VỀ SỰ TỒN TẠI CỦA ĐỘ ĐO XÁC SUẤT TOÁN TỬ

Ung Ngọc Quang
Khoa Toán – Tin học, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên – ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 23 tháng 9 năm 2003)

TÓM TẮT: *Bài báo đề xuất định nghĩa độ đo xác suất có giá trị thuộc một lớp toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert. Trong bài đưa ra một chứng minh sự tồn tại của độ đo này trong một không gian cụ thể.*

1. Mở đầu:

Như đã biết, những bài toán xác suất đầu tiên xuất hiện vào năm 1654 tại Pháp.

Nhưng phải đến năm 1933, tức là gần 300 năm sau, nhà toán học Liên Xô là A.N.Kolomogorov mới kết tập được tất cả các thành quả trước đó và đưa ra một hệ tiên đề cho lý thuyết xác suất (xem [1],[2]).

Lý thuyết xác suất Kolmogorov đã tác động lớn tới nhiều ngành Khoa học thực nghiệm khác nhau, đồng thời đã hình thành một số ngành toán học mới, như Thống kê Bayes chẳng hạn. (xem [3],[4])

Mặt khác, trong nửa cuối thế kỷ 20 nhiều nhà toán học trên thế giới đã xây dựng được một số lý thuyết xác suất , khác với lý thuyết xác suất của Kolomogorov.

Một trong những lý thuyết đó là Lý thuyết xác suất trong nửa trường tôpô, được các nhà toán học Taskent thuộc Liên Xô tìm ra trong những năm 60 – 70 của thế kỷ XX.([5],[6])

Một lý thuyết khác là lý thuyết xác suất không giao hoán được tìm ra bởi nhiều nhà toán học trên thế giới, trong đó có các nhà toán học Liên Xô vào những năm 70 của thế kỷ XX. Lý thuyết xác suất này được nảy sinh từ Vật lý lượng tử và đã có tác động trở lại đối với Vật lý lượng tử, nên được gọi là Lý thuyết xác suất lượng tử. ([7])

Trong bài báo này tác giả thử đề xuất một lý thuyết xác suất, mà tác giả tạm gọi là Lý thuyết xác suất toán tử. Ý tưởng này dựa trên lý thuyết xác suất Kolmogorov. Kỹ thuật được dùng là lý thuyết toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert, đã được trình bày trong nhiều tài liệu, chẳng hạn [8]-[16]

Trước hết ta đưa ra một số ký hiệu có liên quan tới toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert

R, C: tập hợp các số thực và phức $\left(R^+ = [0,+\infty)\right)$

B(R), B(C): các σ-đại số Borel trên các không gian R, C

H: Không gian Hilbert (thực hoặc phức)

$\mathcal{L}$ (H): Tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính bị chặn trên H

2. Sự tồn tại của độ đo xác suất toán tử:

Trong mục này ta đưa ra các định nghĩa có liên quan tới các toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert. Sau đó ta phát biểu định lý về sự tồn tại của độ đo xác suất toán tử

Định nghĩa 2.1: Cho không gian Hilbert H và tập hợp $\mathcal{L}$(H).

.Toán tử T∈ $\mathcal{L}$(H) được gọi là chuẩn tắc nếu T*.T = T.T*, trong đó T* là toán tử liên hiệp của T

Tập hợp tất cả các toán tử chuẩn tắc trên H được ký hiệu $\mathcal{L}^{c.t}$(H)

. Toán tử $T \in \mathcal{L}(H)$ được gọi làtự liên hiệp nếu $T = T^*$

Tập hợp tất cả các toán tử tự liên hiệp trên H được ký hiệu $\mathcal{L}^{t.l}(H)$

. Toán tử $T \in \mathcal{L}(H)$ được gọi là dương nếu $T \geq 0$

Tập hợp tất cả các toán tử dương trên H được ký hiệu $\mathcal{L}^{d}(H)$

. Toán tử $T \in \mathcal{L}(H)$ được gọi là chiếu trực giao nếu $T = T^*$ và $T^2 = T$

