

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN BIẾN DẠNG PHẪNG TRONG VẬT LIỆU COMPOSITE ĐÀN – NHỚT TRỰC HƯỚNG

Ngô Thành Phong, Nguyễn Thời Trung, Nguyễn Đình Hiến

Bộ môn Toán Cơ, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 31 tháng 7 năm 2003)

TÓM TẮT: Bài báo trình bày các phương pháp gần đúng tính toán sự phân bố ứng suất trong ống trụ tròn dài bằng vật liệu composite đàn–nhớt trực hướng dưới tác dụng của áp suất trong và áp suất ngoài. Từ nghiệm đàn hồi, sau khi áp dụng nguyên lý tương ứng, thu được nghiệm của bài toán đàn hồi kết hợp. Từ đây tính được nghiệm đàn–nhớt bằng cách sử dụng ba phương pháp gần đúng: phương pháp trực tiếp, phương pháp chọn điểm và phương pháp tựa đàn hồi.

1. Bài toán biến dạng phẳng

Trạng thái biến dạng phẳng là trạng thái biến dạng có chuyển vị song song với mặt phẳng tọa độ x_1, x_2 và không phụ thuộc x_3

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0 \quad (1.1)$$

Trạng thái biến dạng này xuất hiện trong vật thể lăng trụ hoặc hình trụ dài dưới tác dụng của lực mặt hoặc chuyển vị vuông góc với mặt bên và không thay đổi theo chiều dài.

Từ (1.1) suy ra $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ (1.2)

Từ các phương trình quy luật ứng xử của vật liệu đàn hồi cũng như đàn–nhớt tuyến tính suy ra rằng, các thành phần của tenxơ ứng suất không phụ thuộc x_3 . Giả sử tính đối xứng của các tính chất cơ học của vật liệu sao cho với điều kiện (1.2) thì

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (1.3)$$

Khi đó σ_{33} là ứng suất chính. Trong phương trình cân bằng, thành phần lực khối $F_3 = 0$, còn F_1, F_2 không phụ thuộc x_3 .

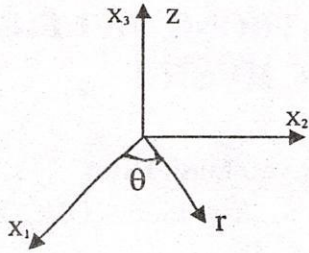
Tóm lại, trong tiết diện ngang bất kỳ $x_3 = \text{const}$, trạng thái ứng suất–biến dạng giống nhau, do đó chỉ cần xét các trường ứng suất σ_{ij} , trường chuyển vị u_i và trường biến dạng ε_{ij} trong tiết diện ngang bất kỳ $x_3 = \text{const}$.

Dưới đây ta xét cụ thể trạng thái biến dạng phẳng đối xứng trục của ống trụ có tiết diện ngang được giới hạn bởi các đường tròn đồng tâm với bán kính trong $r = a$ và bán kính ngoài $r = b$.

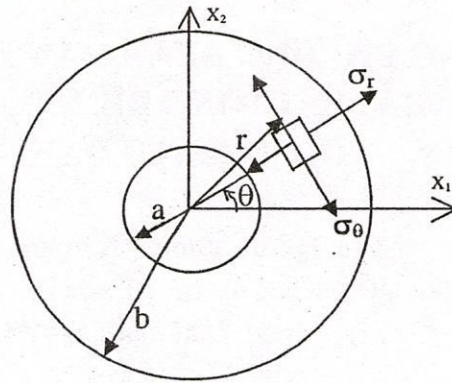
Hệ tọa độ trụ r, θ, z có trục z hướng theo trục ống trụ x_3 (Hình 1)

Do tính đối xứng trục, các trục tọa độ r, θ trong tiết diện ngang là các trục chính. Các thành phần biến dạng khác không là $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ tương ứng các thành phần ứng suất là σ_r, σ_θ (Hình 2). Thành phần $\sigma_z \neq 0$ trong mỗi tiết diện ngang hợp thành lực kéo nén dọc trục và được tính toán qua $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$.

Các thành phần ứng suất, biến dạng phụ thuộc vào r, t .



Hình 1.



Hình 2.

