

# ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP MESHLESS CHO BÀI TOÁN ỨNG SUẤT PHẪNG

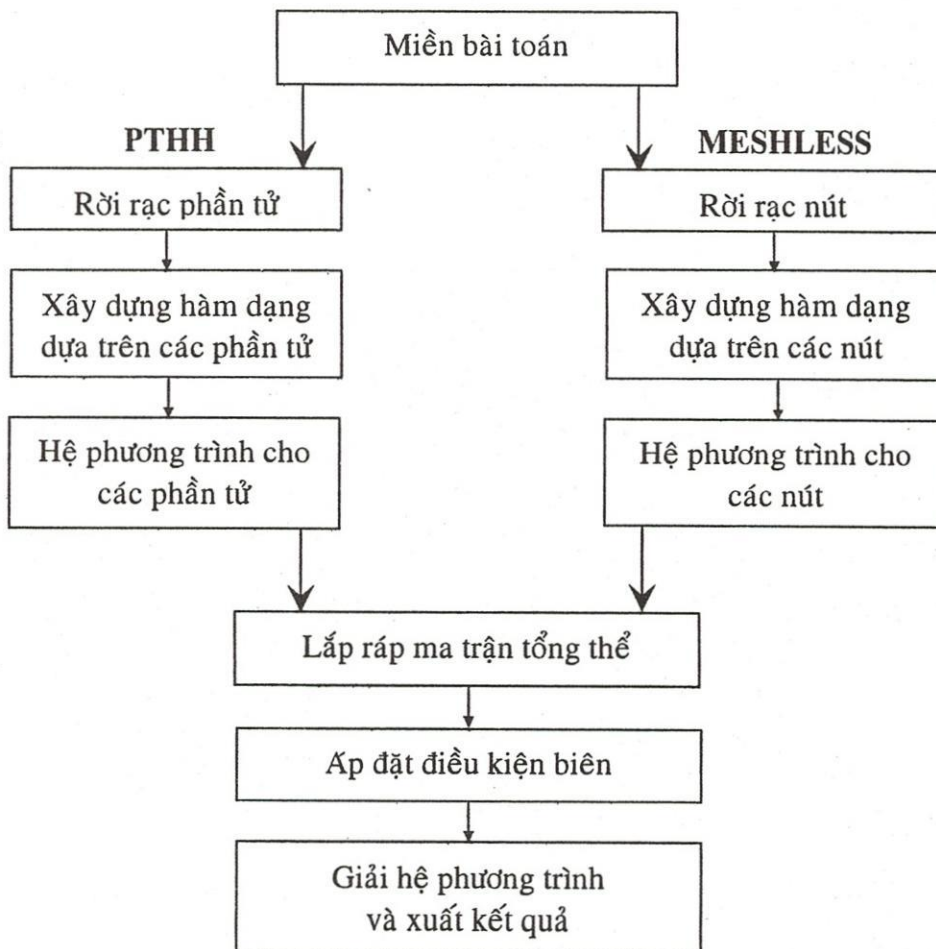
Bùi Quốc Tính, Ngô Thành Phong

Khoa Toán -Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Tp. HCM  
(Bài nhận ngày 08 tháng 06 năm 2005, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 28 tháng 10 năm 2005)

**TÓM TẮT:** Trong bài báo này, chúng tôi áp dụng phương pháp Meshless để giải bài toán ứng suất phẳng dầm Timoshenko. Đồng thời áp dụng hai phương pháp khử điều kiện biên khác nhau. Các phương pháp được sử dụng, thứ nhất là phương pháp Nhân tử Lagrange và thứ hai là phương pháp hàm phạt. Hàm dạng của các bài toán được xây dựng dựa trên phương pháp xấp xỉ bình phương tối thiểu. Kết quả tính toán thể hiện tốt sự hội tụ năng lượng biến dạng của hai phương pháp so với lời giải giải tích của dầm Timoshenko. Tất cả chương trình được viết trên ngôn ngữ Matlab.

