VỀ TIÊU CHUẨN COMPACT TƯƠNG ĐỐI CỦA KHÔNG GIAN HÀM VÀ ỨNG DỤNG TRONG CẤU TRÚC THỐNG KÊ

Ung Ngọc Quang
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 26 tháng 01 năm 2006, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 28 tháng 08 năm 2006)

TÓM TẮT : *Bài báo đưa ra một tiêu chuẩn mới về tính compact tương đối trong không gian hàm. Sau đó ứng dụng tiêu chuẩn này vào việc khảo sát ước lượng Bayes trong cấu trúc thống kê.*
Từ khoá : *Tiêu chuẩn compact tương đối, không gian hàm, cấu trúc thống kê, mô hình thống kê phi tuyến, tồn tại ước lượng Bayes, xấp xỉ ước lượng Bayes.*

1.ĐẶT VẤN ĐỀ

Thống kê Bayes là một ngành toán học cập nhật và thời sự hiện nay (xem [9], [10]). Trong các bài [1] – [4] chúng tôi đã xét việc ứng dụng giải tích hàm vào mô hình thống kê phi tuyến theo quan điểm Bayes. Kỹ thuật chủ yếu trong các bài đó là tiêu chuẩn compact tương đối trong các không gian hàm. (xem [5] – [6]).

Tuy nhiên, có thể tiếp cận tới tiêu chuẩn compact tương đối theo một hướng khác. Trong bài này chúng tôi đề xuất một tiêu chuẩn mới về tính compact tương đối trong không gian hàm. Sau đó sẽ ứng dụng tiêu chuẩn ấy vào bài toán ước lượng tham ẩn trong cấu trúc thống kê và mô hình phi tuyến .

Trước hết, chúng tôi đưa ra vài ký hiệu quen thuộc :

X : Phần tử quan trắc ngẫu nhiên có tập trị là I

I : Không gian metric compact. Ta ký hiệu metric trên I là d(x,y) với $x, y \in I$

R^r : Không gian Euclide r – chiều .

$B(I), B_r$: Các σ - đại số Borel trên các không gian I và R^r

2.TIÊU CHUẨN COMPACT TƯƠNG ĐỐI TRONG KHÔNG GIAN HÀM

Định nghĩa 2.1 : Xét 2 không gian đo được $(I, B(I)), (R^r, B_r)$.

Hàm h : $(I, B(I)) \to (R^r, B_r)$ gọi là hàm đo được nếu $h^{-1}(B_r) \subset B(I)$.

Hàm đo được h gọi là bị chặn nếu :

$$\sup_{x\in I} \|h(x)\|_{R^r} < +\infty .$$

Tập hợp tất cà các hàm đo được và bị chặn theo nghĩa trên ký hiệu là $B(I, R^r)$.

Định lý 2.1 : Tập hợp $B(I, R^r)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|h\|_B = \sup_{x\in I} \|h(x)\|_{R^r} .$$

Định nghĩa 2.2 : Tập hợp $K \subset B(I, R^r)$ gọi là đồng liên tục tại từng điểm trên I nếu

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta_x = \delta(\varepsilon, x))$$

sao cho

$$(d(x,y) < \delta_x \Rightarrow \|h(x) - h(y)\|_{R^r} < \varepsilon, \forall h \in K) .$$

Định nghĩa 2.3 : Tập hợp $K \subset B(I, R^r)$ gọi là bị chặn tại từng điểm trên I nếu

$$(\forall x \in I, \exists M_x > 0) \text{ sao cho } (\|h(x)\|_{R^r} \le M_x, \forall h \in K).$$

Tiếp theo ta sẽ phát biểu và chứng minh một tiêu chuẩn compact tương đối trong không gian Banach $B(I, R^r)$. Tiêu chuẩn này tương tự như tiêu chuẩn của Ascoli – Arzela đã được phát biểu trong [5] .

Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn compact tương đối trong $B(I, R^r)$) : Cho tập $K \subset B(I, R^r)$ thoả các điều kiện :

(i) K đồng liên tục tại từng điểm trên I

(ii) K bị chặn tại từng điểm trên I.

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(I, R^r)$.

Chứng minh : Trước hết, theo điều kiện (i) , K là tập đồng liên tục tại từng điểm trên I, nên ta có :

$(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta_x = \delta(\varepsilon, x))$ sao cho $(d(x, y) < \delta_x \Rightarrow \|h(x) - h(y)\|_{R^r} < \varepsilon, \forall h \in I)$. Ký hiệu $B(x, \delta_x)$ là quả cầu mở có tâm tại $x \in I$ và có bán kính là δ_x. Lúc đó họ $\{B(x, \delta_x) : x \in I\}$ là một phủ mở của không gian metric I. Nhưng vì I là compact nên tồn tại các điểm $x_i \in I, i = \overline{1, n}$ sao cho :

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_i) \text{ với } \delta_i = \delta(x_i) \text{ , } i = 1, \ldots, n .$$

Ta cố định số n này và xét ánh xạ $\Phi : B(I, R^r) \to M(r \times n)$.