Đặt \$u_r(r,t) = u(r,t)\$ với \$u(r,t) > 0\$ các thành phần của tenxơ biến dạng được tính theo công thức:

$$\varepsilon_r(r,t) = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(r,t) = \frac{u}{r} \tag{1.4}$$

Các thành phần của tenxơ ứng suất \$\sigma_r(r,t), \sigma_\theta(r,t)\$ khi không có lực khối thỏa phương trình vi phân cân bằng:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \tag{1.5}$$

Điều kiện biên tại thời điểm ban đầu \$t = 0\$ được cho dưới dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -P \quad \text{tại } r = a \\ \sigma_r &= -Q \quad \text{tại } r = b \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Nghiệm đàn hồi

Giả sử ống được làm từ vật liệu có tính chất cơ học trục hướng trục. Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính quan hệ ứng suất–biến dạng trong hệ tọa độ trụ có dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= C_{12}\varepsilon_r + C_{22}\varepsilon_\theta \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó \$C_{ij}\$ là các mô đun đàn hồi. Quan hệ ngược được viết dưới dạng:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_\theta}{E_{r\theta}}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_r}{E_{r\theta}} + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} \tag{2.2}$$

trong đó, các biểu thức sau đây được sử dụng:

$$\frac{1}{E_r} \equiv \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \frac{1}{E_{r\theta}} \equiv \frac{-C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \frac{1}{E_\theta} \equiv \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \tag{2.3}$$

Thế (1.4) vào (2.1), rồi lấy kết quả thế tiếp vào (1.5), ta thu được phương trình vi phân cấp 2 đối với chuyển vị của ống:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E_\theta}{E_r} u = 0 \tag{2.4}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$u = \frac{C_0}{r^\gamma} + C_1 r^\gamma \tag{2.5}$$

trong đó, \$C_0, C_1\$ là các hằng số bất kỳ và

$$\gamma = \sqrt{E_{\theta}/E_r} \quad (2.6)$$

Sau khi tính toán C_0, C_1 bằng cách sử dụng các điều kiện biên (1.6), ta có thể thu được các thành phần biến dạng từ (1.4) sau đó thế biến dạng vào (2.1) ta thu được các thành phần của tenxơ ứng suất [1]

$$\sigma_r = \frac{Pc^{r+1} - Q}{1 - c^{2r}} \rho^{r-1} + \frac{Qc^{r-1} - P}{1 - c^{2r}} \gamma c^{r+1} \rho^{-r-1} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pc^{r+1} - Q}{1 - c^{2r}} \gamma \rho^{r-1} - \frac{Qc^{r-1} - P}{1 - c^{2r}} \gamma c^{r+1} \rho^{-r-1}$$

trong đó: $c = a/b, \rho = r/b \quad (c < 1, c \leq \rho \leq 1)$ (2.8)

Để sử dụng trong việc minh họa các phương pháp gần đúng giải bài toán biên đàn-nhớt, ta tập trung chú ý vào các ứng suất vòng tại biên trong $r = a$ và biên ngoài $r = b$

$$\sigma_{\theta}(a) = \gamma P \frac{1 + c^{2r}}{1 - c^{2r}} - \gamma Q \frac{2c^{r-1}}{1 - c^{2r}} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\theta}(b) = \gamma P \frac{2c^{r+1}}{1 - c^{2r}} - \gamma Q \frac{1 + c^{2r}}{1 - c^{2r}} \quad (2.10)$$

3. Nghiệm đàn-nhớt

3.1 Nguyên lý tương ứng và bài toán đàn hồi kết hợp

Cũng như trong lý thuyết tổng quát của vật liệu đàn-nhớt tuyến tính, trường hợp biến dạng phẳng xét ở đây, nguyên lý tương ứng hoàn toàn được áp dụng một cách hữu hiệu.

Theo nguyên lý tương ứng, nghiệm của bài toán biên đàn-nhớt có thể thu được từ nghiệm của bài toán biên đàn hồi, trong đó các hằng số đàn hồi được thay bằng các toán tử hàm phụ thuộc thời gian (mô đun chùng ứng suất hoặc hàm chảy chậm).

Dựa trên nguyên lý tương ứng, ta áp phép biến đổi Laplace theo biến thời gian thực $t \geq 0$ vào các phương trình cân bằng, hệ thức Cauchy biểu thị quan hệ biến dạng-chuyển vị, định luật Hooke tổng quát và các điều kiện biên.

Các phương trình thu được chứa các hàm ảnh của phép biến đổi Laplace hoàn toàn tương tự về mặt toán học với các phương trình của lý thuyết đàn hồi tuyến tính, ta gọi các phương trình này mô tả bài toán đàn hồi kết hợp.

Để thu được nghiệm của bài toán biên đàn-nhớt ta phải áp phép biến đổi Laplace ngược vào nghiệm của bài toán đàn hồi kết hợp.

