

# PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH KHUNG PHẪNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ RỜI RẠC

Nguyễn Thị Hiền Lương, Nguyễn Thanh Sử

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 25 tháng 8 năm 2004, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 25 tháng 01 năm 2005)

**TÓM TẮT:** Ngày nay, khi vật liệu cường độ cao được sử dụng trong thiết kế để tạo ra các kết cấu có hình dáng thanh mảnh hơn thì vấn đề thiết yếu là đảm bảo sự làm việc ổn định cho kết cấu. Hiện nay có nhiều phương pháp để giải quyết bài toán ổn định khung đàn hồi như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp phần tử hữu hạn,... Trong bài báo này, tác giả giới thiệu một phương pháp năng lượng khác để tính toán ổn định là phương pháp Phần tử Rời rạc (Discrete Element Method) để tính toán ổn định khung phẳng đàn hồi. Chương trình tính ổn định DEAFRAME bằng Matlab xây dựng dựa trên cơ sở phương pháp này được ứng dụng khảo sát ổn định một số ví dụ khung phẳng. Kết quả được so sánh với kết quả tính theo các phương pháp khác, cho thấy phương pháp Phần tử Rời rạc đơn giản và hiệu quả khi sử dụng.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cùng với việc sử dụng vật liệu cường độ cao tạo ra các kết cấu hình dáng mảnh hơn thì vấn đề ổn định có ý nghĩa rất quan trọng và đã được quan tâm nghiên cứu như ổn định thanh, khung, tấm, vỏ,... Trong đó, bài toán ổn định khung cũng được đề cập đến rất nhiều [1-7].

Hiện nay, có nhiều phương pháp để giải quyết bài toán ổn định khung phẳng: phương pháp tĩnh học dựa vào sự cân bằng tĩnh học như phương pháp lực, chuyển vị,...[4]; phương pháp năng lượng dựa vào việc khảo sát thế năng toàn phần của hệ như phương pháp sử dụng hàm thử, phần tử rời rạc, phần tử hữu hạn...[1-7]; phương pháp động lực học dựa vào việc khảo sát tần số dao động riêng của hệ. Với phương pháp tĩnh học thì khối lượng tính toán lớn, phức tạp, còn phương pháp năng lượng như phương pháp Phần tử Hữu hạn (PTHH) là một trong những công cụ được ứng dụng rộng rãi trong tính toán song lại khá công kềnh khi giải quyết một số bài toán đơn giản. Vì vậy, việc tìm hiểu và nghiên cứu các phương pháp đơn giản hơn, có độ chính xác cao để tính toán ổn định kết cấu là điều cần thiết.

Trong bài báo này, tác giả giới thiệu một phương pháp năng lượng khác để giải bài toán ổn định khung phẳng đàn hồi, đó là phương pháp Phần tử Rời rạc (PTRR). Phương pháp này đã được El Naschie giới thiệu trong [1] và được áp dụng xác định nội lực, chuyển vị dầm đơn và tính toán ổn định một số kết cấu thanh, khung, tấm... Trong [1] cũng chỉ ra cách thức chung để xây dựng các hệ thức năng lượng và trình bày một vài ví dụ tính toán ổn định khung đơn giản để minh họa với mô hình tính có số ít phần tử.

Trên cơ sở phương pháp PTRR, các công thức năng lượng tổng quát được thiết lập để tính toán khung mất ổn định đối xứng và phản đối xứng. Chương trình DEAFRAME xây dựng bằng Matlab 6.0 trên cơ sở phương pháp này được sử dụng để khảo sát một số ví dụ và so sánh với chương trình ANSYS 5.4 (theo phương pháp PTHH) và phương pháp giải tích. Kết quả số theo các phương pháp trên được biểu diễn bằng đồ thị và kết hợp so sánh.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1 Mô hình phần tử rời rạc

Để minh họa ý tưởng cơ bản của phương pháp PTRR, ta xét cấu kiện đàn hồi một phương. Ta chia cấu kiện thành  $n$  phần tử có chiều dài  $\Delta = L/n$  được liên kết lại với nhau bởi các khớp đàn hồi không ma sát (H.1 và H.2). Các khớp này có vai trò như những lò xo xoay chống lại biến dạng uốn của cấu kiện. Như vậy, năng lượng biến dạng uốn tại mỗi khớp trong cấu kiện cũng tương tự như trong lò xo xoay và được xác định theo [1] như sau:

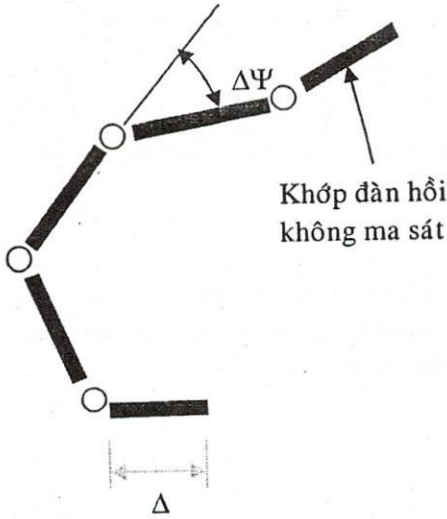
$$\Delta U = \frac{1}{2} C (\Delta \Psi)^2, \quad (1)$$

với  $\Delta \Psi$  - sự biến đổi góc giữa 2 phần tử liên tiếp, C- độ cứng lò xo được xác định như sau:

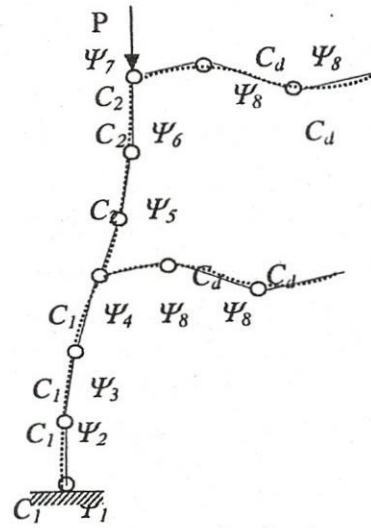
$$C = \frac{EI}{\Delta} = \frac{nEI}{L}, \quad (2)$$

Năng lượng biến dạng uốn của toàn cấu kiện U sẽ là:

$$U = \sum \Delta U = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} C (\Delta \Psi_i)^2 \quad (3)$$



Hình 1. Mô hình phần tử rời rạc



Hình 2. Mô hình phần tử rời rạc của khung

## 2.2 Thế năng biến dạng đàn hồi của mô hình PTRR và của kết cấu liên tục:

Quan hệ giữa moment uốn và độ võng của cấu kiện được biểu diễn trong phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$\frac{w'''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M}{EI} \quad (4)$$

Do chuyển vị là bé, ta có thể đơn giản phương trình trên thành dạng gần đúng:  $w''' = \frac{M}{EI}$  (5)

với EI là độ cứng chống uốn của cấu kiện. Vì  $\Psi = w'$  là góc xoay nên ta có:  $\Psi' = \frac{M}{EI}$  (6)

$$\Leftrightarrow M = EI \frac{d\Psi}{dx} = EI \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \approx EI \frac{\Delta \Psi}{\Delta x} \approx \frac{EI}{\Delta x} \Delta \Psi = C \Delta \Psi \quad (7)$$

Từ (7), ta xác định được độ cứng lò xo:  $C \approx \frac{EI}{\Delta x}$  (8)

$$\text{Thế (8) vào (3), ta được: } U \approx \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} C (\Delta \Psi_i)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{EI}{\Delta x_i} (\Delta \Psi_i)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} EI \left( \frac{\Delta \Psi_i}{\Delta x_i} \right)^2 \Delta x_i \quad (9)$$

Khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi sẽ trở thành tích phân nên ta có:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{d\Psi}{dx} \right)^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI \Psi'^2 dx \quad (10)$$

Thế (6) vào (10) ta được biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi:



$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (11)$$

Biểu thức (11) cho thấy thế năng biến dạng đàn hồi của hệ theo mô hình PTRR và của kết cấu liên tục là tương đương khi  $n$  lớn và nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt.

### 2.3. Xác định hệ số tải trọng tới hạn khung phẳng bằng phương pháp PTRR

*Nguyên lý thế năng toàn phần dừng:*

Gọi  $V$  là thế năng toàn phần của hệ (*total potential energy*) là sự chênh lệch giữa năng lượng biến dạng đàn hồi  $U$  (*strain energy*) và công ngoại lực  $L_p$  (*load potential*) của hệ:

$$V = U - L_p \quad (12)$$

Thế năng toàn phần của hệ đạt cực trị tại điểm đạo hàm bậc nhất  $V(\Psi)$  theo  $\Psi$  triệt tiêu:

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial \psi_i} = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, (n+1) \quad (13)$$

Mặt khác, để trạng thái cân bằng ổn định (điểm cực tiểu của hệ), cần thỏa mãn điều kiện:

$$V_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi_i^2} > 0 \quad (14)$$

Để tính toán ổn định khung theo phương pháp PTRR, ta sẽ thực hiện các bước sau:

- Giả thiết biến dạng của khung, xác định thế năng biến dạng đàn hồi của khung bao gồm thế năng biến dạng đàn hồi của cột khung  $U_c$  và của dầm khung  $U_d$  theo (3):

$$U = U_c + U_d \quad (15)$$

trong đó  $U_c$  và  $U_d$  được xác định như sau:

$$U_c = \sum_{j=1}^{n_c} U_{cj} \quad (16)$$

$$U_d = \sum_{i=1}^{n_d} U_{di} \quad (17)$$

với  $n_c, n_d$  là số cột và số dầm trong khung,  $U_{cj}$  và  $U_{di}$  là thế năng biến dạng đàn hồi trong cột thứ  $j$  và dầm thứ  $i$  của khung.