được xác định bởi :

$$\Phi(h) = \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_1(x_2) \cdots h_1(x_n) \\ h_2(x_1) & h_2(x_2) \cdots h_2(x_n) \\ \vdots & \vdots \\ h_r(x_1) & h_r(x_2) \cdots h_r(x_n) \end{pmatrix}.$$

Trong đó $h \in B(I, R^r)$, với $h = (h_1(x_i), h_2(x_i), \ldots, h_r(x_i)), \forall i = \overline{1, n}$ và $M(r \times n)$ là tập hợp tất cả các ma trận r hàng , n cột . Hiển nhiên $M(r \times n)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều với chuẩn :

$$\|\Phi(h)\|_{M(r \times n)} = \max_{1 \le i \le n} \|h(x_i)\|_{R^r} .$$

Theo điều kiện (ii) thì K bị chặn tại từng điểm , nên $\forall h \in K, \exists C_i, i = \overline{1, n}$ sao cho :

$$\|h(x_i)\|_{R^r} \le C_i, \forall i = \overline{1, n}, \forall h \in K.$$

Do đó nếu đặt $C = \max_{1 \le i \le n} C_i$, ta được :

$$\|\Phi(h)\|_{M(r \times n)} \le C, \forall h \in K .$$

Vậy $\Phi(K)$ là tập bị chặn trong không gian $M(r \times n)$, do đó là tập hoàn toàn bị chặn . Vậy nên tồn tại m quả cầu có tâm tj , bán kính $\frac{\varepsilon}{6}$, ký hiệu là $B\,(tj\,,\,\frac{\varepsilon}{6})$ sao cho :

$$\Phi(K) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(t_j, \frac{\varepsilon}{6}) .$$

Ta có thể chọn các quả cầu $B\ (tj\ ,\ \frac{\varepsilon}{6})$ có giao không rỗng với $\Phi(K)$, vì nếu quả cầu nào có giao rỗng , thì ta loại nó đi .

Vì vậy ($\forall h \in K, \exists$ chỉ số j) sao cho $\Phi(h) \in B(t_j, \frac{\varepsilon}{6})$.

$$\Leftrightarrow \left\| \Phi(h) - t_j \right\|_{M(r\times n)} < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Leftrightarrow \max_{1\le i\le n} \left\| h(x_i) - t_{ji} \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left\| h(x_i) - t_{ji} \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{6}, \forall i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

Mặt khác với mọi quả cầu $B\ (tj\ ,\ \frac{\varepsilon}{6})$, ta chọn được hàm $h_j \in K$ sao cho

$$\Phi(h_j) \in B(t_j, \frac{\varepsilon}{6}) \Leftrightarrow \left\| \Phi(h_j) - t_j \right\|_{M(r\times n)} < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Leftrightarrow \max_{1\le i\le n} \left\| h_j(x_i) - t_{ji} \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left\| h_j(x_i) - t_{ji} \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{6}, \forall i = \overline{1,n} . \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\left\| h(x_i) - h_j(x_i) \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall i = \overline{1,n} . \qquad (3)$$

Ta sẽ chứng minh rằng : $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(h_j, \varepsilon)$, trong đó $B(h_j, \varepsilon)$ là quả cầu trong $B(I, R^r)$, có tâm tại hj và có bán kính ε .

Trước hết , lấy bất kỳ $h \in K$. Theo (3) , ta thấy tồn tại chỉ số j sao cho

$$\left\| h(x_i) - h_j(x_i) \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall i = \overline{1,n} .$$

Tiếp theo , lấy bất kỳ $x \in I$. Vì $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_i)$ nên $\exists i$ sao cho $x \in B(x_i, \delta_i)$.

Vì K đồng liên tục tại từng điểm trên I , và $h, h_j \in K$, nên ta có

$$\left\| h(x) - h(x_i) \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left\| h_j(x) - h_j(x_i) \right\|_{R^r} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Mặt khác , $\forall x \in I$, ta có :

$$\|h(x)-h_j(x)\| \le \|h(x)-h(x_i)\|_{R^r} + \|h(x_i)-h_j(x_i)\|_{R^r} + \|h_j(x_i)-h_j(x)\|_{R^r}$$

Do đó :

$$\|h(x)-h_j(x)\| < \varepsilon, \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in I}\|h(x)-h_j(x)\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \|h-h_j\|_B < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow h \in B(h_j,\varepsilon)$$

Điều này có nghĩa , ($\forall h \in K, \exists j$) sao cho $h \in B(h_j,\varepsilon)$

$$\Leftrightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(h_j,\varepsilon) .$$

Vậy K là tập hoàn toàn bị chặn trong $B(I,R^r)$. Nhưng vì $B(I,R^r)$ đầy đủ nên K là compact tương đối và định lý 2.2 chứng minh xong [a]

Để chứng tỏ rằng tiêu chuẩn compact tương đối này là không tầm thường và nó chứa một lớp hàm đo được , bị chặn khá rộng rãi , ta xét thí dụ sau đây .

