THUẬT TOÁN ĐA THỨC XÁC ĐỊNH CHU TRÌNH HAMILTON CỦA ĐỒ THỊ TỪ BAO ĐÓNG CỦA NÓ

Vũ Đình Hoà [1], **Đỗ Như An**[2]

[1]Khoa Toán – Tin, Trường ĐHSP Hà nội, [2]Khoa CNTT - Đại học Thủy Sản Nha Trang

(Bài nhận ngày 26 tháng 11 năm 2004, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 02 tháng 02 năm 2005)

TÓM TẮT: *Cho đồ thị vô hướng G=(V,E), trong đó $V = \{v_1, v_2, \ldots v_p\}$ là tập các đỉnh và E là tập các cạnh của G. Một chu trình C trong G được gọi là chu trình Hamilton nếu C chứa tất cả các đỉnh của G. Bao đóng của đồ thị G là đồ thị thu được từ G bằng cách lần lượt nối các cặp đỉnh không kề nhau mà tổng bậc của chúng ít nhất bằng p cho đến khi không còn cặp đỉnh nào như thế. Ký hiệu $cl(G)$ là bao đóng của G* [9].

Trong bài báo này chúng tôi trình bày một thuật toán đa thức xác định một chu trình Hamilton trong đồ thị G từ một chu trình Hamilton C cho trước trong đồ thị $cl(G)$.

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong bài viết này, chúng ta chỉ xét với các đồ thị hữu hạn, vô hướng và đơn gọi đơn giản là đồ thị. Cho trước một đồ thị $G = (V, E)$ với V là tập các đỉnh, E là tập các cạnh. Ta ký hiệu uv hay (u, v) là cạnh nối hai đỉnh u và v. *Bậc* của đỉnh $v \in V$ là số cạnh xuất phát từ nó và được ký hiệu bởi $d(v)$ (hoặc $d_G(v)$ khi cần thiết phải xác định rõ đỉnh v thuộc đồ thị G đang xét).

Khái niệm đường đi (chu trình) trên đồ thị trong bài viết được hiểu là đường đi (chu trình) đơn và sơ cấp, nghĩa là chúng đi qua mỗi cạnh, mỗi đỉnh nhiều nhất một lần. Ta gọi một đường đi trên đồ thị G là *đường đi Hamilton* nếu như nó đi qua tất cả các đỉnh của G. Một chu trình trên đồ thị G là *chu trình Hamilton* nếu như nó đi qua tất cả các đỉnh của G. Đồ thị có chu trình Hamilton được gọi đơn giản là *đồ thị Hamilton.*

Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ được gọi là *đồ thị con* của đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ nếu $V_1 \subseteq V_2$ và $E_1 \subseteq E_2$. Khi bổ xung một cạnh uv nối hai đỉnh u và v không kề nhau của đồ thị G, ta sẽ ký hiệu đồ thị thu được là $G + uv$. Một đồ thị gọi là *đồ thị đầy đủ* nếu mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau, ký hiệu K_p là đồ thị đầy đủ p đỉnh.

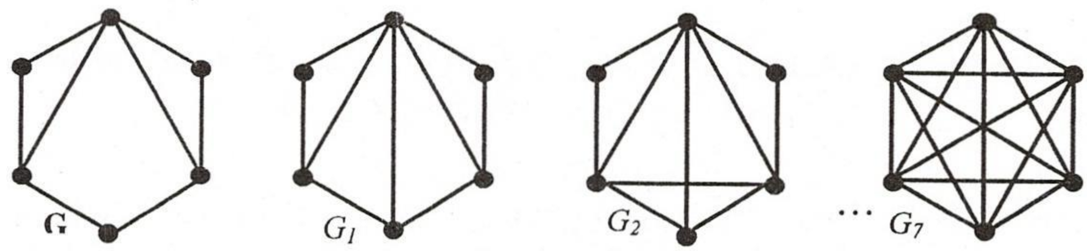
2. BAO ĐÓNG CỦA MỘT ĐỒ THỊ CHO TRƯỚC

Từ một đồ thị G có p đỉnh cho trước, bao đóng của G được ký hiệu $cl(G)$ là đồ thị thu được từ G bằng cách lần lượt bổ sung thêm các cạnh nối các cặp đỉnh không kề nhau nếu tổng bậc của chúng không nhỏ hơn p cho đến khi không còn bổ sung được thêm cạnh nào nữa. Quá trình này kết thúc sau không quá $O(p^2)$ bước. Khi đó ta nhận được một đồ thị được gọi là bao đóng $cl(G)$ của đồ thị đã cho. Bao đóng của đồ thị G là đồ thị H thỏa mãn:

i) G là đồ thị con và chứa tất cả các đỉnh của H.

ii) $d_H(u) + d_H(v) < p$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau u và v của H.

