

NÉN ẢNH FRACTAL TRÊN CÁC HỆ SỐ CỦA BIẾN ĐỔI WAVELETS

Nguyễn Hữu Anh⁽¹⁾, Huỳnh Trung Hiếu⁽²⁾

⁽¹⁾ Khoa Toán - Tin Học, Trường ĐH Khoa Học Tự Nhiên – ĐHQG-HCM,

⁽²⁾ Khoa Điện - Điện Tử, Trường Đại Học Bách Khoa – ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 24 tháng 9 năm 2003)

TÓM TẮT: Nén ảnh là một lĩnh vực đã được phát triển hơn 30 năm qua, và đã có rất nhiều tác giả, công trình đã nghiên cứu về lĩnh vực này. Hiện nay có nhiều kỹ thuật được đưa ra như nén ảnh có tổn hao hoặc không tổn hao. Trong nén ảnh có tổn hao cũng có các kỹ thuật khác nhau, nhưng các kỹ thuật được nghiên cứu nhiều nhất là fractal, và nén ảnh dựa trên các phép biến đổi như DCT, Fourier, hoặc Wavelets, ... Trong đề tài này chúng tôi nghiên cứu một kỹ thuật nén ảnh dựa trên sự kết hợp giữa kỹ thuật nén không tổn hao với hai kỹ thuật nén có tổn hao là fractal và biến đổi wavelets. Qua thực nghiệm chúng tôi thấy rằng phương pháp này đã đem lại hiệu quả tốt hơn so với các phương pháp nén fractal và wavelets riêng lẻ.

1. SƠ LƯỢC VỀ NÉN ẢNH FRACTAL

Nén ảnh Fractal là một kỹ thuật trong việc mã các ảnh. Nó dựa trên tính tự tương tự của ảnh. Ý tưởng này đầu tiên được lấy từ lý thuyết toán học được gọi là “Hệ thống hàm lặp” (Iterated Function System-IFS), được phát triển từ năm 1991 bởi John Hutchinson. Tuy nhiên Barnsley và Demko [1] lại là người đầu tiên đưa IFS vào ánh xạ co. Nó thích hợp cho việc biểu diễn các tín hiệu và hình ảnh bằng các hàm. Mục đích của những phương pháp kiểu IFS là xấp xỉ các hình ảnh hoặc tín hiệu bởi các hàm được tạo ra bằng cách lặp lại thao tác dựa trên IFS.

Trong mã khối fractal ([2]-[5]), những khối ảnh được thay đổi tỷ lệ và xấp xỉ bởi các khối ảnh khác trong ảnh. Trước tiên chúng ta chia ảnh có kích thước $2^N \times 2^N$ thành các khối ảnh (block) (không chồng nhau), $\{R_{\nabla}^B\}$, có kích thước $2^B \times 2^B$ với ∇ là vị trí của các khối $2^B \times 2^B$; $\nabla \in E_B$ ở đây $E_B = \{(i,j): i,j \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq i,j < 2^{N-B}\}$. Các khối này được gọi là các range block. Mục đích của nén fractal là xấp xỉ mỗi range block này với các block thuộc bộ mã, được tạo ra từ các domain block $\{R_{\nabla'}^D\}$ có kích thước $2^D \times 2^D$, với $\nabla' \in E_D$, ở đây $E_D = \{(i,j): i,j \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq i,j < 2^{N-D}\}$. Bộ mã được tạo ra từ các domain block bằng các thao tác sau:

Average-subsample, A: Tính trung bình các khối ảnh theo cả hai chiều ngang và dọc:

$$AR_{\nabla}^D(i,j) = \frac{1}{4} [R_{\nabla}^D(2i,2j) + R_{\nabla}^D(2i,2j+1) + R_{\nabla}^D(2i+1,2j) + R_{\nabla}^D(2i+1,2j+1)]$$

Chúng ta cần áp dụng D-B lần thao tác A, $A^{(D-B)}$, để tạo thành các block có kích thước $2^B \times 2^B$ từ các block có kích thước $2^D \times 2^D$.

Isometry, L: Có 8 isometry bao gồm các phép quay quanh tâm và quay quanh các trục. Chúng ta thể hiện tập các isometry là $\{L_i, 1 \leq i \leq 8\}$.