Tập hợp tất cả các toán tử chiếu trực giao được ký hiệu $\mathcal{L}^{tg}(H)$

Dễ thấy: $\mathcal{L}^{tg}(H) \subset \mathcal{L}^{d}(H) \subset \mathcal{L}^{t.l}(H) \subset \mathcal{L}^{c.t}(H) \subset \mathcal{L}(H)$

Định nghĩa 2.2: Cho tập hợp Ω và σ-đại số $\mathcal{A}$ các tập con của Ω. Hàm tập P xác định trên $\mathcal{A}$, nhận giá trị trong R^+, được gọi là độ đo xác suất Kolmogorov nếu:

i. $P(\Omega) = 1$

ii. $0 \leq P(A) \leq 1, \ \forall A \in \mathcal{A}$

iii. Cho dãy $\{A_n\}_{n\in N} \in \mathcal{A}$ rời nhau từng đôi một.

Lúc đó $$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n)$$

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gọi là không gian xác suất Kolmôgorov và lý thuyết xác suất xây dựng trên không gian này gọi là Lý thuyết xác suất Kolmogorov (xem [1])

Định nghĩa 2.3: Cho tập hợp Ω và σ-đại số $\mathcal{A}$ của Ω. Cho không gian Hilbert H và tập $\mathcal{L}(H)$. Hàm tập Q, xác định trên $\mathcal{A}$, nhận giá trị trong $\mathcal{L}(H)$ gọi là độ đo xác suất toán tử, nếu:

i. $Q(\Omega) = I$, với I là toán tử đơn vị.

ii. $Q(A) \in \mathcal{L}^{tg}(H), \ \forall A \in \mathcal{A}$. Từ đây suy ra $0 \leq Q(A) \leq I, \ \forall A \in \mathcal{A}$

iii. Cho dãy $\{An\}n \in N \subset \mathcal{A}$ rời nhau từng đôi. Lúc đó:

$Q\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} Q(A_n)$ Trong đó chuỗi $\sum_{n\in N} Q(A_n)$ hội tụ trong s_tôpô (còn gọi là tôpô mạnh) của không gian Banach $\mathcal{L}(H)$

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ gọi là không gian xác suất toán tử và lý thuyết dựa trên sự khảo sát không gian này được gọi là lý thuyết xác suất toán tử.

Xuất hiện câu hỏi: Có hay không một độ đo xác suất toán tử và không gian xác suất toán tử tương ứng?

Như vậy, bài toán đặt ra là hãy khảo sát sự tồn tại của độ đo xác suất toán tử và không gian xác suất toán tử tương ứng với nó. Bài toán này sẽ được giải quyết bởi định lý 2.1 dưới đây. Kỹ thuật để giải bài toán là một nhánh của Giải tích hàm, được gọi là Lý thuyết các toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert ([8] _ [16])

Định lý 2.1: Cho không gian Hilbert H và tập hợp $\mathcal{L}(H)$. Cho toán tử chuẩn tắc $T \in \mathcal{L}^{c.t}(H)$. Khi ấy tồn tại một độ đo xác suất toán tử Q trên σ_đại số Borel B (C), được xác định bởi toán tử chuẩn tắc T

Do đó tồn tại không gian xác suất toán tử (C, B (C),Q) được xác định bởi toán tử chuẩn tắc T.

3. Chứng minh định lý tồn tại:

Để chứng minh định lý này, ta sẽ sử dụng một số bổ đề Giải tích hàm. Cách chứng minh các bổ đề ấy dựa trên một số tài liệu, chẳng hạn như [9] – [12].

Bổ đề 3.1: Cho H là không gian Hilbert bất kỳ. Với mọi $T \in \mathcal{L}(H)$, ta có

$H=\sum_{i \in I} H_i$, $T=\sum_{i \in I} T_i$ .Trong đó H_i là không gian Hilbert khả ly, $T_i \in \mathcal{L}(H_i), \forall i \in I$

và mỗiT_i

có một vectơ tuần hoàn. Ở đây $\sum_{i \in I}$ là ký hiệu tổng trực giao của các không gian Hilbert.

Do bổ đề 3.1, ta chỉ cần xét các không gian Hilbert khả ly.