Nhận xét rằng, để thiết lập bao đóng của một đồ thị cho trước, ta có thể bổ sung lần lượt từng cạnh vào đồ thị theo tiêu chuẩn tổng bậc của chúng không nhỏ hơn số đỉnh p của đồ thị, hoặc ta có thể bổ sung đồng loạt tất cả các cạnh thỏa mãn tiêu chuẩn này vào đồ thị. Chẳng hạn, với đồ thị G như Hình 1, đồ thị bao đóng thu được sau 7 bước bổ sung cạnh, hoặc chỉ sau 3 bước bổ sung đồng loạt tất cả các cạnh thỏa mãn tiêu chuẩn tổng bậc của chúng không nhỏ hơn số đỉnh. Bao đóng thu được là đồ thị đầy đủ K_6.



Hình 1. Sau 7 bước ta thu được bao đóng của đồ thị ban đầu.

Định lý 1 [9] đã chứng minh được rằng bao đóng của đồ thị G là duy nhất và không phụ thuộc vào thứ tự bổ sung thêm các cạnh mới.

3. BAO ĐÓNG TRONG CHỨNG MINH TỒN TẠI CHU TRÌNH HAMILTON

Một trong những ý tưởng cơ bản trong các chứng minh của điều kiện đủ cho sự tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị là sử dụng khái niệm bao đóng. Trước hết ta chứng minh bổ đề cơ bản sau đây:

Bổ đề 1. *Cho đồ thị G với p đỉnh, u và v là hai đỉnh không kề nhau thỏa mãn:*

$$d(v) + d(u) \geq p,$$

khi đó, G là Hamilton khi và chỉ khi $G + uv$ là Hamilton.

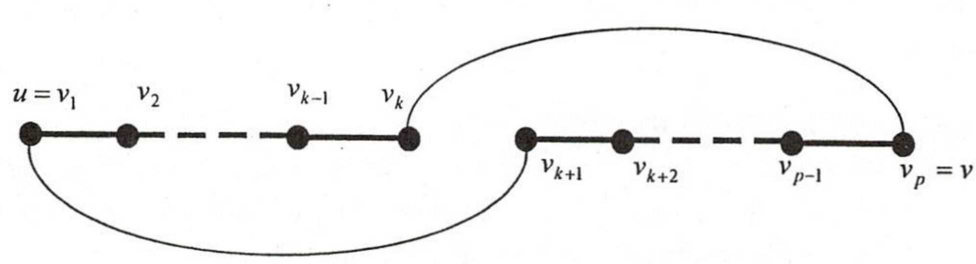
Chứng minh. Hiển nhiên là nếu G là đồ thị Hamilton thì $G + uv$ cũng là đồ thị Hamilton. Ngược lại, giả sử $G + uv$ là đồ thị Hamilton, và gọi C là một chu trình Hamilton của nó. Có hai trường hợp xảy ra:

(i) Nếu C không chứa cạnh uv, khi đó C cũng là chu trình Hamilton của G hay G là đồ thị Hamilton (đpcm).

(ii) Nếu C chứa cạnh uv, khi đó G chứa một đường Hamilton từ u tới v, giả sử là $u = v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p = v$. Đặt $S = \{v_k : uv_{k+1} \in E\}$ và $T = \{v_k : v_k v \in E\}$, $1 \leq k \leq p-1$. Theo giả thiết ta có:

$$|S| + |T| = d(u) + d(v) \geq p \ .$$

Nhưng ta có $|S \cup T| \leq p-1$ do u, v không kề nhau, vì vậy tồn tại k sao cho u kề v_{k+1} và v kề v_k. Khi đó G chứa chu trình Hamilton $u, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{p-1}, v, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, u$ (Hình 2). Ta có điều phải chứng minh.



Hình 2: Chu trình Hamilton trên đồ thị G suy từ chu trình Hamilton trên đồ thị $G + uv$.