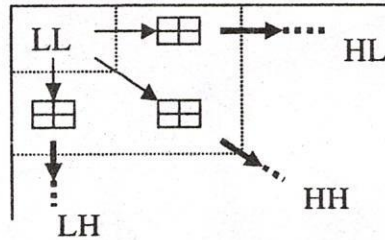
Mục đích của mã khối fractal là tìm một tập các thông số tối ưu $\{a_{\nabla}, b_{\nabla}, i, \nabla'\}$ ứng với mỗi range block R_{∇}^B trong số các xấp xỉ:

$$R_{\nabla}^B \approx a_{\nabla} L_i A^{(D-B)} R_{\nabla}^D + b_{\nabla} 1_B$$

sao cho sai số $\|R_{\nabla}^B - (a_{\nabla} L_i A^{(D-B)} R_{\nabla}^D + b_{\nabla} 1_B)\|$ là tối thiểu.

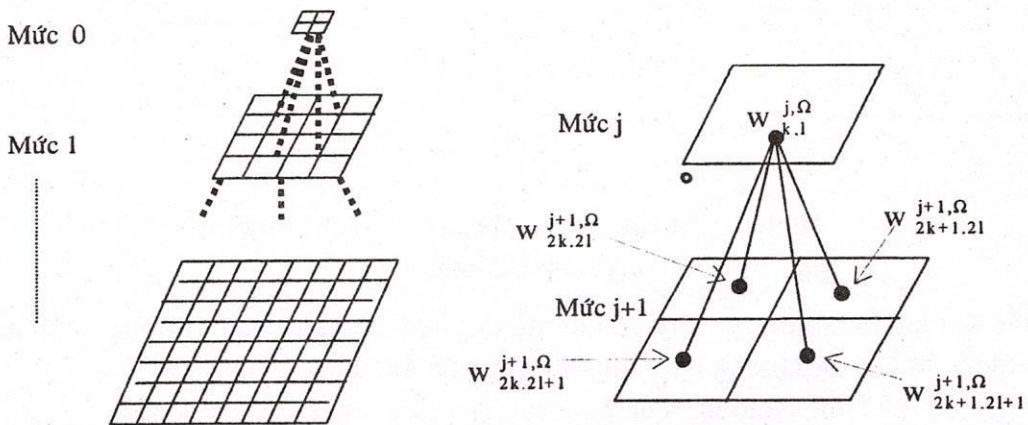
Mã khối fractal cho ảnh lúc đó bao gồm tập các thông số $\{a_{\nabla}, b_{\nabla}, i, \nabla\}$ ứng với mỗi range block R_{∇}^B trong vùng range.

2. XẤP XỈ FRACTAL TRÊN CÁC HỆ SỐ WAVELETS



Hình 1. Quá trình mở rộng các hệ số wavelets

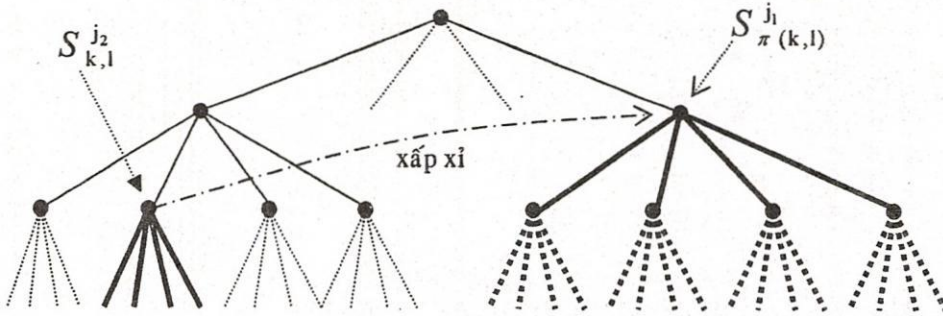
Trong nén ảnh Fractal chúng ta xấp xỉ một tập các khối có kích thước $2^B \times 2^B$ (gọi là các range block) sử dụng một tập các khối có kích thước lớn hơn (gọi là các domain block). Chúng ta có thể khảo sát các thao tác kiểu IFS này trên các hệ số của biến đổi wavelets. Trong phép biến đổi wavelets ([6]-[9]), ảnh nguyên thủy được tách ra thành bốn dạng subband chính, tương ứng với các thành phần tần số là LL(low-low), LH(low-high), HL(high-low), và HH (high-high). Các hệ số thuộc subband LL được gọi là các hệ số scaling, còn các hệ số thuộc 3 subband còn lại được gọi là các hệ số wavelets. Các hệ số scaling lưu nhiều thông tin của ảnh hơn do đó sẽ được nén theo phương pháp gần như không tổn hao. Còn các hệ số wavelets lưu ít thông tin của ảnh nên ta có thể dùng phương pháp nén có tổn hao. Các hệ số wavelets ở mức cao có thể được xấp xỉ từ các hệ số ở mức thấp hơn. Hình 1 minh họa cho ý tưởng này. Các hệ số wavelets có thể được tổ chức theo dạng cây như hình 2.