Bổ đề 3.2: Cho H là không gian Hilbert bất kỳ và cho toán tử chuẩn tắc bất kỳ $T \in \mathcal{L}^{c.t}(H)$. Khi ấy tồn tại một không gian đo lường $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ và hàm $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m)$ sao cho toán tử chuẩn tắc T và toán tử nhân M_φ trong không gian $L^2(\Omega, \mathcal{A}, m)$ được xác định bởi đẳng thức:

$M_\varphi(a) = \varphi.a, \forall a \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, m)$ thì tương đương với nhau

Đặc biệt nếu H là không gian Hilbert khả ly thì m là độ đo hữu hạn.

Do các bổ đề 3.1 và 3.2, ta chỉ cần xét các không gian đo lường $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ với m là độ đo hữu hạn và suy ra được bổ đề sau:

Bổ đề 3.3: Cho $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ là không gian đo lường với m là độ đo hữu hạn và M_φ là toán tử nhân được xác định như trong bổ đề 3.2

Khi ấy hệ thức $\Psi(\varphi) = M_\varphi$ sẽ xác định một phép đẳng cự, đẳng cấu liên hiệp từ đại số Banach $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m)$ lên đại số Banach $ML^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m) = \{ M_\varphi : \varphi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m) \}$. Trong đó đại số Banach ML^∞là đại số Banach con, giao hoán, cực đại của đại số Banach $\mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{A}, m))$.

Từ bổ đề 3.3 ta suy ra bổ đề sau.

Bổ đề 3.4: Cho $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ là không gian đo lường với m là độ đo hữu hạn vàM_φ là toán tử nhân được xác định như trong bổ đề 3.3.

Khi ấy với mọi $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m)$, ta có:

$$\sigma(M_\varphi) = \sigma(\varphi) = \Re(\varphi)$$

Trong đó $\sigma(M_\varphi)$: phổ của toán tử nhân M_φ trong đại số Banach $\mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{A}, m))$

$\sigma(M_\varphi)$: phổ của phần tử φ trong đại số Banach $\mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{A}, m))$

$\Re(\varphi) = \{\lambda \in C : m(\{x \in \Omega : |\varphi(x) - \lambda| < \varepsilon\}) \neq 0\}, \forall \varepsilon > 0$ và gọi là tập hợp các trị số cốt yếu của φ.

Nhắc lại rằng phổ $\sigma(a)$ của phần tử a trong một đại số Banach chính là tập hợp các số phức $\lambda \in C$ sao cho (a-1. λ) không có phần tử nghịch đảo trong B.

Bổ đề sau đây sẽ giải thích vì sao $\Re(\varphi)$ được gọi là tập hợp các trị số cốt yếu của φ.

Bổ đề 3.5: Cho $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ là không gian đo lường với m là độ đo hữu hạn và $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, m)$. Khi ấy ta có:

$$m(\{x \in \Omega : \varphi(x) \notin \Re(\varphi)\}) = 0$$

Từ 5 bổ đề trên ta có thể chứng minh định lý tồn tại 2.1. Thật vậy, trước hết, theo bổ đề 3.1. ta có quyền giả sử H là không gian Hilbert khả ly. Tiếp theo, với H khả ly và với bất kỳ toán tử $T \in \mathcal{L}^{c.t}(H)$, theo bổ đề 3.2, sẽ tồn tại một không gian đo lường $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ với m là độ đo hữu hạn và hàm $\varphi \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, m)$ sao cho toán tử chuẩn tắc T nói trên và toán tử nhân M_{φ} được xác định trên không gian $L^2(\Omega, \mathcal{A}, m)$ sẽ tương đương với nhau.

Do đó $\sigma(T) = \sigma(M_{\varphi})$

Nhưng, theo bổ đề 3.4 thì:

$$\sigma(M_{\varphi}) = \sigma(\varphi) = \Re(\varphi)$$

Vậy: $\sigma(T) = \Re(\varphi)$

Tiếp theo, lấy bất kỳ $f \in L^{\infty}(\sigma(T))$. Lúc đó $f \in L^{\infty}(\Re(\varphi))$ với $\varphi \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, m)$

Theo bổ đề 3.5 tacó:

$$m\{x \in \Omega : \varphi(x) \notin \Re(\varphi)\} = 0$$

Vậy φ là hàm bị chặn cốt yếu và có trị số hầu hết trên $\Re(\varphi)$. Nhưng ta đã có f bị chặn cốt yếu trên $\Re(\varphi)$, nên ta có hàm hợp $f_0\varphi$ bị chặn cốt yếu trên $(\Omega, \mathcal{A}, m)$, tức là $f_0 \varphi \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, m)$. Lúc đó, theo bổ đề 3.2, hệ thức $f(T) = M_{f_0\varphi}$ sẽ xác định một toán tử chuẩn tắc thuộc $\mathcal{L}^{c.t}(H)$.