## 1. GIỚI THIỆU

Trong các phương pháp số dùng trong tính toán cơ học hiện nay, phương pháp Meshless là một trong những phương pháp số còn rất mới mẻ. Không như phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), phương pháp Meshless không rời rạc phần tử mà chỉ rời rạc miền bài toán thành tập hợp tất cả các nút. Tổng quan có thể thấy thuật toán tổng quát giữa hai phương pháp phần tử hữu hạn và Meshless được thể hiện như Hình 1 dưới đây



Hình 1: Thuật toán tổng quát của hai phương pháp PTHH và Meshless

Hiện nay trên thế giới cũng đã có nhiều phương pháp khử điều kiện biên khác nhau. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng hai phương pháp khử điều kiện biên là nhân tử Lagrange và hàm phạt. Trong việc xấp xỉ, chúng tôi áp dụng một dạng của phương pháp của Meshless là phương pháp Element-free Galerkin (EFG) được phát triển bởi Belytschko Ted [1] để xây dựng dạng biến phân của bài toán hai chiều bằng nguyên lý biến phân Galerkin. Bài báo trình bày theo tuần tự như sau: Mục 2 trình bày tóm lược phương pháp Element-free Galerkin, Mục 3 trình bày phương pháp nhân tử Lagrange, hàm phạt trong Mục 4 và Mục 5 là kết quả số cho bài toán dầm Timoshenko.

**2. PHƯƠNG PHÁP ELEMENT-FREE GALERKIN [1], [2]**

Phương pháp bình phương tối thiểu (Moving least squares-MLS) được sử dụng trong phương pháp EFG để xấp xỉ một hàm  $u(x)$  thành  $u^h(x)$  trong miền  $\Omega$  thì được định nghĩa

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)a_i(x) = p^T(x)a(x) \tag{1}$$

ở đây  $p_i(x)$  là đa thức cơ bản. Trong 2D đa thức cơ bản dạng tuyến tính là

$$p^T(x) = [1 \quad x \quad y], \quad m = 3 \tag{2}$$

và dạng bậc 2

$$p^T(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad xy], \quad m = 6 \tag{3}$$

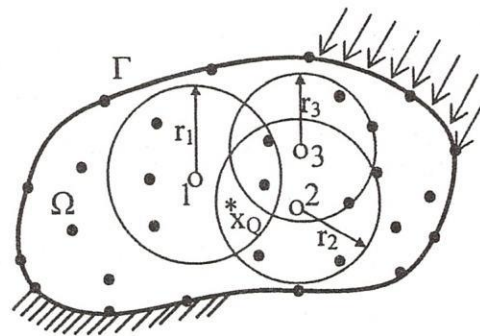
Hệ số  $a_i(x)$  trong phương trình (1) là một hàm của  $x$ ,  $a_i(x)$  thu được tại điểm  $x$  bằng cực tiểu hàm  $J$  theo chuẩn  $L_2$  như sau:

$$J = \sum_I^n w(x-x_I)[u^h(x)-u_I]^2 = \sum_I^n w(x-x_I)[p^T(x_I)a(x)-u_I]^2 \tag{4}$$

Phương trình (4) có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$J = (Pa-u)^T w(x)(Pa-u) \tag{5}$$

trong phương trình (4),  $n$  là số nút trong miền ảnh hưởng của  $x$  mà ở đó hàm trọng số  $w(x-x_I) \neq 0$  và  $u_I$  là giá trị của  $u$  tại nút  $x = x_I$ .



**Hình 2:** Miền ảnh hưởng của nút  $x_Q$  được đánh dấu \*.

Tất cả các nút được bao phủ trong miền ảnh hưởng đều được sử dụng để xây dựng hàm dạng. Ở đây, nút 1 và 2 thì bị ảnh hưởng, nút 3 không bị ảnh hưởng. Các  $r_1, r_2$  và  $r_3$  lần lượt là bán kính ảnh hưởng.