Phép biến đổi Laplace có dạng

$$\bar{f} \equiv \bar{f}(x_i, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x_i, t) dt \quad (3.1)$$

Trong (3.1) $\bar{f}(x_i, p)$ là nghiệm của bài toán đàn hồi kết hợp với $p \geq 0$. Hàm này đã biết dưới dạng giải tích hoặc dạng số gần đúng, $f(x_i, t)$ là nghịch ảnh của phép biến đổi Laplace, là hàm chưa biết, nó chính là nghiệm của bài toán đàn-nhớt cần tìm.

Ở đây \bar{f} có thể là \bar{u} hoặc $\bar{\varepsilon}_{\theta}, \bar{\varepsilon}_r$, hoặc $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_{\theta}$, đặc biệt, $\bar{\sigma}_{\theta}(a), \bar{\sigma}_{\theta}(b)$.

Dưới đây ta sử dụng ba phương pháp gần đúng để giải bài toán biến dạng phẳng đàn-nhớt: phương pháp trực tiếp, phương pháp chọn điểm và phương pháp tựa đàn hồi.

3.2 Phương pháp trực tiếp và phương pháp chọn điểm

Phương pháp trực tiếp dựa vào quan hệ trực tiếp giữa hàm phụ thuộc thời gian và nghiệm đàn hồi kết hợp. Nếu nghiệm đàn–nhớt $\sigma_\theta(a,t)$, $\sigma_\theta(b,t)$ có độ cong bé trong đồ thị đối với biến số $\log t (\equiv \log_{10} t)$, thì

$$p\bar{\sigma}_\theta(a,p) \approx [\sigma_\theta(a,t)]_{t=\beta/p}, \quad p\bar{\sigma}_\theta(b,p) \approx [\sigma_\theta(b,t)]_{t=\beta/p} \quad (3.2)$$

trong đó $\beta = e^{-C} \approx \frac{1}{2}$ (C là hằng số Euler)[2].

Phương trình (3.2) trở thành chính xác nếu $\sigma_\theta(a,t)$, $\sigma_\theta(b,t)$ tỉ lệ với $\log t$.

Phương pháp trực tiếp thu được bằng cách viết (3.2) dưới dạng tương đương

$$\sigma_\theta(a,t) \approx [p\bar{\sigma}_\theta(a,p)]_{p=\frac{1}{2}t}, \quad \sigma_\theta(b,t) \approx [p\bar{\sigma}_\theta(b,p)]_{p=\frac{1}{2}t} \quad (3.3)$$

Cần nhấn mạnh rằng (3.3) được sử dụng với giả thiết về độ cong bé của $\sigma_\theta(a,t)$, $\sigma_\theta(b,t)$ đối với $\log t$.

Nguyên lý tương ứng cho phép ta nhận được nghiệm bài toán đàn hồi kết hợp từ nghiệm bài toán đàn hồi

$$\sigma_\theta \rightarrow \bar{\sigma}_\theta, \quad Q = P \rightarrow P\bar{H}(t) = \frac{P}{p}, \quad H(t) \text{ là hàm Heaviside}$$

$$\gamma \rightarrow \tilde{\gamma} \equiv \sqrt{\frac{\tilde{E}_\theta}{\tilde{E}_r}} \quad (3.4)$$

$$p\bar{\sigma}_\theta \equiv p\bar{\sigma}_\theta(a,p) \equiv p\Delta\bar{\sigma}_\theta(a,p) + \sigma_e = \frac{\tilde{\gamma}P}{1-c^{2\tilde{\gamma}}} [1 + c^{2\tilde{\gamma}} - 2c^{\tilde{\gamma}-1}] \quad (3.5)$$

$$p\bar{\sigma}'_\theta \equiv p\bar{\sigma}'_\theta(b,p) \equiv p\Delta\bar{\sigma}'_\theta(b,p) + \sigma_e = \frac{-\tilde{\gamma}P}{1-c^{2\tilde{\gamma}}} [1 + c^{2\tilde{\gamma}} - 2c^{\tilde{\gamma}+1}] \quad (3.6)$$

Các mô đun chùng tính toán \tilde{E}_r và \tilde{E}_θ được xác định từ các phương trình (2.2) qua biến đổi Laplace:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\bar{\sigma}_r}{\tilde{E}_r} + \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\tilde{E}_{r\theta}}, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\bar{\sigma}_r}{\tilde{E}_{r\theta}} + \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\tilde{E}_\theta} \quad (3.7)$$