Để xác định độ đo xác suất toán tử, ta lấy $f = 1_A$, $A \in B(\sigma(T))$, với $B(\sigma(T))$ là σ_đại số Borel trên $\sigma(T)$.

Hiển nhiên $1_A \in L^{\infty}(\sigma(T))$ và hệ thức $Q(A) = M_{1_A o\varphi}$ sẽ xác định một toán tử chuẩn tắc $Q(A) \in \mathcal{L}^{c.t}(H) \subset \mathcal{L}(H)$.

Vậy ứng với $A \in B(\sigma(T))$, ta có duy nhất $Q(A) \in \mathcal{L}(H)$, nên ta thiết lập được hàm tập $Q: B(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$.

Ta sẽ chứng minh rằng, hàm tập này chính là độ đo xác suất toán tử, tức là nó thoả các tính chất trong định nghĩa 2.3.

Thật vậy, trước hết: $Q(\sigma(T)) = M_{1_{\sigma(T)} o\varphi} = I$

Thứ nhì, từ các hệ thức $(1_A o\varphi)^2 = 1_A o\varphi$ và $\overline{1_A o\varphi} = 1_A o\varphi$, ta có $Q(A)^2 = Q(A)$ và $Q(A)^* = Q(A)$ nên Q(A) là toán tử chiếu trực giao, tức là $Q(A) \in \mathcal{L}^{tg}(H)$.

Từ đây, dễ thấy $0 \le Q(A) \le I$, với mọi A thuộc $B(\sigma(T))$.

Theo bổ đề 3.3, ta thấy Q có tính chất cộng hữu hạn, tức là $Q\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} Q(A_n)$

Tương tự như trong lý thuyết xác suất Kolmogorov, để chứng minh rằng hàm tập Q có tính chất σ_cộng tính, ta chỉ cần chứng minh rằng hàm tập Q có tính liên tục trên. Tức là nếu cho $\{A_n\}_{n \in N}$ là một dãy đơn điệu tăng trong σ_đại số $B(\sigma(T))$ và đặt $A_{\infty} = \bigcup_{n \in N} A_n$, thì

$$Q(A_{\infty}) = \lim_{n \to +\infty} Q(A_n) \text{ trong s\_tôpô của } \mathcal{L}(H).$$

Thật vậy, với mọi $a \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, m)$, ta có:

$$\left\|(Q(A_{\infty}) - \lim Q(A_n))(a)\right\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \left\|(Q(A_{\infty}) - Q(A_n))(a)\right\|^2$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\| M_{(1_{A_{\infty}} - 1_{A_n}) o\varphi}(a) \right\|^2$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\|((1_{A_{\infty}} - 1_{A_n}) o\varphi) a\right\|^2$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} \left| \left(\left(1_{A_\infty} - 1_{A_n} \right) \circ \varphi \right) a \right|^2$$

$$= 0$$

Vậy Q là σ _cộng tính và do đó là độ đo xác suất toán tử, xác định trên không gian đo được (σ (T),B(σ (T))).

Cuối cùng, ta có thể thác triển, một cách duy nhất, độ đo xác suất toán tử Q trên (σ (T), B(σ (T))) thành độ đo xác suất toán tử xác định trên toàn bộ mặt phẳng phức (C, B(C)), mà ta cũng ký hiệu là Q, bằng cách đặt:

$$Q(\sigma(T)^c) = 0.$$

Trong đó $\sigma(T)^c$ là phần bù của σ (T) trên C.