Cực tiểu  $J$  theo  $a$  
$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \tag{6}$$

thu được mối liên hệ tuyến tính giữa  $a$  và  $u_I$

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u \tag{7}$$

trong đó 
$$A(x) = \sum_I^n w_I(x) p^T(x_I) p(x_I), \quad w_I(x) \equiv w(x - x_I) \quad (8)$$

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1), \quad w_2(x)p(x_2), \quad \dots \quad w_n(x)p(x_n)] \quad (9)$$

$$u^T = [u_1, \quad u_2, \quad \dots \quad u_n] \quad (10)$$

Từ (1) và (7) chúng ta thu được hàm xấp xỉ  $u^h(x)$

$$u^h(x) = \sum_I^n \sum_J^m p_J(x) (A^{-1}(x) B(x))_{JI} u_I \equiv \sum_I^n \phi_I(x) u_I \quad (11)$$

và hàm dạng  $\phi_I(x)$  thì được định nghĩa như sau

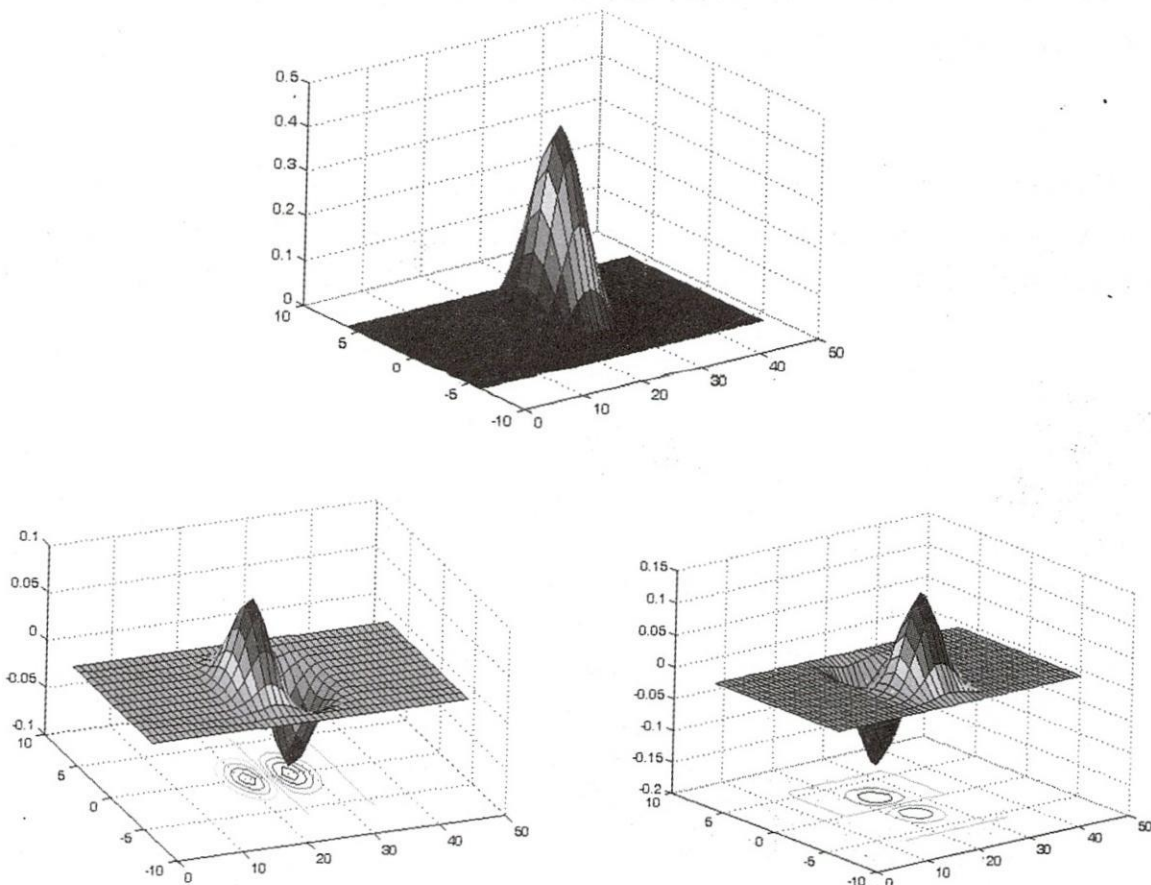
$$\phi_I(x) = \sum_J^m p_J(x) (A^{-1}(x) B(x))_{JI} \quad (12)$$