Xét thí nghiệm chùng ứng suất, trong đó $\sigma_\theta = 0$ và ε_r có giá trị hằng tác dụng tại thời điểm $t=0$, ta có

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\tilde{E}_r \varepsilon_r}{p} \equiv \bar{E}_r \varepsilon_r \quad (3.8)$$

Từ đây ta suy ra

$$\tilde{E}_r = p\bar{E}_r \quad (3.9)$$

$$\text{và} \quad E_r(t) = \frac{\sigma_r(t)}{\varepsilon_r} \quad (3.10)$$

Tương tự, ta có $\tilde{E}_\theta = p\bar{E}_\theta$

Các mô đun chùng $E_r(t)$ và $E_\theta(t)$ được giả thiết có dạng hàm mũ [2]

$$E_r(t) = \left[100 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-0.5} + 1 \right] E_e \quad (3.11a)$$

$$E_{\theta}(t) = \left[100 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-0.1} + 1 \right] E_e \quad (3.11b)$$

trong đó τ_0 và E_e là các hằng số.

Áp phép biến đổi Laplace vào (3.11) ta nhận được

$$\tilde{E}_r = p\bar{E}_r = [100\Gamma(0.5)p^{0.5} + 1]E_e \quad (3.12a)$$

$$\tilde{E}_{\theta} = p\bar{E}_{\theta} = [100\Gamma(0.9)p^{0.1} + 1]E_e \quad (3.12b)$$

với các giá trị hàm gamma

$$\Gamma(0.5) \approx 1.77 ; \quad \Gamma(0.9) \approx 1.07 \quad (3.13)$$

Nghiệm bài toán đàn-nhớt hữu hạn khi $t = \infty$ có thể được viết dưới dạng

$$\sigma_{\theta}(a,t) = \Delta\sigma_{\theta}(a,t) + \sigma_{\theta}^e(a) , \quad \sigma_{\theta}(b,t) = \Delta\sigma_{\theta}(b,t) + \sigma_{\theta}^e(b) \quad (3.14)$$

trong đó, theo định nghĩa

$$\Delta\sigma_{\theta}(a,\infty) \equiv 0, \Delta\sigma_{\theta}(b,\infty) \equiv 0, \sigma_{\theta}^e(a) \equiv \sigma_{\theta}(a,\infty), \sigma_{\theta}^e(b) \equiv \sigma_{\theta}(b,\infty) \quad (3.15)$$

$\sigma_{\theta}^e(a), \sigma_{\theta}^e(b)$ được tính từ công thức (2.9), (2.10).

Phương pháp chọn điểm là phương pháp gần đúng tìm biến đổi Laplace ngược của $\Delta\bar{\sigma}_{\theta}$. Hằng σ_{θ}^e là nghiệm cân bằng hoặc nghiệm lâu dài khi giả thiết nó hữu hạn. Từ (3.5), (3.6) và (3.12) ta nhận được

$$[p\bar{\sigma}_{\theta}]_{p=0} = \sigma_{\theta}(a,\infty) = \sigma_{\theta}^e(a) , \quad [p\bar{\sigma}'_{\theta}]_{p=0} = \sigma_{\theta}(b,\infty) = \sigma_{\theta}^e(b) \quad (3.16)$$

Để tìm biến đổi Laplace ngược của $\Delta\bar{\sigma}_{\theta}$ ta giả thiết rằng nghiệm có thể xấp xỉ bằng chuỗi Dirichlet hữu hạn

$$\Delta\sigma_{\theta}^* = \sum_{i=1}^N S_i e^{-\lambda_i t} \quad (3.17)$$

trong đó λ_i và S_i là các hằng số thực. Biến đổi Laplace ngược chính xác của các bài toán tựa tĩnh cũng thường có dạng e-mũ như $\Delta\sigma_{\theta}^*$. Các hệ số S_i được tính bằng cách cực tiểu hóa bình phương sai số giữa $\Delta\sigma_{\theta}$ và $\Delta\sigma_{\theta}^*$

$$E^2 \equiv \int_0^{\infty} (\Delta\sigma_{\theta} - \Delta\sigma_{\theta}^*)^2 dt \quad (3.18)$$

Cực tiểu hóa thu được từ điều kiện

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial S_i} = 0 = \int_0^{\infty} (\Delta\sigma_{\theta} - \Delta\sigma_{\theta}^*) e^{-\lambda_i t} dt \quad (3.19)$$