- Xác định công ngoại lực  $L_p$  tác dụng lên khung.
- Viết hàm thế năng toàn phần của hệ theo (12).
- Xác định cực trị của hàm thế năng toàn phần theo (13) ta được:

$$V_1 = \frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \frac{\partial L_p}{\partial \psi_i} = 0, \quad \text{với } i=1, \dots, (n+1) \quad (18)$$

Viết lại biểu thức (18) dưới dạng ma trận:  $D_V \{\psi\} = D_U \{\psi\} - D_L \{\psi\} = 0$  (19)

trong đó các số hạng của  $D_U$  được xác định như sau:  $D_U(i, j) = \left( \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \right) / \psi_j$  (20)

các số hạng của  $D_L$  được xác định như sau:  $D_L(i, j) = \left( \frac{\partial L_p}{\partial \psi_i} \right) / \psi_j$  với  $i, j = 1, 2, \dots, (n+1)$  (21)

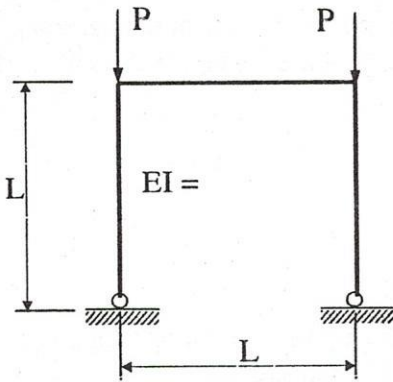
Ta thu được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất:  $D_V \Psi = 0$  (22)

Đặt  $\alpha = PL^2/EI$ , giải phương trình đặc trưng  $|D_V| = 0$ , thu được nghiệm nhỏ nhất chính là hệ số tải trọng tới hạn  $\alpha$ . Từ hệ số này ta xác định tải trọng tới hạn  $P_{cr}$ .

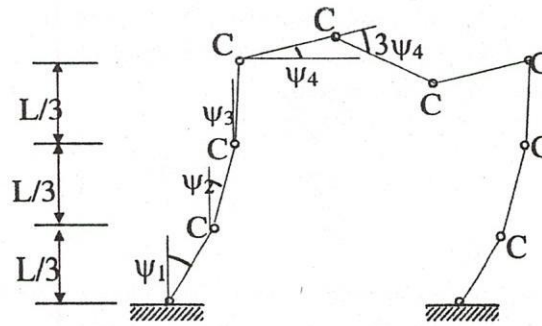
## 3. CÁC CÔNG THỨC THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI VÀ CÔNG NGOẠI LỰC CHO KHUNG PHẪNG

### 3.1 Khung mất ổn định phản đối xứng (sway buckling)

Xét khung một nhịp một tầng [1] như trên H. 3. Giả sử khung mất ổn định dạng phản đối xứng, chọn số phần tử cho mỗi cấu kiện là  $n = 3$  như trên H. 4.



Hình 3. Khung một nhịp một tầng liên kết khớp tại chân cột



Hình 4. Mô hình PTRR theo biến dạng của khung

Ta có thể xác định các biểu thức năng lượng cho hệ như sau.

Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ theo (3):

$$U = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} C(\Delta\psi)^2 = 2\left(\frac{1}{2}C(\psi_1 - \psi_2)^2 + \frac{1}{2}C(\psi_2 - \psi_3)^2 + \frac{1}{2}C(\psi_3 - \psi_4)^2 + \frac{1}{2}C(3\psi_4)^2\right) \\ = C(\psi_1 - \psi_2)^2 + C(\psi_2 - \psi_3)^2 + C(\psi_3 - \psi_4)^2 + C(3\psi_4)^2 \quad (23)$$

Công ngoại lực biểu diễn qua góc xoay  $\psi$  được tính gần đúng theo khai triển Taylor :

$$L_p = \sum 2P\delta = 2P \frac{L}{3} [(1 - \cos \psi_1) + (1 - \cos \psi_2) + (1 - \cos \psi_3)] \\ \approx 2P \frac{L}{3} \left(\frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2^2 + \frac{1}{2}\psi_3^2\right) = P\Delta(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) \quad (24)$$

với  $\delta$  là chuyển vị theo phương trục của cột.