Đạo hàm của hàm dạng  $\phi_I(x)$  có thể thu được

$$\phi_{I,i}(x) = \sum_J^m \{ p_{J,i} (A^{-1} B)_{JI} + p_J (A^{-1}_i B + A^{-1} B_i)_{JI} \} \quad (13)$$

Trong bài báo này, hàm trọng số  $w(x)$  là hàm cubic spline được sử dụng với bán kính ảnh hưởng  $r$ . [3]

$$w(x) \equiv w(x - x_I) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (14)$$



Hình 3: Hàm dạng và đạo hàm hàm dạng theo phương  $x$  và  $y$

### 3. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE [1],[2], [3]

Xét bài toán tĩnh hai chiều trong miền  $\Omega$  với biên  $\Gamma$ , phương trình cân bằng có dạng

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \text{ trong } \Omega \tag{15}$$

với  $\sigma$  là tenxơ ứng suất tương ứng với trường chuyển vị  $u$ ,  $b$  là vector lực khối. Điều kiện biên được cho bởi

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ trên } \Gamma_i, \tag{16a}$$

$$u = \bar{u} \text{ trên } \Gamma_u \tag{16b}$$

Để xác định các thành phần chuyển vị  $u \in H^1(\Omega)$ , biến dạng  $\varepsilon \in H^0(\Omega)$ , ứng suất  $\sigma \in H^0(\Omega)$  và nhân tử Lagrange  $\lambda \in H^0(\Omega)$  phải thỏa mãn các phương trình (15), (16a) và (16b). Sử dụng nguyên lý biến phân Galerkin cho phương trình cân bằng thu được

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta u^T : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta u^T \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \tag{17}$$

$\forall \delta u \in H^1, \delta \lambda \in H^0$ ,  $H^1$  và  $H^0$  được ký hiệu là không gian Sobolev bậc 1 và 0. Từ phương trình (12), ta áp dụng cho thành phần xấp xỉ chuyển vị

$$u^h(x) = \sum_I^n \phi_I(x) u_I \tag{18}$$

Chú ý rằng hàm xấp xỉ không thỏa mãn điều kiện biên cơ bản trên biên  $\Gamma_u$ , nghĩa là

$$u^h(x_I) - \bar{u} \neq 0 \Leftrightarrow \sum_I^n \phi_I(x) u_I - \bar{u} \neq 0 \tag{19}$$

vì vậy chúng ta sử dụng nhân tử Lagrange để đảm bảo điều kiện biên trên  $\Gamma_u$  và được biểu diễn theo phương trình (11), có dạng như sau

$$\lambda(x) = N_I(s) \lambda_I, \quad x \in \Gamma_u \tag{20}$$

$$\delta \lambda(x) = N_I(s) \delta \lambda_I, \quad x \in \Gamma_u \tag{21}$$

ở đây,  $N_I(s)$  là hàm nội suy Lagrange trên cung  $s$  dọc trên biên  $\Gamma$ . Cuối cùng chúng ta thu được hệ phương trình rời rạc bằng việc thế các hàm xấp xỉ và các phương trình (20), (21) vào phương trình biến phân (17)

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \tag{22}$$

trong đó

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad \text{ma trận độ cứng} \tag{23}$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I N_K d\Gamma \tag{24}$$

$$f_I = \int_{\Gamma_i} \phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I b d\Omega \tag{25}$$

$$q_k = - \int_{\Gamma_u} N_K \bar{u} d\Gamma \tag{26}$$

ở đây

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$N_K = \begin{bmatrix} N_K & N_K \\ N_K & N_K \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ cho bài toán ứng suất phẳng} \quad (29)$$

**4. PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT [6], [7]**

Trong phương pháp nhân tử Lagrange ở trên, phương trình (22) đã bị mở rộng bởi nhân tử Lagrange. Sự mở rộng này cũng ảnh hưởng đến việc giải hệ phương trình trên nếu bài toán khảo sát lớn hơn. Ở đây, hàm phạt được sử dụng để đảm bảo điều kiện biên cơ bản mà hệ phương trình vẫn không thay đổi hay mở rộng kích thước ban đầu. Tương tự như nhân tử Lagrange, điều kiện biên sử dụng trong hàm phạt cũng là phương trình (19).