Thí dụ 2.1 : Xét trường hợp X là quan trắc ngẫu nhiên 1 chiều có tập tri $I = [a,b]$. Hiển nhiên I là tập compact trong R . Xét ánh xạ $h : I \to R$. Ký hiệu không gian các hàm h đo được, bị chặn trên I và có trị trong R là $B(I,R) = B(I)$. Dễ thấy $B(I)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|h\|_{B(I)} = \sup_{x\in I}|h(x)| ,$$

Cho α, C_1, C_2 là các số dương . Ký hiệu K là tập hợp các hàm đo được bị chặn h : $I \to R$ sao cho $|h(a)| \le C_1$ và $|h(x)-h(y)| \le C_2|x-y|^\alpha, \forall x,y \in I = [a,b]$.

Ta sẽ chứng minh rằng K là một tập compact tương đối trong $B(I)$.

Trước hết ta chứng minh rằng K bị chặn đều trên $[a,b]$.

$\forall h \in K, \forall x \in [a,b]$, từ giả thiết ta có

$$|h(x)-h(a)| \le C_2|x-a|^\alpha .$$

$$\Rightarrow |h(x)| \le |h(a)| + C_2|x-a|^\alpha$$

$$\le C_1 + C_2|b-a|^\alpha \le C, \forall h \in K.$$

Mặt khác , với bất kỳ $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $C_2\delta^\alpha < \varepsilon$. Khi đó với mọi $h \in K$ và với mọi $x,y \in [a,b]$ sao cho $|x-y| < \delta$, ta được :

$$|h(x)-h(y)| \le C_2|x-y|^\alpha < C_2.\delta^\alpha < \varepsilon.$$

Vậy K đồng liên tục trên $[a,b]$. Nên theo định lý 2.2 , K là compact tương đối trong B(I). Hơn nữa , ta có thể thấy rằng , thật ra K là tập compact trong $B(I)$. Muốn vậy , ta chỉ cần chứng minh rằng K là tập đóng trong $B(I)$. Thật vậy , lấy bất kỳ dãy $(h_n) \subset K$ và giả sử $\|h_n - h\|_{B(I)} \to 0$. Ta sẽ chứng minh rằng $h \in K$.

Trước hết , vì $(h_n) \subset K$ nên

$$|h_n(x) - h_n(y)| \leq C_2 |x-y|^\alpha, \forall x, y \in [a,b]$$

Theo giả thiết ta có *hn* hội tụ đều về *h* trên *[a,b]* nên khi cho $n \to +\infty$, ta được

$$|h(x) - h(y)| \leq C_2 |x-y|^\alpha, \forall x, y \in [a,b].$$

Mặt khác , ta cũng có $|h_n(a)| \leq C_1, \forall n$ và $h_n(a)$ hội tụ đều về h , nên ta có

$$|h(a)| \leq C_1.$$

Vậy ta có đồng thời $|h(a)| \leq C_1$ và $|h(x) - h(y)| \leq C_2 |x-y|^\alpha, \forall x, y \in [a,b]$.Nên $h \in K$ và do đó K đóng . Suy ra K là tập compact của $B(I)$.

2.1.Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong cấu trúc thống kê

Xét phần tử ngẫu nhiên X có tập trị là không gian metric compact I . Xét không gian Euclide r-chiều *Rr* và tập compact $\Theta \subset R^r$. Ký hiệu vết của σ-đại số B_r trên tập Θ là B(Θ) . Tập Θ được gọi là không gian tham compact. Theo quan điểm Bayes, trên (Θ ,**B**(Θ)) ta xác định một độ đo xác suất τ và gọi là phân phối xác suất tiên nghiệm của tham ẩn $\theta \in \Theta$.

Vì I compact nên I là một không gian metric đầy đủ khả ly . Tương tự Θ cũng là một không gian metric đầy đủ , khả ly . Do đó với X và $\theta \in \Theta$ như trên , tồn tại phân phối xác suất có điều kiện chính quy $P^{X/\theta}, \theta \in \Theta$ thường được ký hiệu là $Q_\theta, \theta \in \Theta$ (xem [7] , [8])

Định nghĩa 3.1 : Bộ ba $(X, I, \{Q_\theta, \theta \in \Theta\})$ gọi là cấu trúc thống kê với tham ẩn $\theta \in \Theta$.