Hình 2. Dạng cây của các hệ số

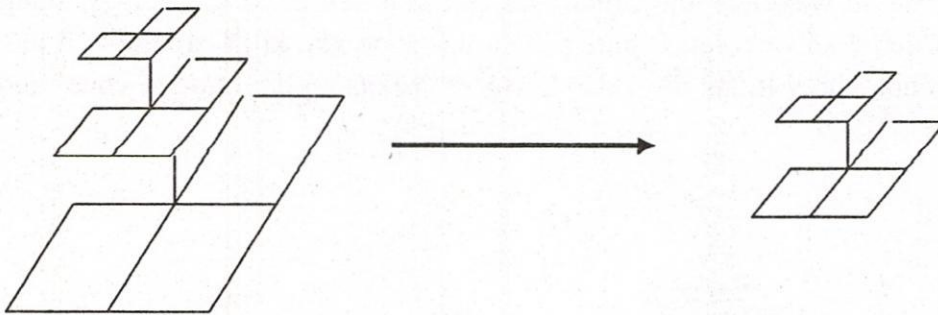
Cho $w_{k,l}^{j,\Omega}$ là hệ số wavelets ở mức j , vị trí (k,l) và ở chiều Ω (Ω có thể là HH, HL, LH). Mỗi hệ số wavelets cha có bốn con, đó là các hệ số wavelets ở mức $j+1$; $w_{2k,2l}^{j+1,\Omega}$, $w_{2k+1,2l}^{j+1,\Omega}$, $w_{2k,2l+1}^{j+1,\Omega}$ và $w_{2k+1,2l+1}^{j+1,\Omega}$, có cùng chiều với $w_{k,l}^{j,\Omega}$. Các hệ số trên đường đi từ $w_{k,l}^{j,\Omega}$ đến nút

gốc được gọi là các tổ tiên của $w_{k,l}^{j,\Omega}$, các hệ số trên đường đi từ $w_{k,l}^{j,\Omega}$ đến các nút lá được gọi là các con cháu của $w_{k,l}^{j,\Omega}$. Cho $S_{k,l}^j$ là một cây con bao gồm các hệ số có tọa độ (k,l) thuộc ba chiều HH, HL, LH ở mức j cùng với các hệ số của các con của nó. Trong nén ảnh fractal trên các hệ số wavelets chúng ta sẽ xấp xỉ các cây con này với các cây con ở mức thấp hơn, như minh hoạ ở hình 3, chúng ta gọi đây là phép biến đổi IFS-wavelets.



Hình 3. Sự xấp xỉ của các cây con

Ở wavelets Haar, mỗi cây con $S_{k,l}^j$ sẽ tương ứng với các khối có kích thước là $2^{N-j} \times 2^{N-j}$ của ảnh có kích thước $2^N \times 2^N$ với với góc trên trái tại $(k2^{N-j}, l2^{N-j})$. Bây giờ chúng ta khảo sát các hành vi được áp dụng trên các cây con này tương ứng với các hành vi áp dụng trên các khối con ở mã hoá fractal. Thao tác đầu tiên đó là cắt các lá của cây và dịch phần còn lại đến mức cao hơn; thao tác này tương tự như thao tác average-and-subsample, nó sẽ làm cho chiều cao của cây giảm đi một (hình 4).



Hình 4. Cắt các nút lá của cây và dịch chuyển đến mức cao hơn

Thao tác thứ hai là isometry: Cây con tương ứng với isometry của một khối con của ảnh, có thể tìm được từ cây con tương ứng với khối con của ảnh bằng cách:

- Thực hiện cùng isometry của ảnh trên tất cả các mức của cây con
- Hoán đổi giữa các subband HL và LH (khi isometry là quay quanh đường chéo chính hoặc quay 90 độ)
- Đổi dấu các hệ số của các subband nếu cần thiết.

