XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES TRONG MÔ HÌNH HỒI QUI PHI TUYẾN 2-CHIỀU

Ung Ngọc Quang

Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM

(Bài nhận ngày 03 tháng 8 năm 2005, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 02 tháng 12 năm 2005)

TÓM TẮT: Trong bài này, tác giả tìm xấp xỉ cho ước lượng Bayes của tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai trong mô hình hồi qui phi tuyến 2-chiều .

Từ khóa: Ước lượng Bayes, tham ẩn định vị, tham ẩn phương sai, mô hình phi tuyến 2 – chiều, hàm đa thức.

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tồn tại ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai đối với các lớp ước lượng bị chặn, ... và khả tích đã được khảo sát trong các bài báo[1] - [5].

Bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes cho các tham ẩn định vị, phương sai và hỗn hợp trong mô hình hồi qui phi tuyến 1-chiều đối với lớp ước lượng bị chặn đã được trình bày trong các bài báo [6] - [10].

Tiếp tục theo hướng trên bài này sẽ khảo sát xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị và tham ẩn phương sai đối với các ước lượng bị chặn trong mô hình hồi qui phi tuyến 2-chiều.

Trước hết ta khảo sát xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị.

2. XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CHO THAM ẨN ĐỊNH VỊ

Xét mô hình hồi qui phi tuyến 2-chiều có dạng : $X = \varphi(\theta) + \varepsilon$

Trong đó :

X : vectơ quan trắc ngẫu nhiên 2-chiều có trị trong không gian R^2

ε : vectơ sai ngẫu nhiên 2-chiều có trị trong không gian R^2

θ : tham ẩn định vị và $\theta \in \Theta$

Θ : tập hợp compắc trong không gian R^r

φ : hàm phi tuyến cho trước, $\varphi : \Theta \to R^2$

Ánh xạ Borel đo được $h : R^2 \to R^r$ gọi là ước lượng của tham ẩn định vị

Tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn của tham ẩn định vị θ tạo thành một không gian Banach và kí hiệu là $B(R^2;R^r)$.Tương tự như trong bài [2], phiếm hàm $\Psi : B\left(R^2;R^r\right) \to \overline{R}^+$ được xác định bởi hệ thức $\Psi(h) = \int\limits_{\Theta} \int\limits_{R^2} L\left(h(x),\theta\right) f_\theta(x)\mu(dx)\tau(d\theta)$

gọi là hàm mạo hiểm Bayes với phân phối xác suất tiên nghiệm τ trên không gian tham Θ. Nhắc lại rằng , $L\left(h(x),\theta\right)$ được gọi là hàm tổn thất , $f_\theta(x)$ gọi là hàm mật độ có điều kiện chính qui và μ là độ đo Lebesgue trên R^2 (xem [2])

Ước lượng $\hat{h} \in B\left(R^2;R^r\right)$ gọi là ước lượng Bayes của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ với phân phối tiên nghiệm τ nếu

$$\Psi\left(\hat{h}\right) = \inf_{h \in B\left(R^2;R^r\right)} \Psi(h)$$

Tương tự như trong bài [2] ta có định lí về sự tồn tại ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị

Định lí 1.1 : Cho K là tập các ước lượng của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ và thoả các điều kiện:

- $h(R^2) \subset \Theta, \forall h \in K$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists$ phân hoạch $\{E_i\}_{i=1}^r \subset R^2$ và các điểm $x_i \in E_i, i = \overline{1,r}$

sao cho :

$$\sup_{x \in E_i} \|h(x) - h(x_i)\| < \varepsilon$$

- Tồn tại $C > 0$ sao cho :

$$|L(y',\theta) - L(y'',\theta)| \le C\|y' - y''\|_{R^r}, \forall y', y'' \in R^r, \forall \theta \in \Theta$$

Khi ấy K là tập compăc tương đối trong $B(R^2, R^r)$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes .

Tiếp theo , để xét bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị, ta đưa thêm một số giả thiết và kí hiệu. Giảsử tập trị của véctơ quan trắc ngẫu nhiên 2-chiều X là tập compắc $I \subset R^2$. Không gian tất cả các hàm bị chặn , xác định trên I , có trị trong R^r, ký hiệu là B(I). Không gian các hàm liên tục , xác định trên I , có trị trong R^r, kí hiệu là C(I). Hiển nhiên B(I) , C(I) là các không gian Banach và $C(I) \subset B(I)$.

Định lí 1.2 : Giả sử tập K các ước lượng của tham ẩn định vị $\theta \in \Theta$ thoả các điều kiện của định lí 1.1 . Giả sử hàm $f_\theta(x)$ bị chặn đều . Khi ấy có thể xây dựng được một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes .

Chứng minh : Trước hết, theo định lí 1.1, tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$.

Theo giả thuyết $\exists C' : |f_\theta(x)| \le C', \forall x \in I, \forall \theta \in \Theta$

Tiếp theo lấy ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$. Khi ấy $\exists C'' > 0$ sao cho :

$$\|\hat{h}(x)\|_{R^r} = \sum_{j=1}^r |\hat{h}_j(x)| \le C'', \hat{h}(x) = (\hat{h}_1(x)\hat{h}_2(x), ..., \hat{h}_n(x))$$

Trong đó các hàm $\hat{h}_j, j = \overline{1,r}$ là đo được bị chặn , xác định trên I , có trị trong R .

Theo định lí Lusin , với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại các hàm $g_j, j = \overline{1,r}$ liên tục , xác định trên I sao cho :

$$\mu\{x \in I : \hat{h}_j(x) \ne g_j(x)\} < \frac{\varepsilon}{4.r.C.C'.C''}$$

với μ là độ đo Lebesgue trên R^2

Đặt $g = (g_1, g_2, ..., g_r)$. Ta thấy $\hat{h}(x) \ne g(x)$ khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một j sao cho : $h_j(x) \ne g_j(x)$

Hơn nữa $\|g(x)\|_{R^r} \le C''$

Vậy nên , nếu đặt

$$A = \{\hat{h}(x) \ne g(x)\}, A_j = \{\hat{h}_j(x) \ne g_j(x)\}, j = \overline{1,r}$$

ta sẽ có: $A = \bigcup_{j=1}^r A_j$

Suy ra : $\mu(A) \le \sum_{j=1}^r \mu(A_j) < \frac{\varepsilon}{4.C.C'.C''}$

Với A như trên , theo định nghĩa của hàm mạo hiểm Bayes , ta có :

$$\left|\Psi\left(\hat{h}\right)-\Psi\left(g\right)\right| \leq \iint_{\Theta I}\left|L\left(h\left(x\right),\theta\right)-L\left(g\left(x\right),\theta\right)\right| f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right)$$

$$\leq \iint_{\Theta A} C\left\|\hat{h}\left(x\right)-g\left(x\right)\right\| f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right)+\int_{\Theta}\int_{I-A} C\left\|\hat{h}\left(x\right)-g\left(x\right)\right\| f_{\sigma}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right)$$

$$= \iint_{\Theta A} C\left\|\hat{h}\left(x\right)-g\left(x\right)\right\| f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mặt khác với $\varepsilon > 0$ và với các hàm liên tục $g_j, j=\overline{1,r}$ như trên , theo định lí xấp xỉ Weierstrass cho hàm nhiều biến , sẽ tồn tại các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\left(x_1,x_2\right)$ sao cho

$$\left\|g_j - P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\right\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{2.r.C}, \forall j=\overline{1,r}$$

Trong đó các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}$ có bậc $n_1+n_2=\left(n_1+n_2\right)\left(\hat{h},\varepsilon\right)$

và có hệ số : $\hat{a}^j=\left(\hat{a}^j_{ks}\right)\in M\left(\left(n_1+1\right)\left(n_2+1\right)\right)$,

với $M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)$ là không gian các ma trận cấp $\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)$ và $k=\overline{0,n_1}; s=\overline{0,n_2}$.