Xét trường hợp đặc biệt khi : $X = \varphi(\theta) + \varepsilon$ (*)

Trong đó : ε : Vectơ sai số ngẫu nhiên có trị trong *Rr*

φ : Hàm phi tuyến cho trước

θ : Tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$.

Lúc đó phương trình (*) gọi là mô hình thống kê phi tuyến với không gian tham compact $\Theta \subset R^r$.

Mục này nhằm ứng dụng tiêu chuẩn compact tương đối trong định lý 2.2 , để chứng minh sự tồn tại ước lượng Bayes cho tham ẩn $\theta \in \Theta$, trong cấu trúc thống kê . Trước hết ta nhắc lại và định nghĩa về ước lượng Bayes đã xét trong [1] – [4] .

Định nghĩa 3.2 : Hàm Borel đo được h : $(I, B(I)) \to (R^r, B_r)$ gọi là ước lượng của tham ẩn $\theta \in \Theta \subset R^r$.

Ước lượng h gọi là bị chặn nếu :

$$\sup_{x \in I} \|h(x)\|_{R^r} < +\infty .$$

Tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn của tham ẩn $\theta \in \Theta$, theo định lý 2.1 là một không gian Banach $B(I, R^r)$ với chuẩn

$$\|h\|_B = \sup_{x \in I} \|h(x)\|_{R^r}$$

Định nghĩa 3.3 : Cho hàm L : $R^r \times \Theta \to \overline{R}^+$ và hàm H: $I \times \Theta \to R^r \times \Theta$ được xác định bởi $H(x, \theta) = (h(x), \theta)$.

Hàm hợp $L(h(.),.) := L_0 H : I\times\Theta \to \overline{R}^+$ được gọi là hàm tổn thất của ước lượng h.

Định nghĩa 3.4 : Phiếm hàm $\psi : B(I,R^r) \to \overline{R}$ được xác định bởi

$\psi(h) = \int\limits_\Theta \int\limits_I L(h(x),\theta) Q_\theta(dx)\tau(d\theta)$ gọi là hàm mạo hiểm Bayes với phân phối xác suất tiên nghiệm τ.

Ước lượng $\hat{h} \in B(I,R^r)$ thoả điều kiện $\psi(\hat{h}) = \inf\limits_{h\in B(I,R^r)} \psi(h)$ gọi là ước lượng Bayes với xác suất tiên nghiệm τ.

Cho μ là độ đo σ-hữu hạn trên không gian đo được $(I,\mathcal{B}(I))$ và giả sử $Q_\theta << \mu, \forall\theta\in\Theta$. Lúc đó , theo định lý Radon - Nicodym, tồn tại hàm mật độ xác suất có điều kiện chính quy $f_\theta(x)$ có dạng :

$$f_\theta(x) = \frac{Q_\theta(dx)}{\mu(dx)} \text{ (xem [6]).}$$

Khi ấy hàm mạo hiểm Bayes sẽ được viết dưới dạng

$$\psi(h) = \int\limits_\Theta \int\limits_I L(h(x),\theta) f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta).$$

Định nghĩa 3.5 : Hàm tổn thất $L(y,\theta)$ gọi là liên tục đều đối với y và đồng bậc đối với θ nếu $(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)$ sao cho

$$(\|y'-y''\|_{R^r} < \delta \Rightarrow |L(y',\theta) - L(y'',\theta)| < \varepsilon, \forall y',y''\in R^r, \forall\theta\in\Theta).$$

Từ các định nghĩa trên , ta có định lý sau đây về ước lượng Bayes .

Định lý 3.1 : Cho cấu trúc thống kê $(X, I, \{Q_\theta, \theta\in\Theta\})$ và $B(I,R^r)$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn của tham ẩn $\theta\in\Theta$. Giả sử tập K các ước lượng của θ và hàm tổn thất $L(y,\theta)$ thoả các điều kiện :

(i) $h(I)\subset\Theta, \forall h\in K$.

(ii) K đồng liên tục tại từng điểm trên I .

(iii)Hàm tổn thất $L(y,\theta)$ liên tục đều đối với y và đồng bậc đối với θ.

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(I,R^r)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$, tồn tại ước lượng Bayes .

Chứng minh : Vì Θ compact , nên theo điều kiện (i) $\exists M > 0$ sao cho

$$\sup_{x\in I} \|h(x)\|_{R^r} \le M, \forall h\in K.$$

Do đó K là tập hợp đồng bị chặn của không gian Banach $B(I,R^r)$. Mặt khác , theo điều kiện (ii) thì tập K đồng liên tục tại từng điểm $x\in I$. Vì vậy theo định lý 2.2 thì K là tập compact tương đối trong $B(I,R^r)$. Tiếp theo , ta sẽ chứng tỏ rằng , từ $h(I)\subset\Theta, \forall h\in K$ suy ra $h(I)\subset\Theta, \forall h\in\overline{K}$. Thật vậy, lấy bất kỳ $h\in\overline{K}$. Khi ấy $\exists(h_n)\subset K$ sao cho $\|h_n - h\|_B \to 0$ khi $n\to+\infty$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in I}\|h_n(x) - h(x)\|_{R^r} \to 0, n\to+\infty$$

$$\Leftrightarrow \|h_n(x) - h(x)\|_{R^r} \to 0, \forall x\in I, n\to+\infty$$

Vì $h_n\in K$, nên $h_n(x)\in\Theta, \forall x\in I, \forall n\in N$.