Các isometry biến một subband R có kích thước $r \times r$ thành subband R' có dạng như sau:

$$\text{Subband R} \xrightarrow{\text{isometries}} \text{Subband R'}$$

- Quay 90 độ: $R'[i,j]=R[j,r-i-1]$
- Quay 180 độ: $R'[i,j]=R[r-i-1,r-j-1]$

- Quay 270 độ: $R'[i,j]=R[r-j-1,i]$
- Quay quanh trục x: $R'[i,j]=R[r-i-1,j]$
- Quay quanh trục y: $R'[i,j]=R[i,r-j-1]$
- Quay quanh đường chéo chính: $R'[i,j]=R[j,i]$
- Quay quanh đường chéo phụ: $R'[i,j]=R[r-j-1,r-i-1]$

Phép biến đổi IFS-wavelets 2 chiều yêu cầu ánh xạ các cây cha của các hệ số wavelets thành các cây con thấp hơn. Đầu tiên cần phải xác định các mức cha và mức con, giả sử là j_1 và j_2 , với $j_1 < j_2$. Sau đó ứng với mỗi cây con $S_{k,l}^{j_2}$, với $0 \leq k,l \leq 2^{j_2} - 1$, chúng ta định nghĩa một phép biến đổi:

$$P_{kl}: S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rightarrow \hat{S}_{k,l}^{j_2}, \hat{S}_{k,l}^{j_2} = g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1}$$

g_{kl} : là hệ số co giãn

\hat{A} : là phép cắt các lá và dịch cây con

\hat{L}_i : là phép isometry

$\pi(k,l)=(k',l')$: tọa độ của các cây con ở mức j_1 . sao cho $d(S_{k,l}^{j_2}, g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1})$ có giá trị nhỏ nhất.

Gọi biến đổi M là tập của các biến đổi P_{kl} .

Cho $I \in L^2(X)$ là một ảnh đích và $G \in L^2(N)$ là sự mở rộng wavelets của nó. Chúng ta sẽ tìm xấp xỉ G bởi \bar{G} của phép biến đổi co IFS-wavelets M .

Từ định lý Collage[5], việc xấp xỉ này đòi hỏi phải tối thiểu hoá khoảng cách giữa các cây con. Khoảng cách này có thể được tính theo các công thức sau:

- a) $d = \sum_{kl} d_{kl}$
- b) $d = \sqrt{\sum_{kl} d_{kl}^2}$
- c) $d = \sqrt[N]{\sum_{kl} d_{kl}^N}$
- d) $d = \max_{kl} d_{kl}$

với $d_{kl} = d(\hat{S}_{k,l}^{j_2}, S_{k,l}^{j_2})$, $0 \leq k,l \leq 2^{j_2} - 1$. Để đơn giản chúng ta có thể chọn $d = \max_{kl} d_{kl}$.

Chúng ta cần phải tìm ánh xạ π để cho khoảng cách d_{kl} là tối thiểu. Kết quả tối ưu đạt được khi sự tối thiểu hoá được thực hiện với tất cả những bộ (k',l') có thể có, với $0 \leq k',l' \leq 2^{j_1} - 1$.

Việc tìm kiếm cây cha cần xấp xỉ có thể được thực hiện theo ba cách sau:

- Chọn cây chứa cây con là cây cha cần xấp xỉ
- Tìm kiếm cây cha cần xấp xỉ trong một tập các cây cha thoả mãn một số tính chất nào đó
- Tìm kiếm đầy đủ trên tất cả các cây cha có thể có.

Dễ dàng thấy rằng, khi đi từ trên xuống thì chi phí tính toán và mã hoá sẽ tăng, nhưng nó lại cho độ chính xác cao hơn.

Trong các ứng dụng thực tế để tránh cho việc tính toán phức tạp, khoảng cách d_{kl} có thể được tính theo công thức sau:

$$d_{kl}^2 = \langle S_{k,l}^{j_2} - \hat{S}_{k,l}^{j_2}, S_{k,l}^{j_2} - \hat{S}_{k,l}^{j_2} \rangle \\ = \langle S_{k,l}^{j_2} - g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1}, S_{k,l}^{j_2} - g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle$$

$$= \langle S_{k,l}^{j_2}, S_{k,l}^{j_2} \rangle - 2 \langle S_{k,l}^{j_2}, g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle + \langle g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1}, g_{kl} \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle$$

với $\langle S_{k,l}^{j_2}, \hat{S}_{k,l}^{j_2} \rangle = \sum_{\Omega} \sum_{j=0}^{h-1} \sum_{u=2^j k}^{2^j k + 2^j - 1} \sum_{v=2^j l}^{2^j l + 2^j - 1} w_{u,v}^{j,\Omega} \cdot \hat{w}_{u,v}^{j,\Omega}$; h là chiều cao của cây; $w_{u,v}^{j,\Omega}$ là hệ số wavelets

thuộc cây con $S_{k,l}^{j_2}$; $\hat{w}_{u,v}^{j,\Omega}$ là hệ số wavelets thuộc cây con $\hat{S}_{k,l}^{j_2}$