Vậy ta đã xác định được độ đo xác suất toán tử Q trên mặt phẳng phức (C, B(C)) bởi toán tử chuẩn tắc $T \in \mathcal{L}^{c.t}(H)$. Như vậy, đồng thời ta cũng xây dựng được không gian xác suất toán tử (C, B(C)),Q) của toán tử chuẩn tắc T và định lý tồn tại 2.1 chứng minh xong.

4. <u>Nhận xét:</u> Trước hết, ta xét 2 trường hợp riêng của toán tử chuẩn tắc T. Đó là khi T tự liên hiệp và khi T đơn nguyên (unita).

4.1 Giả sử T là toán tử tự liện hiệp, tức là $T \in \mathcal{L}^{t.l}(H)$. Lúc đó, ta đã biết, phổ $\sigma(T) \subset$ IR. Gọi B(σ (T)) là σ _đại số Borel trên $\sigma(T) \subset$ IR.

Khi ấy, theo định lý 2.1, tồn tại một độ đo xác suất toán tử Q trên (σ (T),B(σ (T))). Hơn nữa, ta có thể thác triển Q, mộ cách duy nhất, thành độ đo xác suất toán tử trên toàn bộ (IR, B (IR)), mà ta cũng ký hiệu là Q, bằng cách đặt: $Q(\sigma(T)^c) = 0$

Rõ ràng Q là độ đo xác suất toán tử trên (IR, B (IR)) và bộ ba (IR, B (IR), Q) tạo thành một không gian xác suất toán tử tự liên hiệp $T \in \mathcal{L}^{t.l}(H)$.

4.2 Giả sử T là toán tử đơn nguyên (unita), tức là T thoả điều kiện: $T.T^* = T^*.T = I$, với I là toán tử đơn vị.

Ta cũng biết rằng, nếu T đơn nguyên thì phổ σ (T) của T là một tập hợp con của vòng tròn đơn vị

$$D = \{z \in C: |z| = 1\}$$

Ký hiệu B(σ (T)) là σ _đại số Borel trên σ (T). Theo định lý tồn tại 2.1, sẽ tồn tại một độ đo xác suất toán tử Q trên không gian đo được (σ (T),B(σ (T))) và bộ ba (σ (T), B(σ (T)), Q) là một không gian xác suất toán tử của toán tử đơn nguyên T.

Ta có thể thác triển, một cách duy nhất, độ đo Q thành độ đo xác suất toán tử trên toàn bộ vòng tròn đơn vị D, mà ta cũng ký hiệu là Q, bằng cách đặt

$$Q(\sigma(T)^c) = 0$$

Lúc đó bộ ba (D, B(D), Q) là không gian xác suất toán tử của toán tử đơn nguyên T.

4.3 Trên đây ta đã xây dựng một số độ đo xác suất toán tử cụ thể và cùng với nó chúng là một số không gian xác suất toán tử cụ thể.

Tuy nhiên, ta đã biết rằng, trong lý thuyết xác suất Kolmogorov, rất ít khi người ta quan tâmtới không gian xác suất cụ thể. Thông thường, người ta chỉ cho một không gian các biến cố sơ cấp Ω, một σ _đại số $\mathcal{A}$ trên Ω và một độ đo xác suất P trên $\mathcal{A}$. Khi ấy, bộ ba (Ω, $\mathcal{A}$,P) được gọi là không gian xác suất Kolmogorov như đã nêu trong định nghĩa 2.2.

Vì vậy, đối với lý thuyết xác suất toán tử, ta cũng không cần nêu cụ thể toán tử T cùng với độ đo xác suất toán tử và không gian xác suất toán tử tương ứng với nó, mà chỉ cần cho một tập hợp Ω, một σ _đại số $\mathcal{A}$ trên Ω và một độ đo xác suất toán tử Q trên $\mathcal{A}$. Khi ấy bộ ba ($\Omega,\mathcal{A}$,Q) tạo thành một không gian xác suất toán tử như đã nêu trong định nghĩa 2.3.

4.4 Trong bổ đề 3.1, ta giả sử H là không gian Hilbert bất kỳ và chứng minh được H là tổng trực giao của một họ không đếm được các không gian Hilbert khả ly $H_i, \forall i \in I$. Nhưng trong chứng minh này phải sử dụng tiên đề chọn (dưới dạng tương đương với nó là bổ đề Zorn). Để tránh việc sử dụng tiên đề chọn quá nhiều lần và các rắc rối có thể nảy sinh khi sử dụng nó, ta có thể giả thiết ngày từ đầu rằng H là một không gian Hilbert khả ly. Việc sử dụng giả thiết này có lẽ không làm mất mác nhiều cho lý thuyết của ta sau này.