Trong trường hợp khung nhiều nhịp, có số phần tử là  $n$  trong cấu kiện, có thể mở rộng các công thức tính  $U$  và  $L_p$  theo (23), (24).

Công thức chung xác định thế năng biến dạng đàn hồi của cột:

Biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (23) của cột chỉ gồm 3 phần tử ở ví dụ trên có thể mở rộng thành công thức chung tính thế năng biến dạng đàn hồi  $U_{cj}$  cho cột thứ  $j$  gồm  $n$  phần tử ([8]):

$$U_{cj} = B_j \frac{1}{2} C_{cj} \psi_1^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_{cj} (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \quad (25)$$

Số phần tử  $n$  được xác định theo dạng biến dạng của dầm khung:  $n=2N$  nếu biến dạng của dầm là hai nửa bước sóng hình sin,  $n=N$  nếu biến dạng của dầm là một nửa bước sóng hình sin, với  $N$  là số phần tử trong nửa bước sóng hình sin biểu diễn dạng mất ổn định của dầm.  $N$  lấy các giá trị lẻ lớn hơn 3 ( $N = 3, 5, 7, 9, \dots$ ).

$B_j$  là hệ số liên kết của chân cột thứ  $j$ . Trường hợp cột liên kết ngàm  $B_j = 1$ , liên kết khớp  $B_j = 0$ .  $C_{cj}$  là độ cứng lò xo của cột thứ  $j$ :

$$C_{cj} = \frac{EI_{cj}}{\ell_{cj}/n} = \frac{EI_{cj}}{\Delta_{cj}} \quad (26)$$

$E$  là module đàn hồi,  $I_{cj}$  là moment quán tính,  $\ell_{cj}$  và chiều cao cột thứ  $j$ ,  $\Delta_{cj}$  là chiều dài một phần tử của cột thứ  $j$ :

$$\Delta_{cj} = \frac{\ell_{cj}}{n} \quad (27)$$



Công thức xác định thế năng biến dạng đàn hồi của dầm:

Khi khung chịu tác dụng của ngoại lực, biến dạng của dầm được tính qua góc xoay  $\Psi_{n+1}$  giữa dầm và cột. Vì vậy, để thuận tiện cho việc tính thế năng biến dạng đàn hồi của dầm khung, trong [8] đề xuất hệ số  $t(N)$ , gọi là hệ số tổng biến dạng bình phương tương đối của dầm khung theo  $\Psi_{n+1}$ . Hệ số  $t(N)$  được xác định theo  $N$  như sau:

$$N = 3, \quad t(N) = 2$$

$$N > 3, \quad t(N) = \frac{4(N-4)}{(N-3)^2}, \quad (N=3,5,7,9\dots)$$

(28)

Giá trị của  $t(N)$  phụ thuộc vào  $N$  được biểu diễn trên H. 5 và Bảng 1.

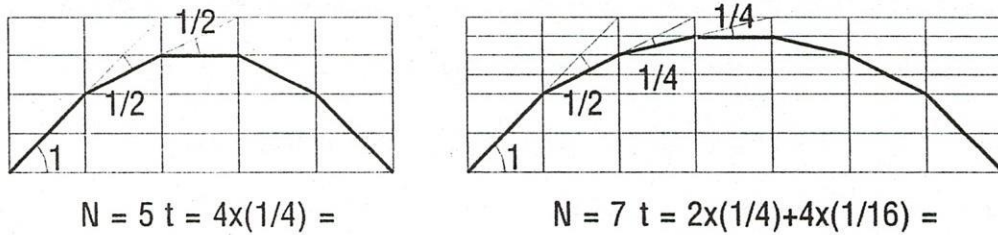
Có thể biểu diễn thế năng biến dạng đàn hồi  $U_{di}$  cho dầm thứ  $i$  gồm  $n$  phần tử trên cơ sở mở rộng biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi của dầm 3 phần tử theo (23) như sau:

$$U_{di} = \frac{1}{2} t(N) \frac{n}{N} C_{di} \Psi_{N+1}^2, \tag{29}$$

với  $C_{di}$  là độ cứng lò xo dầm thứ  $i$ : 
$$C_{di} = \frac{EI_{di}}{\ell_{di}/n} = \frac{EI_{di}}{\Delta_{di}} \tag{30}$$

với  $I_{di}$  là moment quán tính của dầm thứ  $i$ ,  $\ell_{di}$  là chiều dài của dầm thứ  $i$ ,  $\Delta_{di}$  là chiều dài của một phần tử dầm thứ  $i$ :

$$\Delta_{di} = \frac{\ell_{di}}{n} \tag{31}$$



Hình 5. Biểu diễn biến dạng của dầm khung và hệ số  $t(N)$  cho các giá trị  $N=5, N=7$