Ký hiệu họ đa thức $\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}^1}, P_{n_1+n_2,\hat{a}^2},\ldots,P_{n_1+n_2,\hat{a}^r}\right)=P_{n_1+n_2,\hat{a}}$,

ta thấy : $\left\|g\left(x\right)-P_{n_1+n_2,\hat{a}}\left(x\right)\right\|_{R^r}=\sum_{j=1}^{r}\left|g_j\left(x\right)-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\left(x\right)\right|$

Do đó : $$\left|\Psi\left(g\right)-\Psi\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}}\right)\right| \leq \iint_{\Theta I} C\left\|g\left(x\right)-P_{n_1+n_2,\hat{a}}\left(x\right)\right\|_{R^r} f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\iint_{\Theta I} C\left|g_j\left(x\right)-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\left(x\right)\right| f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r}\iint_{\Theta I} C\left\|g_j-P_{n_1+n_2,\hat{a}^j}\right\|_{C(I)} f_{\theta}\left(x\right)\mu\left(dx\right)\tau\left(d\theta\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra : $\left|\Psi\left(\hat{h}\right)-\Psi\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ và định lý 2.1 chứng minh xong.

Tiếp theo ta đưa ra một thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ $P_{n_1+n_2,a}$.

Trước hết , theo cách xây dựng trên , với bất kỳ $h\in\bar{K}$, ta được họ đa thức hai biến $P_{n_1+n_2,a}=(P_{n_1+n_2,a^1}, P_{n_1+n_2,a^2},\ldots,P_{n_1+n_2,a^r})$

có bậc $n_1+n_2=\left(n_1+n_2\right)\left(h,\varepsilon\right)$ và có hệ số $a=\left(a^1,a^2,\ldots,a^r\right)$,trong đó $a^j=(a^j_{ks})\in M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right), \forall j=\overline{1,r}$.

Vì $\bar{K}$ là tập compact nên ta có thể tìm được số n_1+n_2 chung cho tất cả các $h\in\bar{K}$ .Như vậy bậc (n_1+n_2) chỉ còn phụ thuộc ε , nên ta lấy ký hiệu:

$$n_1+n\ =\left(n_1+n_2\right)\left(\varepsilon\right)$$

Bước tiếp theo , ta sẽ cố định số nguyên : $n_1+n_2=\left(n_1+n_2\right)\left(\varepsilon\right)$.

Từ đây, do định nghĩa của phiếm hàm Ψ , ta thấy $\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$ chỉ phụ thuộc vào hệ số : $a=\left(a^1,a^2,\ldots,a^r\right)\in M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\times M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\times\ldots\times M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)$ $=\left[M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\right]^r$

Tức là với mỗi $a \in \left[M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\right]^r$, tồn tại duy nhất một giá trị $\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right) \in \overline{R}^{+}$.

Điều này có nghĩa tồn tại một hàm số $F:\left[M((n_1+1)\times(n_2+1))\right]^r \to \overline{R^+}$, sao cho $F(a)=\Psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$

Tiếp theo, đặt:

$$A_{\varepsilon,h}=\left\{a\in\left[M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\right]^r : \left|\Psi(h)-F(a)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$A_\varepsilon=\bigcup_{h\in\overline{K}} A_{\varepsilon,h}$$

Giả sử hàm F thoả các điều kiện đạt cực tiểu trên A_ε. Khi đó tồn tại $a^* \in A_\varepsilon$ sao cho:

$$F\left(a^*\right)=\inf_{a\in A_\varepsilon} F(a)$$

Gọi $\hat{h}$ là ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là $\Psi\left(\hat{h}\right)=\inf\Psi(h),\ h\in\overline{K}$

Với ước lượng $\hat{h}$ này, theo cách xây dựng trên sẽ tồn tại họ đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}}$ có hệ số $\hat{a}\in\left[M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\right]^r$, sao cho

$$\left|F(\hat{a})-\Psi\left(\hat{h}\right)\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

Vì vậy, theo định nghĩa của A_ε, ta có $\hat{a}\in A_\varepsilon$.