Từ bổ đề 1, ta có thể chứng minh được định lý cơ bản sau đây:

Định lý 1 (Bondy và Chvátal [3]). *Một đồ thị G là đồ thị Hamilton khi và chỉ khi bao đóng $cl(G)$ của nó là đồ thị Hamilton.*

Hệ quả 1. *Nếu $cl(G)$ là đồ thị đầy đủ thì G là đồ thị Hamilton.*

Trực tiếp suy ra từ hệ quả 1 là định lý Dirac [4] và định lý Ore [7]:

Định lý 2 (*Định lý Dirac*). *Cho đồ thị G với p đỉnh $(p \geq 3)$. Nếu $d(v) \geq \frac{1}{2} p$ với mọi đỉnh v của G, thì G là đồ thị Hamilton.*

Định lý 3. *(Định lý Ore). Cho đồ thị G với p đỉnh $(p \geq 3)$. Nếu $d(u)+d(v) \geq p$ với mọi cặp đỉnh u,v không kề nhau của G, thì G là đồ thị Hamilton.*

Một kết quả khác của Chvátal [0] về điều kiện đủ của đồ thị Hamilton cũng được chứng minh bằng cách sử dụng bao đóng của nó.

Định lý 4. *(Định lý Chvátal, 1972) Cho đồ thị G gồm p đỉnh $(p \geq 3)$ với dãy bậc của các đỉnh là $d_1, d_2, ..., d_p$ và $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_p$. Nếu không tồn tại giá trị của $k \leq (p-1)/2$ sao cho $d_k \leq k$ và $d_{p-k} < p-k$, thì G là đồ thị Hamilton.*

Chứng minh. Dựa vào Hệ quả 1 ta chỉ cần chứng minh bao đóng $cl(G)$ của G là đồ thị đầy đủ. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng $H = cl(G)$ không là đồ thị đầy đủ, ta sẽ chỉ ra mâu thuẫn với giả thiết của G. Thật vậy, do H không đầy đủ nên tổng bậc của bất kỳ hai đỉnh không kề nhau của H nhiều nhất là $p-1$. Gọi x và y là hai đỉnh không kề nhau của H có tổng bậc lớn nhất. Không giảm tổng quát, ta giả sử rằng $d_H(x) \leq d_H(y)$. Đặt $d_H(x) := k$, thế thì $k \leq (p-1)/2$ và $d_H(y) := p-k-1$. Ký hiệu X là tập hợp các đỉnh không kề với y trong H. Thế thì $|X| = p-1-d_H(y) \geq k$. Hơn nữa, do cách chọn x và y, ta cũng có $d_G(v) \leq d_H(v) \leq k$ với mọi $v \in X$. Một cách tương tự, nếu ký hiệu Y là tập tất cả các đỉnh không kề với x trong H, chúng ta có $|Y| = p-k-1$ và $d_G(v) \leq d_H(v) \leq p-k-1$ với mọi $v \in Y$. Vì vậy G có ít nhất k đỉnh có bậc nhiều nhất là bằng k (chính là các đỉnh trong X) và ít nhất $p-k$ đỉnh có bậc nhiều nhất $p-k-1$ (chính là các đỉnh trong $Y \cup \{x\}$), điều này trái với giả thiết trên G. Vậy bao đóng của G phải là đồ thị đầy đủ. Định lý đã được chứng minh.

4. THUẬT TOÁN ĐA THỨC XÁC ĐỊNH CHU TRÌNH HAMILTON CỦA ĐỒ THỊ DỰA VÀO BAO ĐÓNG CỦA NÓ

Trong [9] chúng ta đã đưa ra thuật toán có độ phức tạp $O(p^3)$ xác định chu trình Hamilton của G từ một chu trình Hamilton cho trước của $cl(G)$, trong phần này chúng ta sẽ mô tả thuật toán chi tiết như sau:

Đầu tiên, ta gán cho mỗi cạnh uv của $cl(G)$ một nhãn $\alpha(uv)$ tương ứng với thứ tự nó được thêm vào theo quá trình xây dựng $cl(G)$ (ban đầu các cạnh của G được gán nhãn bằng 0). Giả sử C là chu trình Hamilton trong $cl(G)$. Nếu mọi cạnh của C đều có nhãn bằng 0, thì ta có C là chu trình Hamilton trong G, thuật toán kết thúc. Ngược lại, ta chọn cạnh uv của C với nhãn cao nhất, theo chứng minh của bổ đề 1, ta có thể chọn ra hai đỉnh liên tiếp v_k và v_{k+1} của C sao cho u kề v_{k+1}, v_k kề v và $\alpha(uv_{k+1}) < \alpha(uv)$ và $\alpha(vv_k) < \alpha(uv)$, quá trình này có thể thực hiện không quá $O(p^2)$ bước.