Như vậy, N quan hệ giữa các biến đổi Laplace có thể thu được bằng cách tính toán tại các số thực $\lambda_i, i = 1, N$

$$\Delta\bar{\sigma}_{\theta}^*(\lambda_i) = \Delta\bar{\sigma}_{\theta}(\lambda_i) \quad (3.20)$$

Để thuận tiện khi áp dụng, ta nhân hai vế (3.20) với p và thu được dạng hiển hệ N phương trình tuyến tính đủ để tính toán N hằng S_i

$$\sum_{j=1}^N \left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)^{-1} S_j = [p\Delta\bar{\sigma}'_{\theta}]_{p=\lambda_i} = [p\bar{\sigma}'_{\theta}]_{p=\lambda_i} - \sigma_{\theta}^e \quad (3.21)$$

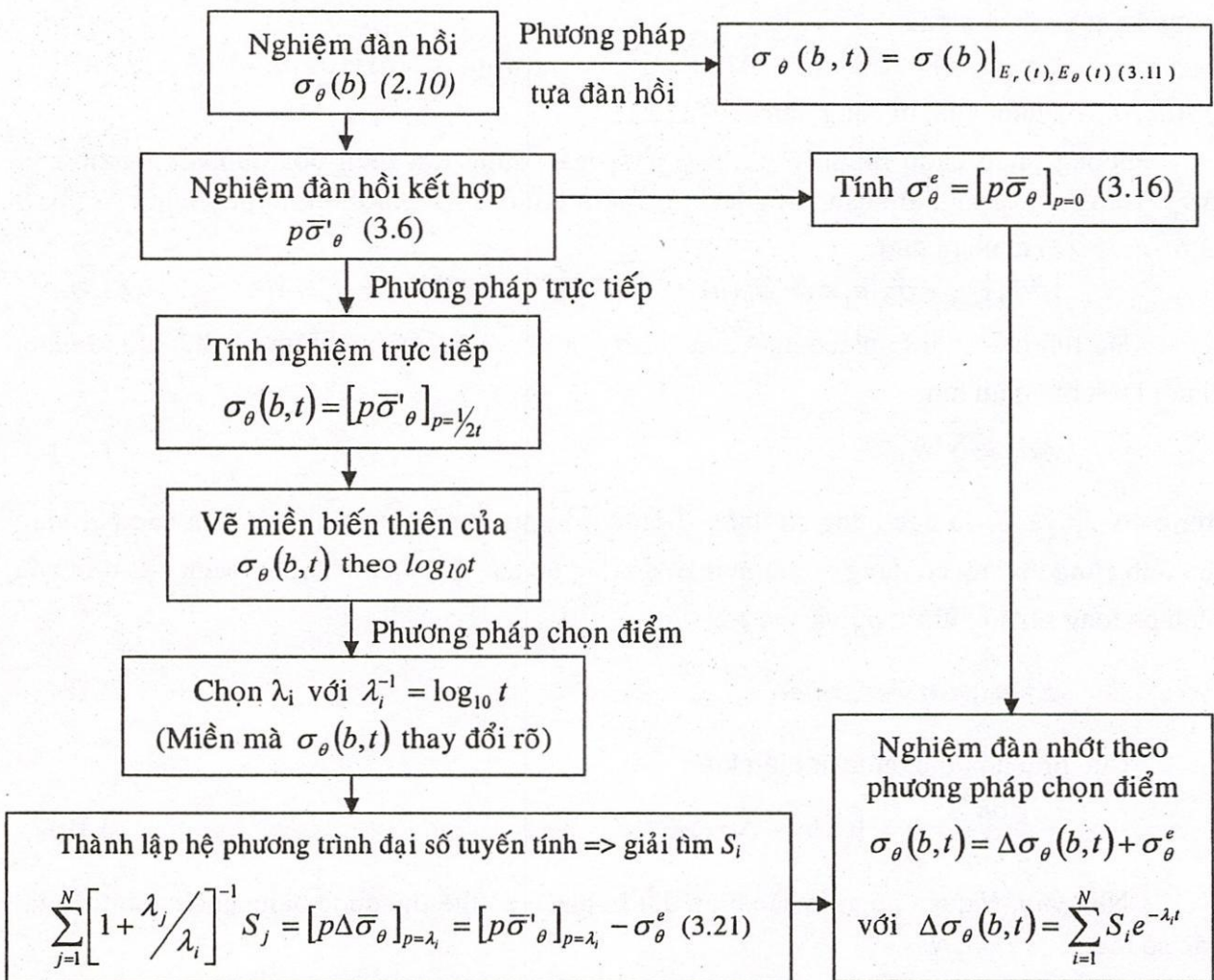
Tóm lại, bình phương sai số theo thời gian được cực tiểu hóa bằng cách chọn điểm của hàm ảnh biến đổi Laplace của chuỗi Dirichlet và nghiệm đàn hồi kết hợp tại N số thực $p = \lambda_i$.