Nhưng vì Θ compact nên $h(x)\in\Theta, \forall x\in I, \forall n\in N$, tức là $h(I)\subset\Theta$. Điều này có nghĩa

$$h(I)\subset\Theta, \forall h\in\overline{K}.$$

Cuối cùng xét hàm mạo hiểm Bayes $\psi : B(I,R^r) \to \overline{R}^+$ được xác định bởi

$$\psi(h) = \int_{\Theta}\int_{I} L(h(x),\theta) f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta).$$

Ta sẽ chứng minh rằng ψ liên tục đều trên $B(I,R^r)$, tức là ta phải chứng minh $(\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon))$ sao cho $(\|h'-h''\|_B<\delta \Rightarrow |\Psi(h')-\Psi(h'')|<\varepsilon, \forall h',h''\in B(I,R^r))$.

Thật vậy, ta thấy từ $\|h'-h''\|_B<\delta \Rightarrow \|h'(x)-h''(x)\|_{R^r}<\delta, \forall x\in I$. Từ nay và theo điều kiện (iii), ta được :

$$|L(h'(x),\theta)-L(h''(x),\theta)|<\varepsilon$$

Suy ra : $|\psi(h')-\psi(h'')| \le \int_{\Theta}\int_{I} |L(h'(x),\theta)-L(h''(x),\theta)| Q_\theta(dx)\tau(d\theta)$.

$$< \int_{\Theta}\int_{I} \varepsilon Q_\theta(dx)\tau(d\theta)=\varepsilon$$

Vậy ψ liên tục đều trên tập compact $\overline{K}\subset B(I,R^r)$. Do đó $\exists\hat{h}\in\overline{K}$ sao cho

$\psi(\hat{h})=\inf_{h\in\overline{K}}\psi(h)$. Định lý chứng minh xong ª

Trong định lý 3.1 , nếu thay điều kiện liên tục đều và đồng bậc của hàm tổn thất $L(y,\theta)$ bằng điều kiện Lipschitz , ta sẽ có định lý sau đây .

Định lý 3.2 : Cho cấu trúc thống kê $(X,I,\{Q_\theta,\theta\in\Theta\})$ và $B(I,R^r)$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn các tham ẩn $\theta\in\Theta$. Giả sử tập K các ước lượng của $\theta\in\Theta$ và hàm tổn thất $L(y,\theta)$ thoả các điều kiện

(i) $h(I)\subset\Theta, \forall h\in K$

(ii) K đồng liên tục tại từng điểm trên I .

(iii)Hàm tổn thất $L(y,\theta)$ thoả điều kiện Lipshitz, tức là

$$\exists C>0: |L(y',\theta)-L(y'',\theta)| \le C\|y'-y''\|_{R^r}, \forall y',y''\in R^r, \forall\theta\in\Theta.$$

Khi ấy K là tập compact tương đối trong $B(I,R^r)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes .

Chứng minh : Chứng minh giống như định lý 3.1 và các định lý tồn tại đã xét trong các bài [1] - [2] .

Nhận xét : Nếu $L(y,\theta)$ thoả điều kiện Lipschitz thì $L(y,\theta)$ sẽ liên tục đều và đồng bậc đối với θ, nhưng ngược lại chưa chắc đúng . Như vậy định lý 3.1 rộng rãi hơn định lý 3.2 . Tuy nhiên để ứng dụng vào bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes sẽ xét trong mục 4, thì định lý 3.2 lại tỏ ra có hiệu lực hơn .

2.2.Xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến 1–chiều

Xét mô hình thống kê phi tuyến 1-chiều có dạng

$$X=\varphi(\theta)+\varepsilon .$$

Trong đó :

X : Đại lượng quan trắc ngẫu nhiên có trị trong tập $I\subset R$

I : Tập compact thuộc R .

θ: Tham ẩn định vị , $\theta\in\Theta$

Θ : Tập compact thuộc R

ε: Sai số ngẫu nhiên nhận giá trị trong R và $E\varepsilon=0$.

Ký hiệu *B(I) = B(I,R)* là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn , xác định trên tập $I\subset R$ và có trị trong R .

Hiển nhiên *B(I)* là không gian Banach và là một lớp ước lượng của tham ẩn định vị $\theta\in\Theta$.