N	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
t(N)	2	1	0.75	0.556	0.438	0.36	0.306	0.265	0.234	0.21	0.19	0.174	0.16	0.18

Bảng 1. Bảng giá trị hệ số  $t(N)$

Công thức tính công ngoại lực:

Ta mở rộng công thức công ngoại lực (24) cho khung ở dạng tổng quát theo [8] như sau:

$$L_p = \sum_{j=1}^{n_c} L_{pj} = \sum_{j=1}^{n_c} P_j \frac{\ell_{cj}}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Psi_i^2 \right) = \sum_{j=1}^{n_c} \frac{1}{2} P_j \Delta_{cj} \left( \sum_{i=1}^n \Psi_i^2 \right) \tag{32}$$

với  $P_j$  là tải trọng tại nút trực cột thứ  $j$ .

Thế các biểu thức thế năng biến dạng của cột và dầm (25), (29) và công ngoại lực (32) vào (12).

Từ đó xác định hệ số tải trọng tới hạn theo các công thức (18) -(22).

Đối với khung nhiều tầng, ta có thể dễ dàng suy được các biểu thức năng lượng cho  $U, L_p$  trên cơ sở các công thức (25), (29) và (32), ([8]).

### 3.2 Thế năng biến dạng và thế tải trọng của khung một tầng theo dạng mất ổn định đối xứng (symmetric buckling):

Với dạng mất ổn định này, biến dạng trong dầm khung sẽ là dạng một nửa bước sóng hình sin, do đó  $n=N$ . Từ đó theo [8], biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi trong cột của khung một tầng được suy rộng từ trường hợp khung với số ít phần tử trong [1]:

$$U_{cj} = B_j \frac{1}{2} C_{cj} \psi_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} C_{cj} (\psi_i \pm \psi_{i+1})^2 \quad (33)$$

với biểu thức lấy dấu "+" khi  $i < n/2$ , lấy dấu "-" khi  $i > n/2$   
 Thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm của khung là:

$$U_{di} = \frac{1}{2} t(N) C_{di} \psi_{n+1}^2 \quad (34)$$

Công ngoại lực xác định tương tự theo (32).

Chú ý góc xoay  $\Psi_1$  có thể được biểu diễn qua các góc xoay còn lại:

$$\Psi_1 = \sum_{i=2}^n A_i \psi_i \quad (35)$$

với hệ số  $A_i = -1$  nếu  $i < (N+2)/2$ ;  $A_i = 1$  nếu  $i > (N+2)/2$ .

Thế (35) lần lượt vào (32)-(34), ta xác định được  $U, L_p$ . Từ đó, thay các biểu thức  $U, L_p$  vào (12), ta xác định hệ số tải trọng tối hạn theo các công thức (18)-(22). Do góc xoay  $\Psi_1$  được biểu diễn qua các góc xoay còn lại nên kích thước các ma trận  $D_U, D_L$  sẽ là  $(n \times n)$ .

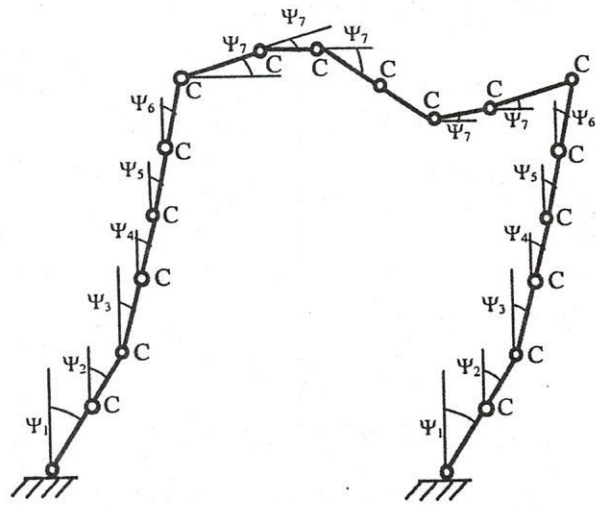
#### 4. VÍ DỤ MINH HỌA

Dựa trên phương pháp PTRR, chương trình DEAFRAME gồm DEASWAY và DEASYM được xây dựng (bằng MATLAB 6.0) để tính khung mất ổn định đối xứng và phản đối xứng. Kết quả được so sánh với phương pháp giải tích và PTHH (ANSYS 5.4).