Lúc đó hệ số g_{kl} tối ưu là:

$$g_{kl}^{opt} = \frac{\langle S_{k,l}^{j_2}, \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle}{\langle \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1}, \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle}$$

và giá trị d_{kl}^2 lúc đó sẽ là:

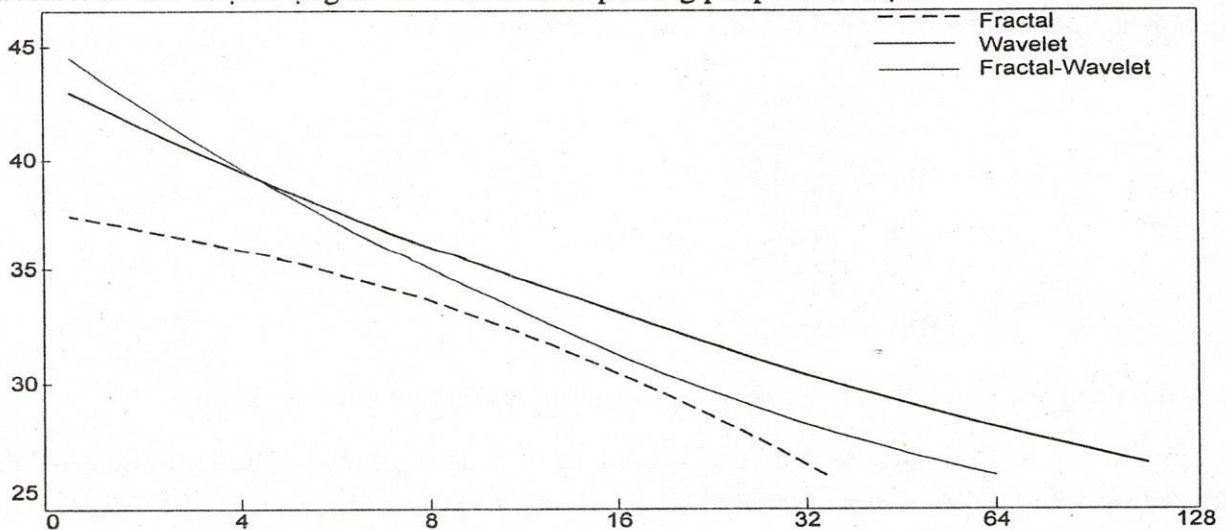
$$d_{kl}^2 = \langle S_{k,l}^{j_2}, S_{k,l}^{j_2} \rangle - g_{kl}^{opt} \langle S_{k,l}^{j_2}, \hat{L}_i \hat{A} S_{\pi(k,l)}^{j_1} \rangle$$

Chúng ta sẽ lưu ảnh nén bằng cách lưu các thông số sau:

- Cặp các mức xấp xỉ (j_1, j_2)
- Các hệ số wavelets ở mức j_2-1
- Các hệ số g_{kl} , isometry i và các giá trị của $\pi(k,l)$ ứng với mỗi bộ giá trị (k,l).

3. CÁC KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

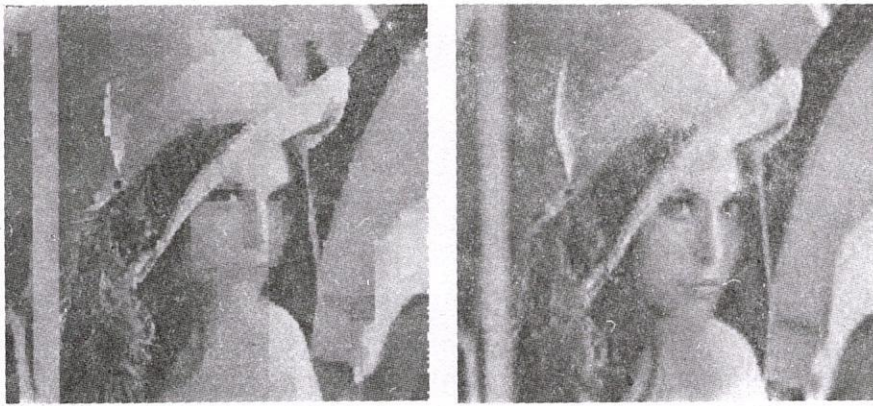
Áp dụng phương pháp mã hoá này, sẽ cho ra tỷ số nén rất cao với chất lượng ảnh tốt hơn so với một số phương pháp khác. Các hệ số thuộc vùng tần số thấp sau khi thực hiện biến đổi wavelets có thể được lượng tử và mã hoá theo phương pháp mã số học.