Ký hiệu $C(I) := C(I,R)$ là tập hợp tất cả các hàm liên tục xác định trên tập $I \subset R$ và có giá trị trong R. Hiển nhiên $C(I)$ cũng là một không gian Banach và $C(I) \subset B(I)$.

Định lý 4.1 : Giả sử K là một lớp ước lượng của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ thoả các điều kiện của định lý 3.2 . Giả sử $|f_\theta(x)| \le C', \forall x \in I, \forall \theta \in \Theta$. Khi ấy có thể xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ bằng một đa thức .

Chứng minh : Vì K thoả các điều kiện của định lý 3.2 nên K là một tập compact tương đối trong $B(I)$ và tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h} \in \bar{K}$.

Vì $\hat{h} \in \bar{K} \subset B(I)$, nên $\forall \varepsilon > 0$, theo định lý Lusin , tồn tại $g \in C(I)$ sao cho :

$$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4.C.C'.C''} .$$

Với $A = \{x \in I : \hat{h}(x) \neq g(x)\}$ và μ là độ đo Lebegues trên R . Cũng theo định lý Lusin , $\exists C'' > 0$ sao cho : $|\hat{h}(x)| \le C'', |g(x)| \le C''$. Do đó ta có :

$$|\psi(\hat{h}) - \psi(g)| \le \int_\Theta \int_I |L(\hat{h}(x),\theta) - L(g(x),\theta)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$= \int_\Theta \int_A |L(\hat{h}(x),\theta) - L(g(x),\theta)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) +$$

$$\int_\Theta \int_{I-A} |L(\hat{h}(x),\theta) - L(g(x),\theta)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$= \int_\Theta \int_A |L(\hat{h}(x),\theta) - L(g(x),\theta)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \int_\Theta \int_A C|\hat{h}(x) - g(x)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \int_\Theta \int_A 2C.C'.C'' \mu(dx)\tau(d\theta) = 2C.C'.C''\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy $|\psi(\hat{h}) - \psi(g)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác , với $\varepsilon > 0$ và $g \in C(I)$ như trên , theo định lý xấp xỉ Weierstrass, tồn tại đa thức $P_{n,a} \in C(I)$ có bậc $n = n(\varepsilon, \hat{h})$ và hệ số $a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$, sao cho :

$$\|g - P_{n,a}\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2C} .$$

Từ đây ta được :

$$|\psi(g) - \psi(P_{n,a})| \le \int_\Theta \int_I |L(g(x),\theta) - L(P_{n,a}(x),\theta)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \int_\Theta \int_I C|g(x) - P_{n,a}(x)| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \int_\Theta \int_I C\|g - P_{n,a}\|_{C(I)} Q_\theta(dx)\tau(d\theta) < \frac{\varepsilon.C}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Do đó : $|\psi(\hat{h}) - \psi(P_{n,a})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ và định lý 4.1 chứng minh xong [a]

Tiếp theo ta đi tìm thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ $Pn_{,a}$. Trước hết , ta thấy đa thức này có bậc $n = n(\hat{h}, \varepsilon)$ phụ thuộc vào $\hat{h}$ và hệ số $a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$.

Theo cách xác định phiếm hàm ψ, ta thấy $\psi(P_{n,a})$ chỉ phụ thuộc vào hệ số $a \in R^{n+1}$. Điều này có nghĩa $\forall a \in R^{n+1}, \exists! \psi(P_{n,a}) \in \overline{R}^{+}$. Do đó tồn tại hàm nhiều biến $F: R^{n+1} \to \overline{R}^{+}$ được xác định bởi $F(a) = \psi(P_{n,a})$.

Chú ý rằng với $h' \in \overline{K}$ và $h' \neq \hat{h}$ thì tồn tại $n' = n(h', \varepsilon)$ và do đó tồn tại không gian $R^{n'+1}$ cùng với ánh xạ $F: R^{n'+1} \to \overline{R}^{+}$ được xác định bởi $F(a) = \psi(P_{n',a})$.

Như vậy số bậc n không được xác định duy nhất và do đó hàm F không được xác định trên cùng một không gian R^{n+1}. Điều này gây khó khăn cho việc xây dựng đa thức xấp xỉ $P_{n,a}$ của ta.

Tuy nhiên , do tính compact của tập $\overline{K}$, ta thấy điều khó khăn này có thể vượt qua bởi định lý sau đây .

Định lý 4.2 : Cho tập compact $\overline{K} \subset B(I)$ và $\varepsilon > 0$ như định lý 4.1 . Khi ấy tồn tại duy nhất một $n \in N$ và tương ứng với nó là đa thức $P_{n,a}$ sao cho :

$$\left|\psi(h) - \psi(P_{n,a})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K} .$$

Chứng minh : Vì $\overline{K}$ compact , nên với $\varepsilon > 0$ cho trước sẽ tồn tại hữu hạn $h_1, h_2, ..., h_s \in \overline{K}$ sao cho : $\overline{K} \subset \bigcup_{j=1}^{s} B(h_j, \frac{\varepsilon}{2.C})$, trong đó hằng số C được xác định theo định lý 3.2 .