##### 4.1. Khung 1 nhịp 1 tầng mất ổn định phản đối xứng

Để thấy rõ hơn sự đơn giản và độ chính xác của phương pháp PTRR, ta tính ổn định khung 1 nhịp 1 tầng ở &3.1 với số phần tử  $n=6$ .

Từ mô hình biến dạng của khung ở H.6, ta xác định  $U_c$  và  $U_d$  theo (25), (29) với  $n=6, N=3$ .



Hình 6. Mô hình PTRR theo biến dạng của khung

$$U_c = \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} C_{cj} (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \right) \quad (36)$$

$$U_d = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{2} t(N) \frac{n}{N} C_{di} \psi_7^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 C \psi_7^2 = 2 C \psi_7^2 \quad (37)$$

Công ngoại lực được xác định theo (35)

$$L_p = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} P_j \Delta_{cj} \left( \sum_{i=1}^6 \psi_i^2 \right) \quad (38)$$

từ (36) -(38), xác định các ma trận  $D_U, D_L$  qua (20), (21):

$$D_U = 2C \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}; D_L = 2P\Delta_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Thế  $D_U, D_L$  trong (39) vào (19) xác định được  $D_v$ :



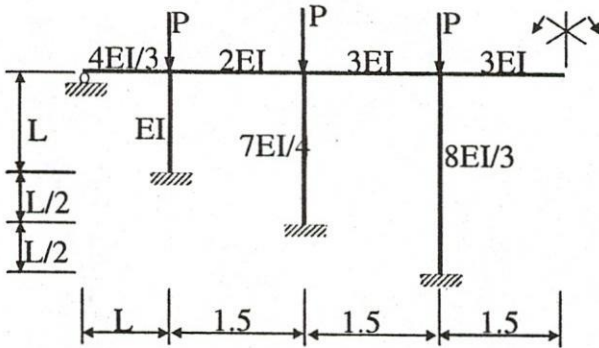
$$D_v = \begin{bmatrix} 1-a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 2-a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 2-a & -1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 2-a & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 2-a & -1 \\ & & & & & \text{Đối} & 1 & 2-a & -1 \\ & & & & & & -1 & 3 \end{bmatrix} = 0 \quad (40)$$

với  $a = \alpha/n^2$ . Giải định thức  $|D_v| = 0$  ta được  $a_{\min} = 0.0503$ , hay  $\alpha_{\min} = 1.81$ .  
Suy ra giá trị tải trọng tối hạn:

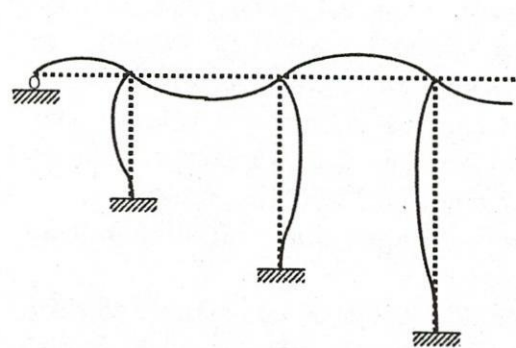
$$P_{cr} = a \frac{C}{\Delta} = 0.0503 \frac{EI}{L^2/n^2} = 1.81 \frac{EI}{L^2} \quad (41)$$

là khá chính xác so với lực tối hạn tính theo phương pháp giải tích ((1)) :  $P_{cr} = 1.82 \frac{EI}{L^2}$ .

4.2 Khung mất ổn định đối xứng



Hình 7. Khung 7 nhịp



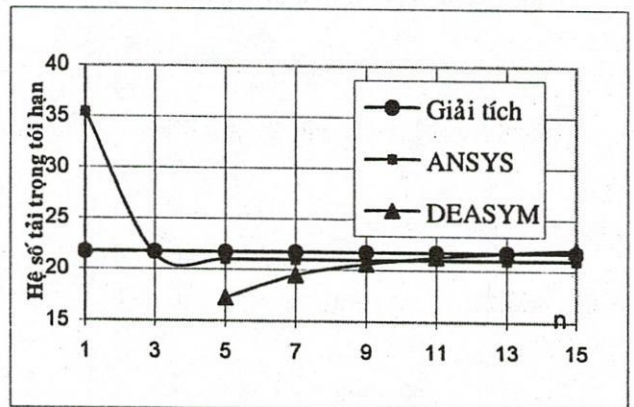
Hình 8. Sơ đồ biến dạng của khung

Theo [4], sử dụng phương pháp gần đúng tách khung nhiều nhịp thành các khung có dạng chữ T, khung 7 nhịp trên H.7 với sơ đồ biến dạng trên H.8 được tách thành ba khung chữ T. Giải các khung chữ T này được các kết quả là  $P_{cr1}=32EI/L^2$ ;  $P_{cr2}=24.8EI/L^2$ ;  $P_{cr3}=21.74EI/L^2$  tương ứng với biến dạng đối xứng. Kết quả được chọn là kết quả nhỏ nhất  $P_{cr3}=21.74EI/L^2$ .