Suy ra $$F\left(a^*\right)-F(\hat{a})<\varepsilon \qquad (2)$$

Mặt khác, ta có đồng thời:

$$F(\hat{a})-\Psi\left(\hat{h}\right)<\varepsilon$$

$$\Psi\left(\hat{h}\right)-\Psi\left(h^*\right)<\varepsilon$$

$$\Psi\left(h^*\right)-F\left(a^*\right)<\varepsilon$$

Vậy nên: $$F\left(a^*\right)-F(\hat{a})>-3\varepsilon \qquad (3)$$

Từ (2), (3), ta được:

$$\left|F\left(a^*\right)-F(\hat{a})\right|<3\varepsilon \qquad (4)$$

Kết hợp (1) và (4), ta có:

$$\left|\Psi\left(\hat{h}\right)-F\left(a^*\right)\right|<4\varepsilon.$$

Từ các hệ số $a^*=\left(a^1,a^2,\ldots,a^r\right)\in\left[M\left(\left(n_1+1\right)\times\left(n_2+1\right)\right)\right]^r$, ta sẽ xây dựng được đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,a^*}$.

Với đa thức này, theo định nghĩa của hàm F, ta có: $\Psi\left(P_{n_1+n_2,a^*}\right)=F\left(a^*\right)$.

Điều này có nghĩa, ta xây dựng được một đa thức $P_{n_1+n_2,a^*}:\left|\Psi\left(\hat{h}\right)-\Psi\left(P_{n_1+n_2,a^*}\right)\right|<4\varepsilon$

Như vậy ta có thể lấy đa thức cực tiểu $P_{n_1+n_2,a^*}$ để xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$ và thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes cho tham ẩn định vị giải quyết xong.

3. XẤP XỈ ƯỚC LƯỢNG BAYES CỦA THAM ẨN PHƯƠNG SAI

Định nghĩa 2.1 : Xét mô hình hồi qui phi tuyến: $X = \varphi(\theta) + \varepsilon$. Ta gọi ma trận hiệp phương sai $\text{cov}(X, X) = \text{cov}(\varepsilon, \varepsilon)$ là tham ẩn phương sai của mô hình nói trên và kí hiệu :

$$\text{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = \sigma^2$$

Như biết trong bài $[3]$, $\sigma^2 \in M^{\geq}(2\times 2) \subset M(2\times 2)$, trong đó $M(2\times 2)$ là không gian các ma trận cấp 2 và $M^{\geq}(2\times 2)$ là không gian các ma trận xác định không âm cấp 2. Kí hiệu $\mathcal{B}(2\times 2)$ và $\mathcal{B}^{\geq}(2\times 2)$ là các σ - đại số Borel trên $M(2\times 2)$ và $M^{\geq}(2\times 2)$.

Định nghĩa 2.2 : Ánh xạ Borel đo được $h : (R^2, B^2) \to (M(2\times 2), B(2\times 2))$ gọi là ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^{+}(2\times 2)$ (xem [3])

Kí hiệu $B(R^2, M(2\times 2))$ là tập hợp tất cả các ước lượng bị chặn xác định trên R^2 và có trị trong M (2×2) . Ta gọi độ đo xác suất υ là phân phối xác suất tiên nghiệm của tham ẩn σ^2 trên không gian tham $(M^{\geq}(2\times 2)\ , B^{\geq}(2\times 2))$. Tương tự như trong bài [3] , ta có thể định nghĩa hàm mạo hiểm Bayes và ước lượng Bayes cho tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^{\geq}(s\times s)$ với phân phối xác suất tiên nghiệm ν .

