stability and Chaos in Structural engineering: an Energy approach*, McGraw – Hill, London, 1990.

[2]. Nguyễn Thị Hiền Lương, Nguyễn Thanh Sử, *Phân tích ổn định bằng phương pháp phần tử rời rạc,* Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, tập 8, số 3, tr. 58-66, 2005.

[3]. Lều Thọ Trình (chủ biên), *Ổn định – Động lực học công trình*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1971.

[4]. Chu Quốc Thắng, *Phương pháp Phần tử hữu hạn*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1997.

[5]. Lều Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên, *Bài tập Cơ kết cấu*, NXB Khoa Học và Kỹ Thuật, 1998.

[6]. Nguyễn Công Chí, *Tính toán ổn định khung phẳng bằng phương pháp Phần tử Rời rạc sử dụng mô hình chuyển vị,* Luận văn Thạc sĩ, Đại Học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh, 2005.