$$\sum_I^n \phi_I(x)u_I = \bar{u} \text{ trên } \Gamma_u \quad (30)$$

Xét bài toán như các phương trình (15), (16a) và (16b). Thay vì sử dụng nhân tử Lagrange, chúng ta dùng hệ số phạt  $\alpha$  để cho nghiệm xấp xỉ  $u^h$  MLS trên biên  $\Gamma_u$  bằng với ràng buộc chuyển vị cho trước  $\bar{u}$ , nghĩa là :

$$\alpha \left( \sum_I^n \phi_I(x)u_I - \bar{u} \right) = 0 \text{ trên } \Gamma_u \quad (31)$$

khi đó dạng biến phân Galerkin sử dụng cho hàm phạt có thể được viết như sau

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta u^T : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T . b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T . \bar{t} d\Gamma - \frac{\alpha}{2} \delta \left( \int_{\Gamma_u} \|u - \bar{u}\|^2 d\Gamma \right) = 0 \quad (32)$$

với  $\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_k]$ , trong 2D,  $k = 2$ . Trong Meshless,  $\alpha = 1.0 \times 10^{5-8} E$ , như trong [7] của Liu G.R, với E là môđun đàn hồi. Ta thế biểu thức của xấp xỉ MLS cho chuyển vị  $u^h$  như trong phương trình (18) vào phương trình biến phân (32) ta thu được phương trình

$$Kq = g \quad (33)$$

với

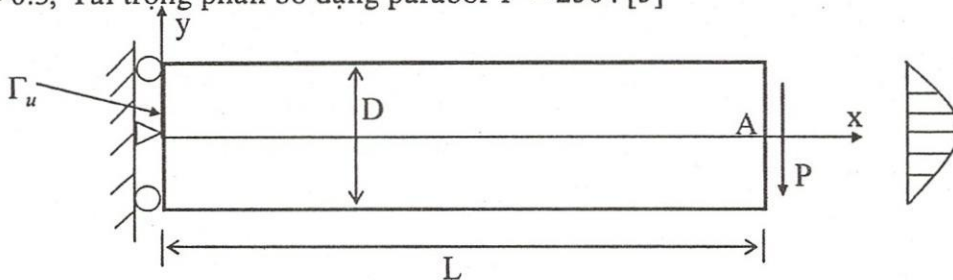
$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_i \phi_j d\Gamma \quad (34)$$

$$g_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i b d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_i \bar{u} d\Gamma \quad (35)$$

các số hạng cuối cùng của hai phương trình (34), (35) là những ma trận độ cứng phạt tổng quát và vectơ lực phạt trên biên  $\Gamma_u$ . Ở đây,  $\phi_i$  được xác định như trên phương trình (12).

**5. KẾT QUẢ SỐ**

Xét bài toán dầm Timoshenko, có  $L = 8; D = 4$ ; Môđun đàn hồi  $E = 3.10^7$ ; Hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ ; Tải trọng phân bố dạng parabol  $P = 250$ . [5]



Hình 4: Dầm Timoshenko

Nghiệm giải tích theo Timoshenko và Goodier [8]

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \nu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (36)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (37)$$