Định lí 2.1 : Cho $K \subset B(R^2, M(2\times 2))$ là 1 lớp các ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^{\geq}(2\times 2)$ thoả các điều kiện :

(i) $h(R^2) \subset M^{\geq}(2\times 2), \forall h \in K$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ phân hoạch $\{E_i\}_{i=1}^{r} \subset R^2$ và các điểm $x_i \in E_i, i = \overline{1,r}$ sao cho:

$$\sup_{x \in E_i} \left\| h(x) - h(x_i) \right\|_{M(2\times 2)} < \varepsilon, \forall h \in K, \forall i = \overline{1,r}$$

(iii) Tồn tại $C > 0$ sao cho:

$$\left| L(y', \sigma^2) - L(y'', \sigma^2) \right| \leq C \left\| y' - y'' \right\|_{M(2\times 2)}, \forall \sigma^2 \in M^{\geq}(2\times 2), \forall y', y'' \in M(2\times 2).$$

Khi ấy K là tập compắc tương đối trong $B(R^2, M(2\times 2))$ và trong lớp ước lượng $\overline{K}$ tồn tại ước lượng Bayes .

Chứng minh định lí này tương tự như chứng minh định lí 3.1 trong bài [3] .

Để xét bài toán xấp xỉ ước lượng Bayes , ta kí hiệu I là tập compact thuộc

R^2, $B(I) := B(I, M(2\times 2)), C(I) := C(I, M(2\times 2))$

Định lí 2.2 : Giả sử K là lớp các ước lượng của tham ẩn phương sai $\sigma^2 \in M^{\geq}(2\times 2)$ thoả các điều kiện như trong định lí 2.1 . Giả sử hàm mật độ có điều kiện chính qui $f_{\sigma^2}(x)$ bị chặn đều . Khi ấy có thể xây dựng được một đa thức 2 biến xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn phương sai .

Chứng minh : Trước hết , theo định lí 2.1 , tồn tại ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K} \subset B(I)$

Theo giả thiết , $\exists C' : \left| f_{\sigma^2}(x) \right| \leq C', \forall x \in I, \forall \sigma^2 \in M^{\geq}(2\times 2)$

Tiếp theo lấy ước lượng Bayes $\hat{h} \in \overline{K}$. Khi ấy tồn tại $C'' > 0$ sao cho :

$$\left\| \hat{h}(x) \right\|_{M(2\times 2)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left| \hat{h}_{ij}(x) \right| \leq C'', \hat{h}(x) = \left(\hat{h}_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^{2}$$

Trong đó các hàm $\hat{h}_{ij}, i, j = \overline{1,2}$ là đo được, bị chặn , xác định trên I và có trị trong R.

Theo định lí Lusin', với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại các hàm $g_{ij}, i, j = \overline{1,2}$ liên tục xác định trên I sao cho : $\mu\left\{x \in I : \hat{h}_{ij}(x) \neq g_{ij}(x)\right\} < \dfrac{\varepsilon}{16.C.C'.C''}$,

với μ là độ đo Lebesgue trên R^2.

Đặt : $g(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) g_{12}(x) \\ g_{21}(x) g_{22}(x) \end{pmatrix}$

Ta thấy $\hat{h}(x) \neq g(x)$ khi và chỉ khi tồn tại ít nhất 1 cặp (i , j) sao cho $\hat{h}_{ij}(x) \neq g_{ij}(x)$. Hơn nữa, $\|g(x)\|_{M(2\times 2)} \leq C'', \forall x \in I$

Vậy nên , nếu đặt :

$$A = \left\{\hat{h}(x) \neq g(x)\right\}, A_{ij} = \left\{\hat{h}_{ij}(x) \neq g_{ij}(x)\right\}, i, j = \overline{1,2}$$

ta sẽ có : $A = \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} A_{ij}$

Suy ra : $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \mu(A_{ij}) < \dfrac{\varepsilon}{4.C.C'.C''}$.