Bằng cách xoá đi hai cạnh $v_k v_{k+1}$ và uv trong C và thay vào hai cạnh uv_{k+1} và vv_k, ta thu được chu trình Hamilton mới trong $cl(G)$ với nhãn của các cạnh nhỏ hơn $\alpha(uv)$. Lặp lại quá trình này sau nhiều nhất $O(p)$ bước cho đến khi trong C không còn cạnh nào có nhãn khác không, chúng ta thu được một chu trình Hamilton trong G.

Thuật toán được mô tả như sau:

(1) Thuật toán xác định bao đóng $cl(G)$ của đồ thị G cho trước:

Input: *Đồ thị* $G = (V, E)$, $V = \{1,2,..., p\}$

Output: $cl(G) = (V, E^*)$, *với* E^* *- tập hợp các cạnh*

Procedure closure(G);
Var *count*: integer;
Begin

```
        For uv ∈ E do α(uv) := 0 ; {Gán nhãn 0 cho các cạnh của G }
        E* := E ; count := 0;
        While ( ∃u, v ∈ V, uv ∉ E : d(u) + d(v) ≥ p ) do
            Begin
                E* := E* + uv ;
                count := count + 1 ;
                α(uv) := count;
            End;
        Return cl(G) = (V, E*) ;
    End;
```

(2) Thuật toán xác định chu trình Hamilton của G từ chu trình Hamilton C trên bao đóng $cl(G)$ của nó với các cạnh đã được gán nhãn.

Nhận xét rằng, một chu trình Hamilton trên đồ thị với tập đỉnh $V = \{1,2,..., p\}$ có thể xem là một hoán vị của tập $\{1,2,..., p\}$. Giả sử ta ký hiệu $C = (c[1], c[2],..., c[p])$ là chu trình Hamilton cho trước trên $cl(G)$, trong đó $(c[1], c[2],..., c[p])$ là một hoán vị của tập $\{1,2,..., p\}$. Để đơn giản trong lập trình, ở mỗi bước lặp thực hiện quá trình hạ bậc cho cạnh uv có nhãn cao nhất trên C đang xét, ta cần một mảng trung gian $a[1], a[2],..., a[p]$ chứa các đỉnh theo thứ tự của chu trình C nhưng đỉnh u ở đầu mảng và đỉnh v ở cuối mảng. Giả sử $uv = c[k]c[k+1]$ $(1 \le k \le p-1)$ là cạnh có nhãn cao nhất trên C, khi đó mảng trung gian a sẽ được xác định theo công thức:

$$a[i] = \begin{cases} c[k-i+1], & i = \overline{1,k} \\ c[p+k+1-i], & i = \overline{k+1, p} \end{cases} \qquad (1)$$

Tiếp theo, giả sử k $(2 \le k \le p-1)$ được xác định sao cho $a[1]$ kề $a[k+1]$, $a[p]$ kề $a[k]$ và $\alpha(a[1]a[k+1]) < \alpha(a[1]a[p])$, $\alpha(a[p]a[k]) < \alpha(a[1]a[p])$. Khi đó chu trình C ở bước lặp tiếp theo được xác định như sau:

$$c[i] = \begin{cases} a[1], & i = 1 \\ a[k+i-1], & i = \overline{2, p-k+1} \\ a[p-i+2], & i = \overline{p-k+2, p} \end{cases} \qquad (2)$$

Thuật toán được mô tả như sau:

Input: *cl(G)=(V, E*) với các cạnh đã được gán nhãn,*
C là chu trình Hamilton trong cl(G).
Output: *Chu trình Hamilton trên G.*

```
Procedure Hamiltonian(cl(G), C);
Var max_label: integer;
Begin
    max_label := max{α(uv) : uv ∈ C};
    While max_label>0 do
        Begin
            Xác định uv ∈ C sao cho α(uv) = max_label;
            Xác định mảng a theo công thức (1);
            Xác định k trên a sao cho:
            { 2 ≤ k ≤ p − 1, các cạnh a[k]a[k + 1], a[1]a[k + 1], a[p]a[k]
            thuộc E* và
            α(a[1]a[k + 1]) < max_label , α(a[p]a[k]) < max_label } ;
            Xác định mảng c cho chu trình C theo công thức (2);
```