Hình 5. Minh hoạ quan hệ giữa PSNR và tỷ số nén của 3 phương pháp.

Hình 5 minh hoạ sự so sánh của các phương pháp mã hóa dựa trên hàm PSNR và tỷ số nén. Đường dưới cùng được xây dựng dựa trên phương pháp nén chỉ fractal[5], với phương pháp này khi tỷ số nén càng cao thì PSNR sẽ giảm đi rất nhanh, chất lượng ảnh sẽ bị giảm đi rất nhiều. Đường thứ hai được xây dựng dựa trên phương pháp nén wavelets. Đường thứ ba được xây dựng dựa trên phương pháp nén fractal kết hợp với biến đổi wavelets. Theo phương pháp này thì khi tỷ số nén càng cao, chất lượng của ảnh sẽ càng tốt hơn so với phương pháp wavelets ở cùng tỷ số.

Dưới đây là ảnh có kích thước 512x512 có mức xám là 256 được nén và giải nén sử dụng phương pháp này so với phương pháp mã fractal.



Hình 6. a) Ảnh Lena 512x512 được nén ở tỷ số 60.6:1 (PSNR=24.9) bằng giải thuật nén fractal; b) Ảnh phải được nén ở tỷ số 99:1 (PSNR=26.375) bằng thuật giải fractal trên các hệ số wavelets

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày một phương pháp nén ảnh tĩnh fractal trên các hệ số của biến đổi wavelets. Ở đây tính tự tương tự các cây con của hệ số wavelets ở các mức được sử dụng, và xấp xỉ các cây con này bằng phương pháp fractal. Kỹ thuật này cho tỷ số nén rất cao với chất lượng ảnh tương đối tốt. Tuy nhiên một nhược điểm là thời gian nén còn lớn. Trong tương lai có thể cải tiến phương pháp tối ưu hoá (dùng kỹ thuật heuristic chẳng hạn), cũng như kỹ thuật xử lý song song để giảm thời gian nén; đồng thời xem xét bài toán nén ảnh video để có thể đưa vào các ứng dụng thời gian thực.

FRACTAL IMAGE COMPRESSION BASED ON COEFFICIENTS OF WAVELET TRANSFORM

Nguyen Huu Anh, Huynh Trung Hieu

ABSTRACT: *This paper presents an image coding technique that combines properties of fractal coders and wavelet transforms, where self-similarities among wavelet subtrees are used for representing similar regions at different resolutions in the image. The highpass filter coefficients are coded by fractal method, the lowpass filter coefficients are coded through in a near lossless manner, and consequently we achieved good image compression quality at very high compression ratios.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M.F. Barnsley and S. Demko, "Iterated Function Systems and Global Construction of Fractals", Proc. Royal Society of London, Vol. A999, pp.243-275, 1985.
- [2] A. Jacquin, "Image Coding Based on a Fractal Theory of Iterated Contractive Image Transformations", in IEEE Trans. Image Proc., 1992 Jan.

- [3] R. A. Wannamaker and E. R. Vrscay, "Fractal Wavelet Compression of Audio Signals", J. Audio Eng. Soc., vol. 45, pp. 540-553, 1997.
- [4] B. Wohlberg and G. de Jager, "A Review of the Fractal Image Coding", in IEEE Trans. Image Proc., Vol. 8, No. 12, pp. 1716-1729, 1999 Dec.
- [5] Yuval Fisher, "Fractal Compression: Theory and Application to Digital Images", Springer Verlag, New York, 1994
- [6] Charles K. Chui, "An Introduction to Wavelet", Academic Press, New York, 1992.
- [7] S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Presentation", in IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intell., Vol. 11, No.7, pp.674-693, 1989 Jul.
- [8] Randy K. Young, "Wavelet Theory and Its Applications", Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [9] Donald B. Percival and Andrew T. Walden, "Wavelet Method for Time Series Analysis", Cambridge University Press, 2000.
- [10] Seihaku Higuchi, Huynh Trung Hieu, "Fractal-Wavelet Image Compression", Research Report, Osaka Sangyo University, 2002 March.