Với A như trên , theo định nghĩa của hàm mạo hiểm Bayes , ta có :

$$\left|\psi(\hat{h}) - \psi(g)\right| \leq \int\limits_{M^2(2\times 2)} \int\limits_{I} \left|L(\hat{h}(x), \sigma^2) - L(g(x), \sigma^2)\right| f_{\sigma^2}(x) \mu(dx) \upsilon(d\sigma^2)$$

$$\leq \iint\limits_{M^2(2\times 2) A} \left|L(\hat{h}(x), \sigma^2) - L(g(x), \sigma^2)\right| f_{\sigma^2}(x) \mu(dx) \upsilon(d\sigma^2)$$

$$+ \int\limits_{M^2(2\times 2)} \int\limits_{I-A} \left|L(\hat{h}(x), \sigma^2) - L(g(x), \sigma^2)\right| f_{\sigma^2}(x) \mu(dx) \upsilon(d\sigma^2)$$

$$\leq \int\limits_{M^2(2\times 2)} \int\limits_{A} C\left\|\hat{h}(x) - g(x)\right\| f_{\sigma^2}(x) \mu(dx) \upsilon(d\sigma^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mặt khác với $\varepsilon > 0$ và với các hàm liên tục $g_{ij}, i, j = \overline{1,2}$ như trên , theo định lí xấp xỉ Weierstrass cho hàm nhiều biến , sẽ tồn tại các đa thức 2 biến : $P_{n_1+n_2, \hat{a}^{ij}} = P_{n_1+n_2, \hat{a}^{ij}}(x_1, x_2)$

sao cho : $\left\|g_{ij} - P_{n_1+n_2, \hat{a}^{ij}}\right\|_{C(I)} < \dfrac{\varepsilon}{8C}, \forall i, j = \overline{1,2}$

Trong đó các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2, \hat{a}^{ij}}$ có bậc $n_1 + n_2 = (n_1 + n_2)(\hat{h}, \varepsilon)$ và có các hệ số là các ma trận : $\hat{a}^{ij} = (\hat{a}^{ij}_{ks}) \in M((n_1+1)\times(n_2+1))$ với $M((n_1+1)\times(n_2+1))$ là không gian các ma trận cấp $(n_1+1)\times(n_2+1)$ và $k = \overline{0, n_1}; s = \overline{0, n_2}$.

Kí hiệu ma trận các đa thức :

$$P_{n_1+n_2, \hat{a}} = \begin{pmatrix} P_{n_1+n_2, \hat{a}^{11}} P_{n_1+n_2, \hat{a}^{12}} \\ P_{n_1+n_2, \hat{a}^{21}} P_{n_1+n_2, \hat{a}^{22}} \end{pmatrix}$$

ta thấy : $\left\|g(x) - P_{n_1+n_2, \hat{a}}(x)\right\|_{M(2\times 2)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left|g_{ij}(x) - P_{n_1+n_2, \hat{a}^{ij}}(x)\right|$

Do đó :

$$\left|\psi(g) - \psi(P_{n_1+n_2, \hat{a}})\right| \leq \int\limits_{M^2(2\times 2)} \int\limits_{I} C\left\|g(x) - P_{n_1+n_2, \hat{a}}(x)\right\|_{M(2\times 2)} f_{\sigma^2}(x) \mu(dx) \upsilon(d\sigma^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{M^2(2\times 2)}\int_{I} C\left|g_{ij}(x)-P_{n_1+n_2,\hat{a}^{ij}}(x)\right| f_{\sigma^2}\mu(dx)\upsilon(d\sigma^2)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{M^2(2\times 2)}\int_{I} C\left\|g_{ij}-P_{n_1+n_2,\hat{a}^{ij}}\right\|_{C(I)} f_{\sigma^2}\mu(dx)\upsilon(d\sigma^2)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Suy ra : $\left|\psi(h)-\psi\left(P_{n_1+n_2,\hat{a}}\right)\right|<\varepsilon$ và định lý 2.2 được chứng minh xong .

Tiếp theo , ta sẽ đưa ra một thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn phương sai .

Trước hết , theo cách xây dựng trên với bất kỳ $h\in\overline{K}$ ta được ma trận các đa thức 2 biến :

$$P_{n_1+n_2,a}=\begin{pmatrix} P_{n_1+n_2,a^{11}} P_{n_1+n_2,a^{12}} \\ P_{n_1+n_2,a^{21}} P_{n_1+n_2,a^{22}} \end{pmatrix}$$

có bậc $n_1+n_2=(n_1+n_2)(h,\varepsilon)$ và có hệ số $a=\begin{pmatrix} a^{11}a^{12} \\ a^{21}a^{22}\end{pmatrix}$, trong đó mỗi thành phần a^{ij} là một ma trận : $a^{ij}=\left(a^{ij}_{ks}\right), k=\overline{0,n_1}; s=\overline{0,n_2}$.