Với một nghiệm đàn hồi thu được dưới dạng số hoặc bằng đồ thị với $p \geq 0$, các giá trị thích hợp của λ_i cần phải lựa chọn bằng cách cân nhắc kỹ.

3.3 Phương pháp tựa đàn hồi

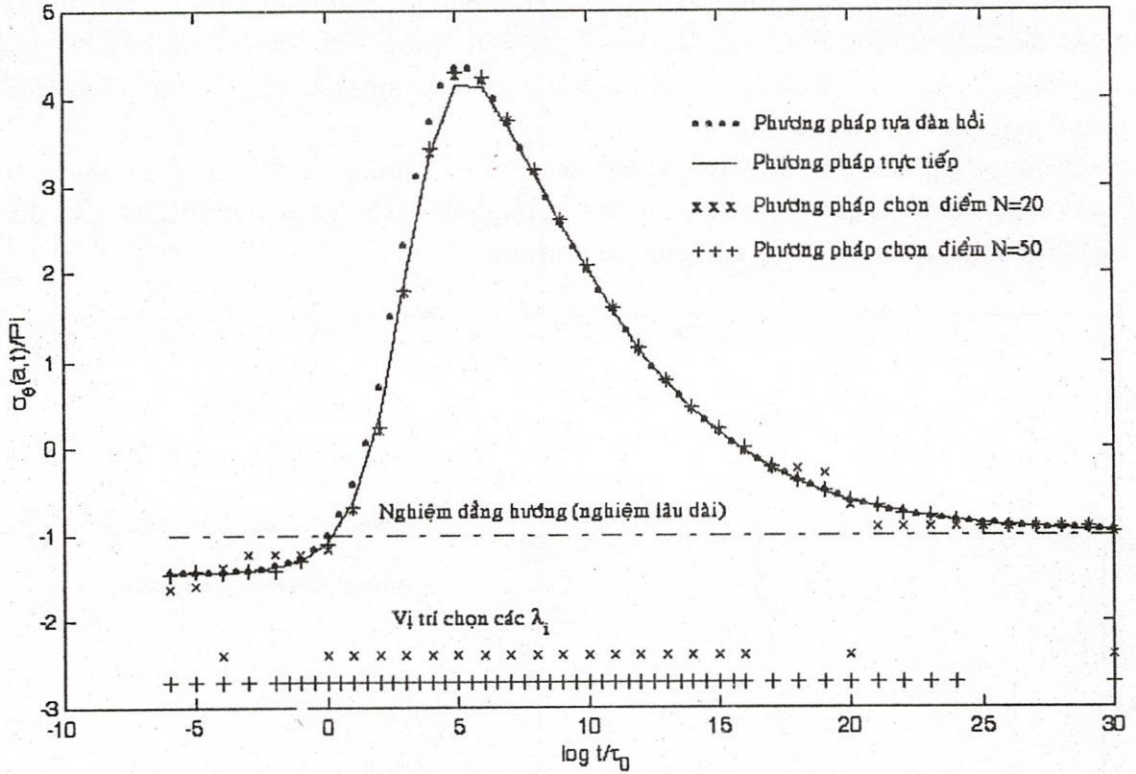
Theo phương pháp tựa đàn hồi, nghiệm đàn–nhót được xấp xỉ bởi nghiệm đàn hồi, trong đó các hằng số đàn hồi được thay bởi các mô đun chùng ứng suất. Trong bài toán ống trụ composite đàn–nhót trục hướng, trong nghiệm đàn hồi (2.9), (2.10) các mô đun đàn hồi được thay bởi công thức (3.11).

3.4 Sơ đồ khối giải bài toán ống trụ composite đàn–nhót trục hướng bằng phương pháp trực tiếp, phương pháp chọn điểm và phương pháp tựa đàn hồi.