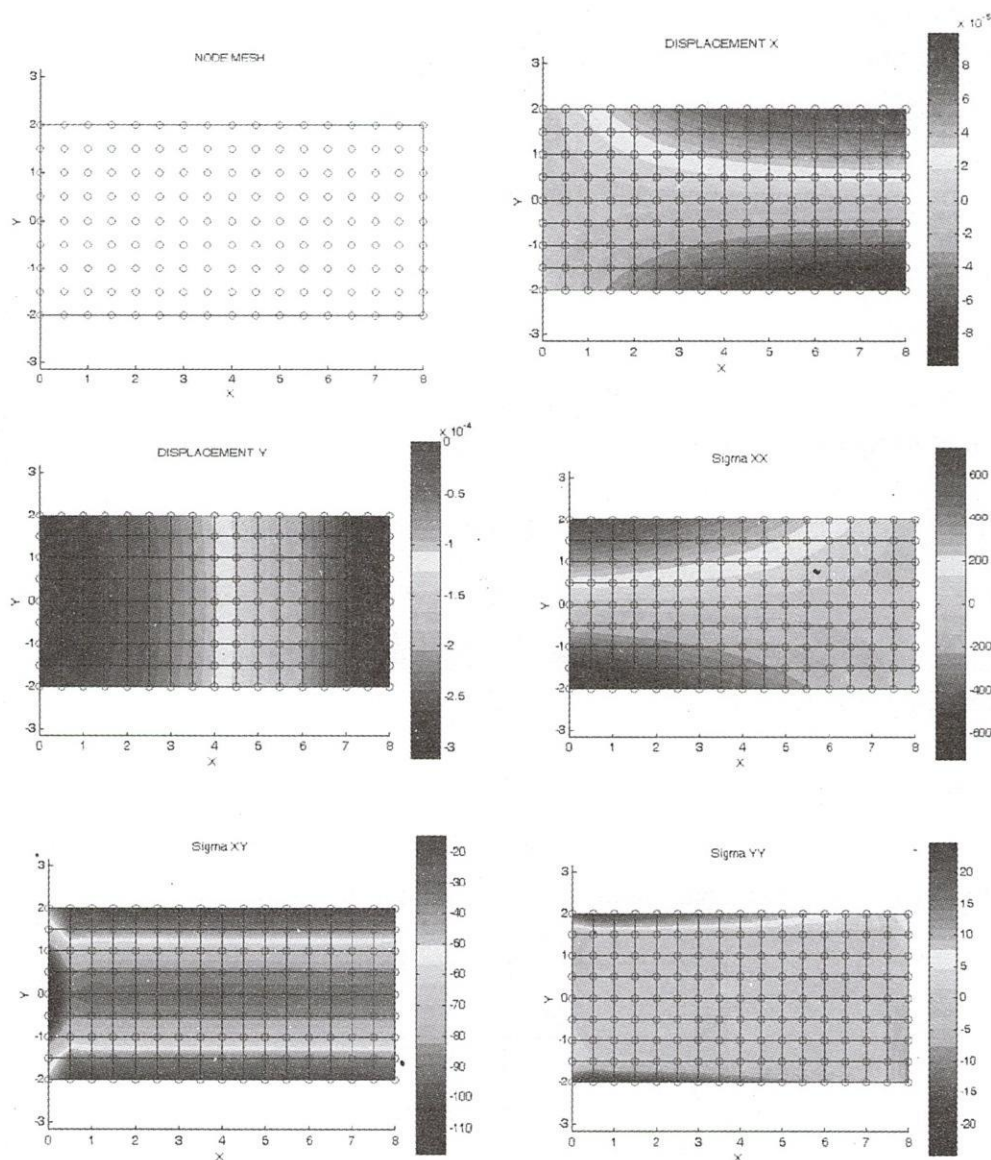
Các thành phần ứng suất tương ứng với các chuyển vị

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{P(L - x)y}{I} \quad (38)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0 \quad (39)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{Py}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (40)$$

Lần lượt rời rạc bài toán từ 45, 91, 153 và 561 nút. Kết quả tính toán như dưới đây



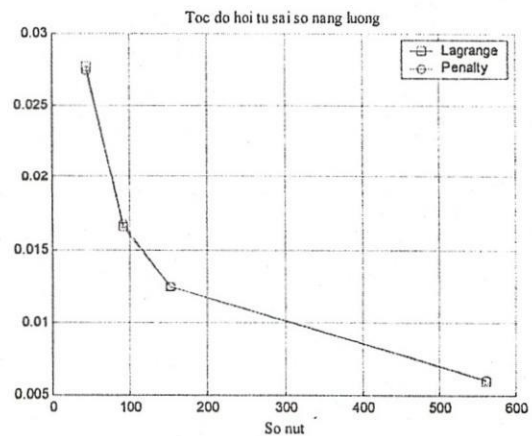
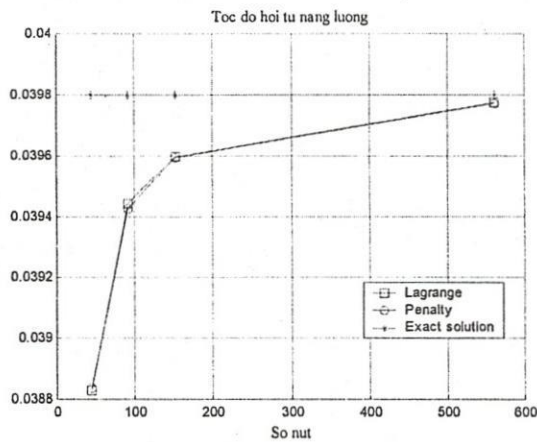
Hình 5: Rời rạc  $17 \times 9 = 153$  nút. Kết quả các thành phần ứng suất và chuyển vị