Trước hết với h_1 , theo định lý 4.1 sẽ tồn tại $n_1 = n(h_1, \varepsilon)$ và đa thức tương ứng $P_{n_1, a_{n_1}}$ với hệ số $a_{n_1} \in R^{n_1+1}$ sao cho :

$$\left|\psi(h_1) - \psi(P_{n_1, a_{n_1}})\right| < \varepsilon$$

Tương tự , với hs , theo định lý 4.1 , tồn tại $n_s = n(h_s, \varepsilon)$ và đa thức tương ứng $P_{n_r, a_{n_s}}$ với hệ số $a_{n_s} \in R^{n_s+1}$ sao cho :

$$\left|\psi(h_s) - \psi(P_{n_s, a_{n_s}})\right| < \varepsilon .$$

Đặt $n = \max_{1 \le j \le s} n_j$. Lúc đó ta xây dựng được một đa thức $P_{n,a}$ có bậc n và có hệ số $a \in R^{n+1}$ sao cho $\left|\psi(h) - \psi(P_{n,a})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$.

Thật vậy , lấy bất kỳ $h \in \overline{K}$. Vì $\overline{K} \subset \bigcup_{j=1}^{s} B(h_j, \frac{\varepsilon}{2.C})$, nên tồn tại chỉ số j sao cho :

$$\left\|h - h_j\right\|_{B(I)} < \frac{\varepsilon}{2.C} .$$

Do đó : $\left|\psi(h) - \psi(h_j)\right| \le \int_{\Theta}\int_{I} \left|L(h(x), \theta) - L(h_j(x), \theta)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$

$$\le \int_{\Theta}\int_{I} C\left|h(x) - h_j(x)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$$

$$\le \int_{\Theta}\int_{I} C\left\|h - h_j\right\|_{B(I)} f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Vậy $\left|\psi(h)-\psi(h_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Mặt khác, với $h_j \in B(I)$ như trên, theo định lý 4.1, tồn tại $g_j \in C(I)$ sao cho:

$$\left|\psi(h_j)-\psi(g_j)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Với hàm g_j này, sẽ tồn tại một số nguyên dương *nj* và tương ứng với nó là đa thức $P_{n_j,a_{n_j}}$ với hệ số $a_{n_j} \in R^{n_j+1}$ sao cho:

$$\left\|g_j - P_{n_j,a_{n_j}}\right\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4C}$$

Suy ra: $\left|\psi(g_j)-\psi(P_{n_j,a_{n_j}})\right| \le \int_\Theta \int_I \left|L(g_j(x),\theta)-L(P_{n_j,a_{n_j}}(x),\theta)\right| f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$

$$\le \int_\Theta \int_I C\left\|g_j - P_{n_j,a_{n_j}}\right\|_{C(I)} f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tuy nhiên, vì $n = \max_{1\le j\le s} n_j$, nên ta có thể xây dựng một đa thức $P_{n,a}$ với hệ số $a \in R^{n+1}$ như sau:

$$P_{n,a}(x) = P_{n_j,a_{n_j}}(x) + 0.x^{n_j+1} + \ldots + 0.x^n = P_{n_j,a_{n_j}}(x).$$

Khi ấy: $\left|g_j(x) - P_{n_j,a_{n_j}}(x)\right| = \left|g_j(x) - P_{n,a}(x)\right|$

Do đó: $\left\|g_j - P_{n_j,a_{n_j}}\right\|_{C(I)} = \left\|g_j - P_{n,a}\right\|_{C(I)}$.

Suy ra: $\left\|g_j - P_{n,a}\right\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4.C}$

Vậy nên: $\left|\psi(h_j)-\psi(P_{n,a})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\left|\psi(h)-\psi(P_{n,a})\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$.

Định lý 4.2 chứng minh xong [a]

Cuối cùng dựa vào định lý 4.2 ta tìm được một thuật toán xây dựng đa thức cực tiểu xấp xỉ với ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$.

3.THUẬT TOÁN

Theo định lý 4.2, $\forall \varepsilon > 0, \exists! n = n(\varepsilon)$ sao cho $\left|\psi(h)-\psi(P_{n,a})\right| < \varepsilon, \forall h \in \overline{K}$. Do đó với mọi $a \in R^{n+1}$, tồn tại một ánh xạ $F: R^{n+1} \to \overline{R}^+$
được xác định bởi $F(a) = \psi(P_{n,a})$.