Trong chương trình DEASYM và ANSYS, khung nói trên được tính ổn định với toàn bộ bảy nhịp. Với chương trình DEASYM, hệ số tải trọng tối hạn được chọn khi chênh lệch giá trị giữa hai bước kế tiếp nhỏ hơn là 1.5%. Kết quả tính toán được trình bày trong bảng 2 và trên H. 9.

n	Giải tích	ANSYS	Sai số	DEASYM	Sai số
1	21.74	35.448	63.05%		
3	21.74	21.464	-1.27%		
5	21.74	21.014	-3.34%	17.274	-20.54%
7	21.74	20.972	-3.53%	19.469	-10.45%
9	21.74	20.964	-3.57%	20.588	-5.30%
11	21.74	20.961	-3.58%	21.277	-2.13%
13	21.74	20.960	-3.59%	21.743	0.01%
15	21.74	20.959	-3.59%	22.078	1.55%

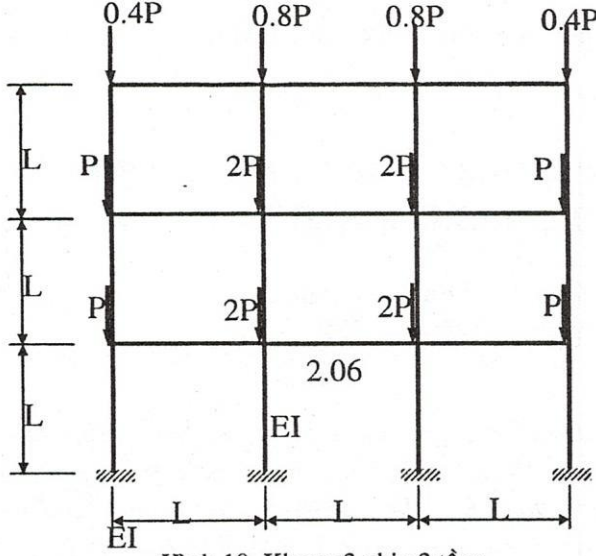
Bảng 2. Kết quả hệ số tải trọng tối hạn khung



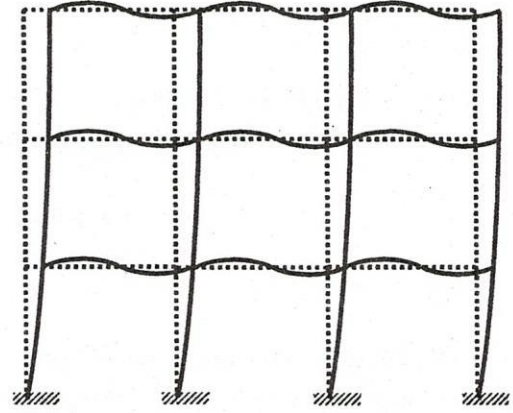
Hình 9. Hệ số  $\alpha$  tính theo các phương pháp

### 4.3 Khung mất ổn định phản đối xứng

Với bài toán khung 3 nhịp 3 tầng các cột có độ cứng uốn là EI, các dầm có độ cứng uốn là 2.06 EI như trên H.10 và H.11, theo [4] sử dụng phương pháp gần đúng thay thế khung nhiều nhịp nhiều tầng có nút chuyển vị thẳng bằng khung một nhịp tương đương do giáo sư N. V. Coocnôukhốp đề xuất, sau đó giải bằng phương pháp chuyển vị.



Hình 10. Khung 3 nhịp 3 tầng

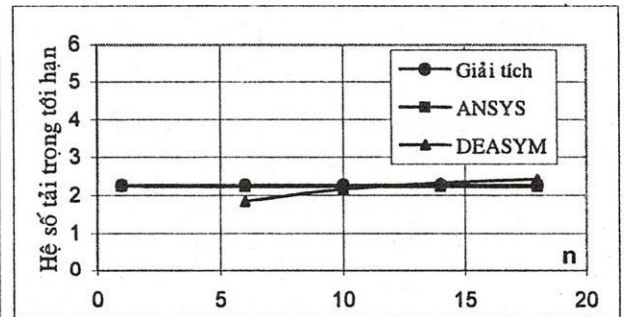


Hình 11. Sơ đồ biến dạng của khung

Kết quả bài toán khung ba nhịp ba tầng giải theo phương pháp PTRR sử dụng chương trình DEASYM cho kết quả  $P_{cr}=2.27 EI/L^2$ . Hệ số tải trọng tới hạn sẽ được chọn khi chênh lệch giá trị giữa hai bước kế tiếp nhỏ hơn 7%. Kết quả tính theo các phương pháp khác nhau được trình bày ở bảng 3 và H. 12.