Hơn nữa, khi đó, trong bổ đề 3.2, ta sẽ có ngay H là một không gian Hilbert khả ly và sẽ tồn tại ngay một không gian đo lường ($\Omega,\mathcal{A}$,m) với độ đo m hữu hạn. Việc này cũng làm giảm bớt rất nhiều độ khó khăn khi chứng minh bổ đề 3.2

5. <u>Thí dụ:</u> Ta xét vài tập trị của độ đo xác suất toán tử.

5.1 Xét trường hợp H = IR. Khi ấy:

$\mathcal{L}$(H) = $\mathcal{L}$(IR) = tập hợp các hàm tuyến tính xác định trên IR.

Hơn nữa tập hợp các toán tử chiếu trực giao $\mathcal{L}^{tg}$(H) = $\mathcal{L}^{tg}$(IR) = {0;1}, tức là chỉ có 2 phần tử. Đây là trường hợp tầm thường.

5.2 Xét trường hợp H = IR^2. Khi ấy:

$\mathcal{L}$(H) = $\mathcal{L}$(IR^2) = M(2x2) = Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp 2.

Ngoài ra $\mathcal{L}^{tg}$(H) = $\mathcal{L}^{tg}$(IR^2) = Tập hợp tất cả các ma trận chiếu trực giao cấp 2.

Các ma trận chiếu trực giao sẽ có dạng:

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và được tìm từ điều kiện $\begin{cases} T^* = T \\ T^2 = T \end{cases}$ trong đó T* là ma trận chuyển vị của ma trận T

Điều kiện đó sẽ được đưa về hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được các nghiệm:

$$T_a = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a(1-a)} \\ \pm\sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix}, 0 \le a \le 1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. <u>Thảo luận</u>: Ta muốn so sánh sơ bộ Lý thuyết xác suất toán tử và Lý thuyết xác suất Kolmogorov thông qua tập trị của các độ đo.

6.1 Khi H = IR, ta đã biết tập trị của độ đo xác suất Kolmogorov là toàn bộ đoạn [0,1] tức là vô hạn điểm.

Trong lúc đó, theo thí dụ 5.1, tập trị của độ đo xác suất toán tử chỉ gồm 2 điểm {0;1}, tức là nghèo hơn so với tập trị của độ đo xác suất Kolmogorov.

Tuy nhiên tình hình sẽ khác đi, khi không gian Hilbert H lớn hơn.

Cụ thể, khi H = IR^2 thì tập trị của độ đo xác suất Kolmogorov vẫn là đoạn [0,1]. Nhưng theo thí dụ 5.2 thì tập trị của độ đo xác suất toán tử đã rất phong phú. Tuy nhiên, điều quan trọng là nó gồm tập hợp các ma trận chiếu trực giao cấp 2, tức là không phải trường hợp riêng của tập trị của độ đo xác suất toán tử và kích cỡ rất lớn.

6.2 Cũng qua thí dụ ở mục 5, ta thấy lý thuyết xác suất Kolmogorov không phải là trường hợp riêng của lý thuyết xác suất toán tử và lý thuyết xác suất toán tử càng không phải là trường hợp riêng của lý thuyết xác suất Kolmogorov, mặc dầu giữa chúng cũng có một vài điểm chung.

Như vậy đây là hai lý thuyết khác nhau và có thể ứng dụng cho hai loại vật chất khác nhau. Đối tượng vật chất của Lý thuyết xác suất Kolmogorov thì đã rõ do tầm ứng dụng phong phú của nó trong nhiều ngành Khoa học thực nghiệm.

Còn đối tượng vật chất của lý thuyết toán tử thì hiện nay chưa thấy ở đâu. Có thể nó nằm trong một dạng vật chất nào đó của tương lai.