Tổng số nút	Phương pháp	Chuyển vị tại A	Năng lượng biến dạng	Sai số năng lượng
	Chính xác	-0.00312500000	0.03982451423	0
9x5 = 45	Lagrangian	-0.00306068104	0.03882940669	0.02771448390
9x5 = 45	Hàm phạt	-0.00309221998	0.03883387498	0.02745563851

Tổng số nút	Phương pháp	Chuyển vị tại A	Năng lượng biến dạng	Sai số năng lượng
	Chính xác	-0.00312500000	0.03982451423	0
13x7=91	Lagrangian	-0.00310256563	0.03943905641	0.01660145952
13x7=91	Hàm phạt	-0.00312195952	0.03942245483	0.01677664599

Tổng số nút	Phương pháp	Chuyển vị tại A	Năng lượng biến dạng	Sai số năng lượng
	Chính xác	-0.00312500000	0.03982451423	0
17x9=153	Lagrangian	-0.00311182493	0.03959605218	0.01250694688
17x9=153	Hàm phạt	-0.00313213720	0.03959098547	0.01250677370

Tổng số nút	Phương pháp	Chuyển vị tại A	Năng lượng biến dạng	Sai số năng lượng
	Chính xác	-0.00312500000	0.03982451423	0
33x17=561	Lagrangian	-0.00312200004	0.03977482761	0.00598870271
33x17=561	Hàm phạt	-0.00314229774	0.03976970274	0.00599050025



Hình 6: Hội tụ năng lượng biến dạng và sai số của năng lượng biến dạng

## 6. KẾT LUẬN

Kết quả số cho thấy việc áp dụng hai phương pháp nhân tử Lagrange và hàm phạt là tương đương với nhau. Tốc độ hội tụ của năng lượng biến dạng là rất tốt và sai số năng lượng biến dạng là không đáng kể giữa hai phương pháp. Bài báo cũng đã thể hiện tốt sự chính xác của phương pháp Meshless so với lời giải giải tích của dầm Timoshenko.

## APPLICATION OF THE MESHLESS METHOD FOR A PLANE STRESS PROBLEM

Bui Quoc Tinh, Ngo Thanh Phong

Department of Mathematics & Informatics, University of Natural Sciences – VNU-HCM

**ABSTRACT :** *In this paper, we are applied the Meshless method to solve the Timoshenko beam plane stress problem. Together we also applied different two methods of enforcement of essential boundary conditions. The first is the Lagrange multiplier method and the Penalty method is then. The shape function is constructed by the moving least squares approximation. Result obtained is good showed the convergence of the strain energy of two methods with respect to the analysis result of the Timoshenko beam. All the programs are wrote by the Matlab language.*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Belytschko T, Lu YY, Gu L. *Element-free Galerkin method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:229-256, 1994.
- [2]. Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. *Meshless methods: An overview and recent developments*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 139:3-47, 1996.
- [3]. Dowbol J, Belytschko T. *An Introduction to Programming the Meshless Element-free Galerkin method*. Computational Mechanics, July 3, 1998.
- [4]. Krongauz Y, Belytschko T. *Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995.
- [5]. Chung H.-J, Belytschko T. *An error estimate in the EFG method*. Computational Mechanics 21: 91-100, Springer-Verlag, 1998.
- [6]. Gavete L., Benito J.J, Falcon S. and Ruiz A. *Implementation of essential boundary conditions in a meshless method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering; 16:409-421, 2000.
- [7]. Liu G.R. *Meshfree Methods-Moving beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2003.
- [8]. Timoshenko S.P, Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York, McGraw Hill, 1970.