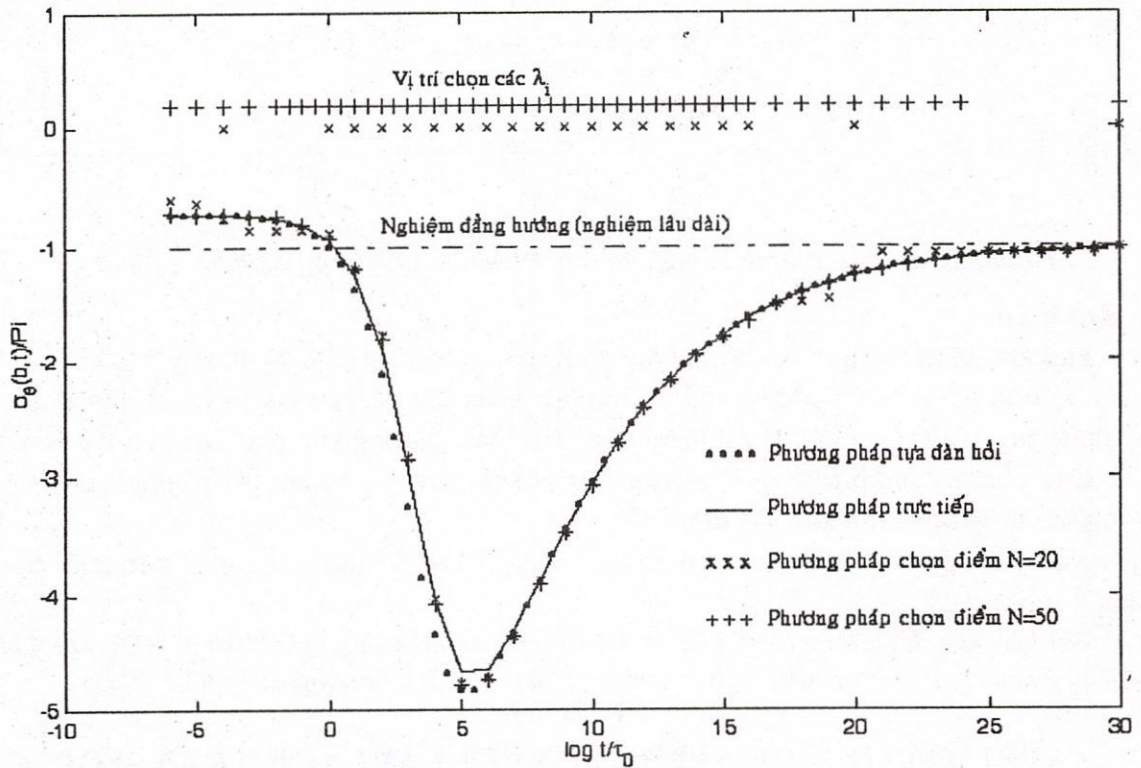


4. Kết quả số

Tính ứng suất đàn nhót ở bán kính trong $\sigma_{\theta}(a,t)/P$ và ở bán kính ngoài $\sigma_{\theta}(b,t)/P$ của ống trụ dài vô hạn. Với áp suất tác dụng ở bán kính trong và bán kính ngoài lần lượt là P và Q với $P = Q$.