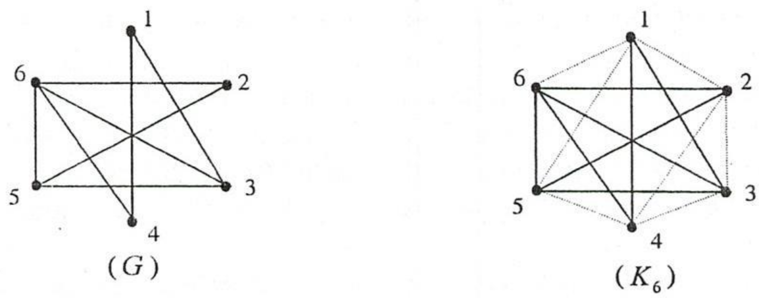
max_label := $\max\{\alpha(uv) : uv \in C\}$;

End;

Return C - là chu trình Hamilton trên G;

End;

Ví dụ. Áp dụng thuật toán cho đồ thị G trên Hình 3. Đầu tiên là danh sách các cạnh lần lượt được bổ sung cho G để xác định bao đóng gồm $(1,6),(1,5),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)$ với các nhãn tương ứng là $1,2,3,4,5,6,7$. Bao đóng thu được là đồ thị đầy đủ K_6.



Hình 3: Đồ thị G và bao đóng K_6 của nó.

Tiếp theo, giả sử chu trình Hamilton trên K_6 được xét là $C = (1,2,3,4,5,6)$. Khi đó quá trình thực hiện thuật toán xác định chu trình Hamilton cho đồ thị G được ghi trong bảng dưới đây. Chu trình Hamilton của G thu được sau 3 bước là $(2,6,4,1,3,5)$.

Bước lặp	Chu trình C	max_label	Cạnh	Mảng a	k
0	(1,2,3,4,5,6)	7	(4,5)	(4,3,2,1,6,5)	3
1	(4,1,6,5,2,3)	6	(4,3)	(4,1,6,5,2,3)	2
2	(4,6,5,2,3,1)	4	(2,3)	(2,5,6,4,1,3)	2
3	(2,6,4,1,3,5)	0			

POLYNOMIAL ALGORITHM DEFINES HAMILTONIAN CYCLE OF THE GRAPH FROM ITS CLOSURE

Vu Dinh Hoa[(1)], Do Nhu An[(2)]

[(1)]University of Pedagogy – HaNoi, [(2)]Nha Trang University of Marine Products

ABSTRACT: Given an undirected graph G=(V,E), where $V = \{v_1, v_2, \ldots v_p\}$ is the vertex set and E is the edge set of G. A cycle C in G is called a Hamiltonian cycle if C containes all vertices of G. The closure of G is the graph obtained from G by recursively joining pairs of nonadjacent vertices whose degree sum is at least p until no such pair remains. We use $cl(G)$ to denote the closure of G [9].

In this paper we shall present a polynomial algorithm to define a Hamiltonian cycle of G from a given Hamiltonian cycle C in $cl(G)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J.C. Bermond, Hamiltonian Graphs, In: L. Beineke and R.J.Wilson, Editors, "*Selectedtopies In Graph Theory*". Academic Press. London and Elsevier, New York(1976).

[2] J.A Bondy and U.S.R Murty, *Graph Theory with applications*, Macmillan, London and Elsevier, New York(1976)

[3] J.A Bondy and V. Chvátal, *A Method in Graph Theory, Discrete Math.* 15 (1976) p. 111-135.

[4] G.A. Dirac, *Some theorems on abstract Graphs*, Proc. London Math. Soc.2 (1952), pp. 69-81.

[5] S. Goodman and S. Hedetniemi, *On the hamiltonian completion problem, In Graphs and Combinatorics*, Lecture Notes In Mathematics, No. 406 (11974), pp.262-272.

[6] Vu Dinh Hoa, *Long Cycles and Neighborhood Union in 1-Tough Graphs with Large Degree Sums*, "Discussiones Mathematicae- Graph Theory" Volume 18 No 1.5 –13 (1998/1999).

[7] O.Ore, *Note On Hamiltonian Cycles*, Amer. Math. Monthly 67 (11960), p.55.

[8] Vũ Đình Hòa, Đỗ Như An. *Recognizing dominating cycles is NP-hard.* Journal of computer science an cybernetics. No 3, 2002.

[9] Vũ Đình Hòa, Đỗ Nhưa An. *Bao đóng của đồ thị và thuật toán xác định chu trình Hamilton.* Báo cáo tại Hội thảo Quốc gia về CNTT, 8-2004.

[10] R. Graham, L. Lovász and M. Grotschel. *Handbook of combinatorics*, Vol 1, pp.12, Elsevier Science B.V., 1995.