Chú ý rằng , bậc $n_1+n_2=(n_1+n_2)(h,\varepsilon)$ phụ thuộc vào $h\in\overline{K}$. Nhưng vì $\overline{K}$ là tập compact , nên ta có thể tìm được một bậc *(m + n)* chung cho tất cả mọi $h\in\overline{K}$. Như vậy bậc (n_1+n_2) chỉ còn phụ thuộc vào ε và ta sẽ ký hiệu $(n_1+n_2)=(n_1+n_2)(\varepsilon)$.

Bước tiếp theo , ta sẽ cố định số nguyên $(n_1+n_2)=(n_1+n_2)(\varepsilon)$.

Từ đó , do định nghĩa của phiếm hàm ψ , ta thấy $\psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$ chỉ phụ thuộc vào hệ số $a=\begin{pmatrix} a^{11}a^{12} \\ a^{21}a^{22}\end{pmatrix}$, với $a^{ij}\in M\left((n_1+1)\times(n_2+1)\right), \forall i,j=\overline{1,2}$, tức là với mỗi $a\in\tilde{M}=\begin{pmatrix} M((n_1+1)\times(n_2+1)) & M((n_1+1)\times(n_2+1)) \\ M((n_1+1)\times(n_2+1)) & M((n_1+1)\times(n_2+1))\end{pmatrix}$ tồn tại duy nhất 1 giá trị $\psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)\in\overline{R^+}$

Điều này có nghĩa, tồn tại 1 hàm số $F:\tilde{M}\to\overline{R^+}$ sao cho : $F(a)=\psi\left(P_{n_1+n_2,a}\right)$

Tiếp theo , đặt :

$$A_{\varepsilon,h}=\left\{a\in\tilde{M}:\left|\psi(h)-F(a)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$A_\varepsilon=\bigcup_{h\in\overline{K}}A_{\varepsilon,h}$$

Giả sử hàm F thoả các diều kiện đạt cực trị trên A_ε. Khi ấy tồn tại $a^*\in A_\varepsilon$ sao cho :

$$F\left(a^*\right)=\inf_{a\in A_\varepsilon}F(a)$$

Lấy $\hat{h}$ là ước lượng Bayes thuộc $\overline{K}$, tức là : $\psi\left(\hat{h}\right)=\inf_{h\in\overline{K}}\psi(h)$

Với ước lượng $\hat{h}$ này, theo cách xây dựng trên , sẽ tồn tại ma trận cấp 2 của các đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,\hat{a}}$, với hệ số $\hat{a}=\begin{pmatrix}\hat{a}^{11}\hat{a}^{12} \\ \hat{a}^{21}\hat{a}^{22}\end{pmatrix}\in\tilde{M}$

sao cho : $\left|F(\hat{a})-\psi(\hat{h})\right|<\varepsilon$ (1')

Từ đây theo định nghĩa của A_ε, ta có $\hat{a}\in A_\varepsilon$.

Suy ra $F(a^*)-F(\hat{a})<\varepsilon$ (2')

Mặt khác ta có : $F(a^*)-F(\hat{a})>-3\varepsilon$ (3')

Từ (2') và (3') , ta có : $\left|F(a^*)-F(\hat{a})\right|<3\varepsilon$ (4')

Kết hợp (1') và (4') ta được : $\left|\psi(\hat{h})-F(a^*)\right|<4\varepsilon$

Từ ma trận các hệ số $a^*=\begin{pmatrix} a^{*11}a^{*12} \\ a^{*21}a^{*22}\end{pmatrix}\in\tilde{M}$ ta sẽ xây dựng được đa thức 2 biến $P_{n_1+n_2,a^*}$ sao cho : $\left|\psi(\hat{h})-\psi\left(P_{n_1+n_2,a^*}\right)\right|<4\varepsilon$.