6.3 Đây chỉ là bài mở đầu của Lý thuyết xác suất toán tử. Còn vô số vấn đề cần phải giải quyết . Thí dụ như định nghĩa tính độc lập của 2 biến cố, định nghĩa đại lượng ngẫu nhiên; kỳ vọng và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên... Các vấn đề ấy sẽ được lần lượt trình bày vào thời điểm thích hợp.

Lời cảm ơn: *Tác giả cám ơn các bạn đồng nghiệp có tên dưới đây đã tham dự Sêmina "Xác suất – Thống kê Ứng dụng" và/hoặc góp ý cho bài báo này:*

Võ Minh Trí, Dương Tôn Đảm, Dương Minh Đức, Tô Anh Dũng, Đặng Đông Triều, Lê Thanh Nhân, Trần Huy Cang, Phạm Quang Lâm, Phạm Ngọc Quý, Nguyễn Trường Chấng, Lê Vĩnh Thuận, Lê Minh Trí, Lê Thị Xuân Mai, Lê Thị Diệu Uyên, Phạm Trí Cao, Nguyễn Quyết, Nguyễn Tấn Hoàng, Nguyễn Thị Ánh Nguyệt.

ON THE EXISTENCE OF OPERATIONAL PROBABILITY MEASURE

Ung Ngoc Quang

Faculty of Mathematics_Informatics, University of Natural Sciences - VNU-HCM

ABSTRACT: *The paper investigated a Probability measure Q, taking the values in the $\mathcal{L}(H)$, where $\mathcal{L}(H)$ is the space of all linear bounded operators on a Hilbert space H.*

We proved the existence of Operational Probability measure Q in a special case

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A.N.Kolmogorov, Lý thuyết Xác suất và Thống kê toán học (tiếng Nga), Nauka, Maxkva, 1986

[2] T.de Galiana, M.Rival, Larousse: Từ điển các phát minh và các nhà phát minh, NXB Giáo dục_Centre de Cooperation et d'Action Culturelle, Hà Nội, 2002.

[3] Ung Ngọc Quang, On the Bayesian estimators in multidimensional nonlinear regression models, Journal Science and Technology Development, Vol.4, No.7 (2001), 23-29.

[4] Ung Ngọc Quang, Về sự tồn tại ước lượng Bayes trong mô hình thống kê vô hạn chiều với không gian compăc, tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ, Tập 5, Số 11 (2002), 5-11

[5] T.A.Sarymsakov, Nửa trường tôpô và Lý thuyết xác suất (tiếng Nga), Fan, Taskent, 1974.

[6] T.A.Sarymsakov, Lý thuyết xác suất trong nửa trường tôpô(tiếng Nga), Khoa Toán, Trường Đại học Tổng Hợp Quốc gia Taskent, 1975 (Lưu hành nội bộ).

[7] V.G.Vinocurov, Lý thuyết xác suất không giao hoán, Khoa Toán, Trường Đại học Tổng Hợp Quốc gia Taskent, 1975 (Lưu hành nội bộ).

[8] Đặng Đình Áng, Tôpô đại cương, Khoa Toán, Trường Đại học Tổng Hợp TP.Hồ Chí Minh, 1980 (Lưu hành nội bộ)

[9] Tôn Thất Long, Giải tích hàm. Phần II: Lý thuyết phổ các toán tử trong không gian Hilbert, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học TP.Hồ Chí Minh, 1977 (Lưu hành nội bộ)

[10] I.I.Akhizer, I.M.Glazman, Lý thuyết toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert (Tiếng Nga), Trường Đại học Tổng Hợp Quốc giaKharkov, Kharcov, 1977

[11] R.Meise, D.Vogt, Introduction to Functional Analysis, Clarendon Press-Oxford, 1997

[12] W.Rudin, Functional Analysis, Mc Graw – Hill, New York, 1973

[13] K.Yosida, Functional Analysis, Springe – Verlag, Berlin, 1995

[14] N.Dunford, J.I.Schwartz, Linear Operators, Vol.I: General Theory, Interscience, New York, 1964

[15] N.Dunford, J.I.Schwartz, Linear Operators, Vol.II: Spectral Theory, Interscience, New York, 1964

[16] N.Dunford, J.I.Schwartz, Linear Operators, Vol.III: Spectral Operators, Wiley - Interscience, New York, 1971.