n	Giải tích	ANSYS	Sai số	DEASYM	Sai số
1	2.27	2.252	-0.80%		
6	2.27	2.229	-1.79%	1.840	-18.94%
10	2.27	2.229	-1.79%	2.164	-4.65%
14	2.27	2.229	-1.79%	2.326	2.48%
18	2.27	2.229	-1.79%	2.420	6.59%

Bảng 3. Kết quả hệ số tải trọng tới hạn khung



Hình 12. Hệ số số  $\alpha$  tính theo các phương pháp

Như vậy, kết quả tính toán của 2 ví dụ trên cho phép kiểm chứng tính hợp lý của các giả thiết dựa trên việc tách khung thành các khung chữ T và việc đưa khung nhiều nhịp nhiều tầng về khung một nhịp tương đương.

## 5. KẾT LUẬN

Trong bài báo đã giới thiệu chương trình DEAFRAME dựa trên cơ sở của phương pháp PTRR - một phương pháp tính toán ổn định khung phẳng đàn hồi đơn giản và hiệu quả.

Trên cơ sở mô hình PTRR gồm những phần tử là các đoạn thẳng nối với nhau bởi các khớp lò xo xoay, biến dạng của hệ kết cấu có thể biểu diễn bằng các quan hệ hình học sơ cấp dẫn đến hệ các phương trình đại số tuyến tính có thể giải một cách dễ dàng. Hệ số tổng biến dạng  $t(N)$  được đề xuất để xác định năng lượng biến dạng trong dầm khung.

Kết quả thu được khá chính xác so với kết quả tính theo phương pháp giải tích và phương pháp PTHH. Đặc biệt, phương pháp PTRR tỏ ra hiệu quả khi tính toán khung mất ổn định dạng phản đối xứng.



Do tính chất đơn giản, phương pháp PTRR sẽ có ưu thế lớn khi khảo sát ứng xử của kết cấu sau khi mất ổn định và trong trường hợp vật liệu là đàn hồi- dẻo. Ngoài ra, phương pháp PTRR cần được tiếp tục nghiên cứu để ứng dụng tính toán ổn định cho các kết cấu phức tạp hơn như khung không gian, tấm, vỏ...

### LỜI CẢM ƠN

Bài báo này được hoàn thành với sự hỗ trợ của Hội đồng Khoa học Tự nhiên.

## STABILITY ANALYSIS OF PLANE FRAME STRUCTURES USING DISCRETE ELEMENT METHOD

Nguyen Thi Hien Luong, Nguyen Thanh Su  
University of Technology – VNU-HCM

**ABSTRACT:** Nowadays, when high-strength materials are used in engineering design to create structures with slender shapes, the great important problem is to ensure their stability. There are many methods for evaluation of elastic critical buckling load for plane frames such as the load control method, the displacement control method, the finite element method,... In this paper, the authors propose another energy-based method called Discrete Element Method to analyze the stability of plane elastic frames. Using this method, the program DEAFRAME developed in Matlab is also presented to investigate a number of simple illustrative examples. Numerical results obtained are compared to those of the other methods, and indicate that this method is effective and simple to use.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] El Naschie M.S., *Stress, Stability and Chaos in Structure Engineering; an Energy Approach*, McGraw-Hill, London, (1990).
- [2] S. Y. Mahfouz, *Design Optimization of Structural Steelwork*, University of Bradford, UK, (1999).
- [3] Andrew Whittaker, *Steel Structures*, University at Buffalo, (2002).
- [4] Lê Văn Quý, Lều Thọ Trình, *Ổn Định - Động Lực Học Công Trình*, Nhà Xuất Bản Đại Học và Trung Học Chuyên Nghiệp, Hà Nội (1974).
- [5] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plessha, Robert J. Witt, *Concepts and applications of Finite element analysis 4th Edition*, John Wiley & Sons, (2002).
- [6] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, London, (1961).
- [7] Vũ Quốc Anh, *Stability analysis of steel frames with semi-rigid connections and rigid zones by using P-Delta effect*, VietNam Journal of Mechanics, Vol24, No1, (2002).
- [8] Nguyễn Thanh Sử, *Tính toán ổn định khung phẳng bằng phương pháp Phần tử Rời rạc*, Luận án Cao học XDDD & CN, Đại học Bách Khoa TP. HCM, (2004).