Như vậy đa thức $P_{n_1+n_2,a^*}$ là xấp xỉ ước lượng Bayes $\hat{h}\in\overline{K}$ của tham số phương sai σ^2 và thuật toán xây dựng đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn phương sai giải quyết xong .

4. NHẬN XÉT

Ta có thể xây dựng được các đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn định vị θ trong lớp các ước lượng bị chặn cốt yếu $L^\infty\left(\mu;R^2;R^r\right)$ và lớp các ước lượng khả tích $L^1\left(\mu;R^2;R^r\right)$ với μ là độ đo Lebesgue trên R^2.

Tương tự ta cũng có thể xây dựng các đa thức xấp xỉ ước lượng Bayes của tham ẩn phương sai σ^2 trong các lớp ước lượng $L^\infty\left(\mu;R^2;M(2\times 2)\right)$ và $L^1\left(\mu;R^2;M(2\times 2)\right)$

Hơn nữa ta có thể xây dựng các lớp ước lượng bị chặn , bị chặn cốt yếu và khả tích cho tham ẩn hỗn hợp $\lambda=\left(\theta,\sigma^2\right)$.

Lời cảm ơn: *Tác giả cảm ơn Giáo sư Nguyễn Bác Văn về những ý kiến định hướng bổ ích cho bài báo này.*

THE APPROXIMATION FOR THE BAYESIAN ESTIMATORS IN THE 2 - DIMENSIONAL NONLINEAR REGRESSION MODELS

Ung Ngoc Quang
Faculty of Mathematics - Informatics, University of Natural Sciences
Viet Nam National University – Ho Chi Minh city

ABSTRACT: In this paper, the approximation for the Bayesian estimators of location parameter and variance parameter in the 2 - dimensional nonlinear regression models is investigated.

Keywords: Bayesian estimators, location parameter, variance parameter, two - dimensional nonlinear models, polynomial functions.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Ung Ngọc Quang, Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê với không gian tham compắc, *Tạp chí Toán học*, Tập 18 , Số 1, 1-8, 1990.

[2]. Ung Ngọc Quang, On the existence of Bayesian estimates in nonlinear statistical models with compact parameter space, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol 19.No.2, 149 – 160, 1994.

[3]. Ung Ngọc Quang, On the existence of Bayesian estimators in multidimensional nonlinear statistical models with compact parameter space, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol.23 , No .2 , 229-240, 1995.

[4]. Ung Ngọc Quang, On the Bayesian estimators in multidimensinal nonlinear regression models, *Journal Science and Technology development*, Vol .4 , No.7, 23-29, 2001.

[5]. Ung Ngọc Quang, Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê vô hạn chiều với không gian tham compắc, *Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ*, Tập 5, Số 11 , 5-11, 2002.

[6]. Ung Ngọc Quang, Về một xấp xỉ ước lượng Bayes trong mô hình thống kê phi tuyến, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học*, Tập 10 , số 4 , 35-40 , 1994.

[7]. Ung Ngọc Quang, Về ước lượng Bayes của phương sai trong mô hình thống kê phi tuyến 1-chiều, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học*, Tập 11, Số 4, 53-63, 1995.

[8]. Ung Ngọc Quang, Về ước lượng Bayes của tham ẩn hỗn hợp trong mô hình hồi qui phi tuyến, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học*, Tập 14 , Số 2 , 19-29, 1998.

[9]. Ung Ngọc Quang, Phương pháp ước lượng Bayes trong mô hình hồi qui phi tuyến nhiều chiều với không gian tham compắc, *Tạp chí Khoa học.* Đại học Sư Phạm TP. HCM, Tập 32, Số 1, 76 – 79, 2003.

[10]. Ung Ngọc Quang, On the approximation of Bayesian estimators in functional space, *Jounal Science and Techology development*, Vol.8 , No.1 , 5-13, 2005.