Hình 3. Ứng suất ở biên trong của ống trụ được tính bằng 3 phương pháp

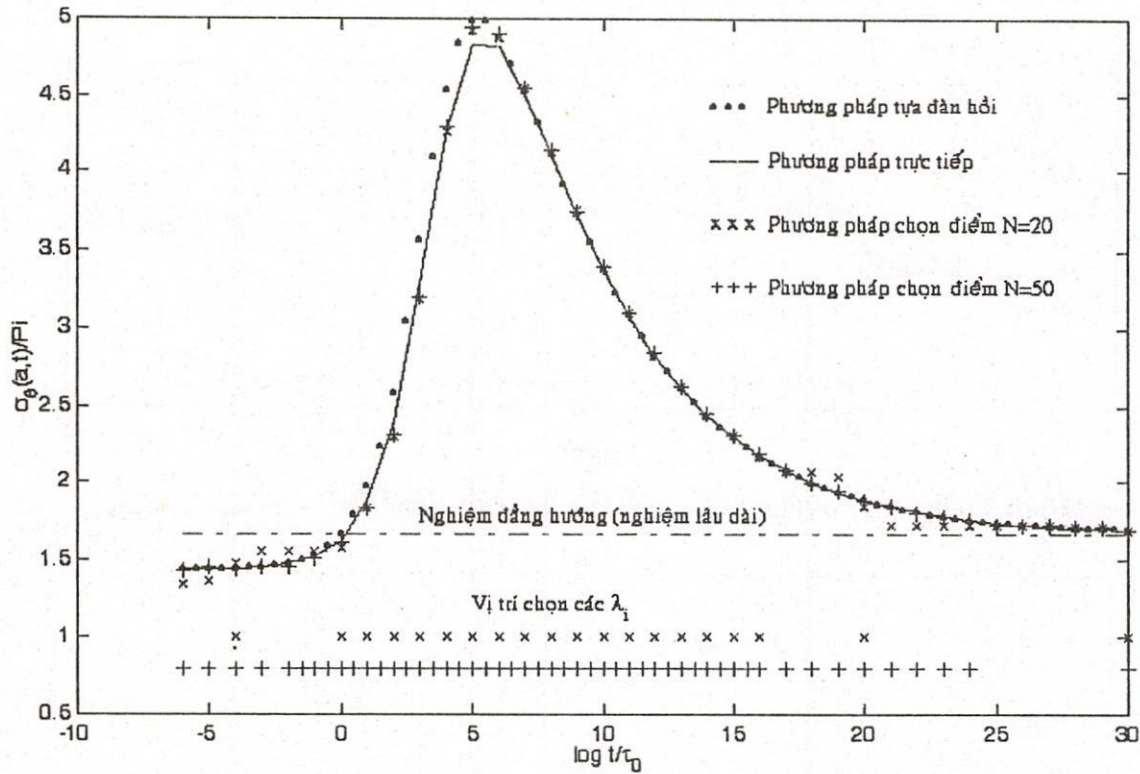


Hình 4. Ứng suất ở biên ngoài của ống trụ được tính bằng 3 phương pháp

Các kết quả được vẽ trên hình 3 và 4 khi tỉ số giữa bán kính trong và bán kính ngoài $a/b=1/2$. Tất cả ba lời giải là chính xác tại thời điểm giới hạn $t = 0$ và $t = \infty$ và phù hợp lẫn nhau trong sự chính xác đồ thị tại mọi thời điểm, không kể trên điểm đỉnh ứng suất.

Để thấy rõ được ưu điểm của phương pháp chọn điểm, chúng tôi đã sử dụng 2 lần chọn các điểm λ_i . Lần 1: $N=20$ điểm, lần 2 : $N=50$ điểm. Với $N=20$, ta thấy kết quả của phương pháp chọn điểm vẫn còn các độ lệch đáng kể tại một vài vị trí. Nhưng với $N=50$ sự hội tụ thể hiện trên khắp các miền.

Trường hợp đặc biệt khi chỉ có ứng suất ở bán kính trong tác dụng lên thành ống P , ứng suất ở bán kính ngoài $Q=0$ (ví dụ đường ống dẫn dầu đặt trên mặt đất). Khi đó ta có kết quả của ứng suất biên trong của ống trụ như sau:



Hình 5. Ứng suất ở biên trong của ống trụ được tính bằng 3 phương pháp

5. Kết luận

Phương pháp chọn điểm là phương pháp gần đúng khi $N < \infty$ nhưng ta có thể làm cho sai số bé hơn $\epsilon > 0$ cho trước bé tùy ý khi tăng N đủ lớn và các giá trị λ_i đủ gần nhau. Điều này được suy ra từ tính chất đầy đủ của các hàm bình phương khả tích dạng chuỗi Dirichlet.

Các phương pháp trực tiếp và tựa đàn hồi là những phương pháp gần đúng, nhưng ta không thể tăng độ chính xác lên được.

Nếu cho $Q=0$ kết quả thu được ở đây (Hình 5) tương tự như kết quả của R.A. Schapery trong [2].

Bài báo này được thực hiện dưới sự tài trợ của đề tài trọng điểm ĐHQG – Tp Hồ Chí Minh: Nghiên cứu quy luật ứng xử “ứng suất-biến dạng” của các vật liệu composite (2001-2003)

APPLICATION OF APPROXIMATE LAPLACE TRANSFORM INVERSION FOR PROBLEMS OF PLANE STRAIN IN VISCOELASTIC ORTHOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

By: Ngo Thanh Phong, Nguyen Thoi Trung, Nguyen Dinh Hien
Faculty of Mathematics & Informatics, University of Natural Sciences – VNU-HCM

ABSTRACT: *The paper presents approximate methods for the calculation of the stress distribution in a hollow cylinder of orthotropic viscoelastic composite materials under internal and external pressure. From the elastic solution the correspondence principle is applied to find the solution of associated elastic problem. Then three approximate methods : the collocation method, the direct method and the quasi-elastic method, are used to calculate the viscoelastic solution.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S.G.Lekhnitskie, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers Moscow, 1981.
- [2] R.A. Schapery, *Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials*, Volume 2, Edited by G.P. Sendeckyj, Academic Press, New York and London, 1971.