Tiếp theo, ta đặt:

$$A_{\varepsilon,h} = \left\{a \in R^{n+1} : \left|\psi(h) - F(a)\right| < \varepsilon\right\}$$

$$A_\varepsilon = \bigcup_{h\in\overline{K}} A_{\varepsilon,h}.$$

Ta thấy $A_{\varepsilon,h} \neq 0$ vì ta vừa chứng tỏ rằng $\forall h \in \overline{K}$ luôn tồn tại đa thức $P_{n,a}$(tức là có vectơ $a \in R^{n+1}$) sao cho :

$$|\psi(h) - \psi(P_{n,a})| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |\psi(h) - F(a)| < \varepsilon .$$

Giả sử F đạt cực tiểu trên A_{ε}. Khi ấy $\exists a^{*} \in A_{\varepsilon}, F(a^{*}) = \inf_{h \in \overline{K}} F(a)$.

Giả sử $\hat{h}$ là một ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là

$$\psi(\hat{h}) = \inf_{h \in \overline{K}} \psi(h) .$$

Với $\hat{h}$ này , luôn tồn tại đa thức $P_{n,\hat{a}}$ với bậc n và với hệ số $\hat{a} \in R^{n+1}$ sao cho :

$$|F(\hat{a}) - \psi(\hat{h})| < \varepsilon \qquad (1)$$

Từ đây , theo định nghĩa của A_{ε}, ta thấy $\hat{a} \in A_{\varepsilon}$

Do đó : $F(a^{*}) - F(\hat{a}) < 3.\varepsilon$ (2)

Mặt khác , ta có đồng thời :

$$F(\hat{a}) - \psi(\hat{h}) < \varepsilon$$

$$\psi(\hat{h}) - \psi(h^{*}) < \varepsilon$$

$$\psi(h^{*}) - F(a^{*}) < \varepsilon$$

Suy ra : $F(a^{*}) - F(\hat{a}) > -3\varepsilon$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra :

$$|F(a^{*}) - F(\hat{a})| < 3\varepsilon \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra :

$$|F(a^{*}) - \psi(\hat{h})| < 4\varepsilon .$$

Với $a^{*} \in R^{n+1}$ có thể xây dựng được đa thức $P_{n,a^{*}}$ thoả điều kiện $F(a^{*}) = \psi(P_{n,a^{*}})$.

Do đó : $|\psi(P_{n,a^{*}}) - \psi(\hat{h})| < 4\varepsilon$.

Điều này có nghĩa ta đã tìm được thuật toán xây dựng đa thức cực tiểu $P_{n,a^{*}}$ xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$.

4.THẢO LUẬN

Có thể xét trường hợp không gian tham Θ là tập compact trong một không gian Banach khả ly rồi đưa ra tiêu chuẩn compact tương đối cho không gian hàm tương ứng.

Cũng có thể xét bài toán xấp xỉ trong trường hợp n > 1 .Các vấn đề này sẽ được khảo sát trong một tương lai gần.

THE RELATIVELY COMPACT CRITERION IN THE FUNCTIONAL SPACES AND ITS APPLICATION IN STATISTICAL STRUCTURE

Ung Ngoc Quang
University of Natural Sciences, VNU – HCM

ABSTRACT : *In this paper , we present a new relatively compact criterion in the functional spaces . By using this criterion , with some conditions on the class of estimators, we prove some theorem on the existence of Bayesian estimators and on the approximation of Bayes estimators by polinomial functions .*

Keywords: Relatively compact criterion, functional spaces,statistical structure, nonlinear statistical models, Bayesian estimators, existence, approximation.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Ung Ngoc Quang , *On the existence of Bayesian estimates in nonlinear statistical models with compact parameter space*, Acta Math .Vietnamica , Vol.19, No.2, 149 – 160, (1994).

[2]. Ung Ngoc Quang , *On the existence of Bayesian estimates in multidimensional nonlinear statistical models with compact parameter space*, VietNam Journal of Mathermatics , Vol.23, No.2 , 229 – 240, (1995).

[3]. Ung Ngoc Quang , *On the Bayesian estimates in multidimensional nonlinear regresion models, Journal Science and Technology development*,Vietnam National University – HoChiMinh City, Vol.4, No.7 , 23 – 29, (2001).

[4]. Ung Ngoc Quang , *On the approximation of Bayesian estimates in functional spaces, Journal Science and Technology development*,Vietnam National University – HoChiMinh City, Vol.8, No.1 5 – 13, (2005).

[5]. R.Meise and D.Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford (1997)

[6]. W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, Tata McGraw – Hill, (1978).

[7]. S.Zacks, *The Theory of Statistical Inference* , John Wiley, (1971).

[8]. I.I.Gikhmand , A.V.Skorokhod, *Lý thuyết quá trình ngẫu nhiên* (tiếng Nga), Nauka, Mockva, (1971).

[9]. P.Congdon, *Bayesian Statistical Modelling*, John Wiley, (2005).

[10]. P.M.Lee, *Bayesian Statistics*, Oxford University Press, (2004).