

# TỐI ƯU HOÁ KẾT CẤU BẰNG PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ TUYẾN TÍNH

Nguyễn Tam Hùng  
Trường ĐH Giao thông vận tải TP. HCM  
(Bài nhận ngày 06 tháng 10 năm 2003)

**TÓM TẮT:** Bài báo này mô tả phương pháp tối ưu toán học mà có thể giải một lớp lớn các bài toán về tối ưu hoá kết cấu. Phương pháp này sử dụng các biến nghịch đảo để xấp xỉ bậc nhất hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc.

Bằng cách tiếp cận này, bài toán ban đầu được thay thế bằng một chuỗi các bài toán con tương minh. Mỗi bài toán con là bài toán lồi và tách biệt nên có thể giải một cách hiệu quả bằng việc sử dụng dạng đối ngẫu.

Trong phạm vi bài viết, phương pháp này được áp dụng vào việc tối ưu hóa tiết diện thanh của hệ dàn với hình học cố định và được tổng quát hóa cho trường hợp tối ưu hóa tiết diện thanh, tọa độ nút dàn với hình học không được cố định.

## 1. Giới thiệu

Thiết kế tối ưu hóa kết cấu là bài toán tìm kết cấu tốt nhất chịu được các tải trọng cho trước. Để giải quyết vấn đề này theo phương pháp toán học, chúng ta có thể tìm lời giải trong ba nhóm kết cấu sau:

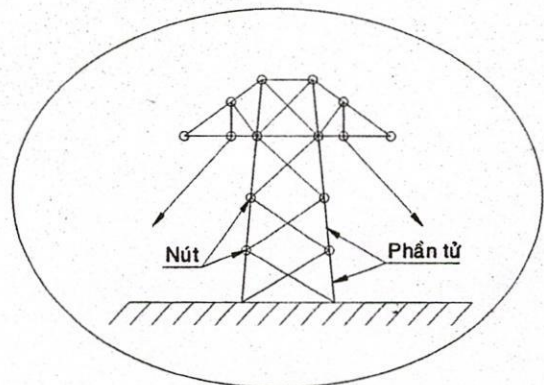
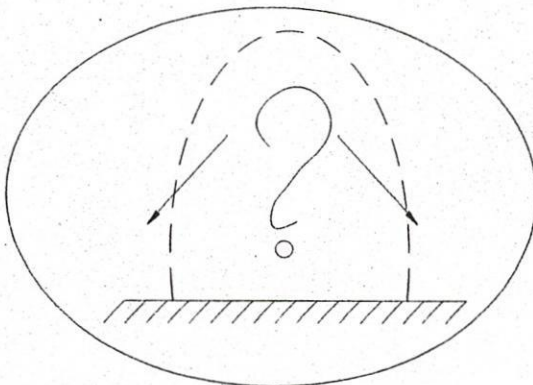
**Nhóm 1**  $S_1$  : là tập hợp tất cả các kết cấu thỏa mãn yêu cầu ban đầu

**Nhóm 2**  $S_2$  : là tập hợp các kết cấu có cách kết nối giữa các nút và vật liệu cho trước. Nghĩa là với kết cấu này, chúng ta tìm tọa độ các nút và diện tích mặt cắt ngang các phần tử sao cho tổng khối lượng kết cấu nhỏ nhất.

**Nhóm 3**  $S_3$  : là tập hợp các kết cấu có cách kết nối giữa các nút, tọa độ nút và vật liệu cho trước. Nghĩa là chúng ta chỉ tìm diện tích mặt cắt ngang các phần tử sao cho tổng khối lượng kết cấu nhỏ nhất

Chúng ta nhận thấy rằng  $S_1 \supset S_2 \supset S_3$  và mức độ khó của bài toán theo thứ tự giảm dần. Ở đây chúng ta chỉ xem xét nhóm 2, tức là bài toán tối ưu hóa tổng khối lượng kết cấu chịu những giới hạn định trước trên chuyển vị và ứng suất dưới nhiều trường hợp tải trọng, với cách kết nối giữa các nút phần tử và vật liệu cho trước

Ý tưởng chính trong cách giải quyết của chúng ta là tuyến tính hoá lồi hàm mục tiêu và các ràng buộc, sau đó áp dụng lý thuyết đối ngẫu cho bài toán tối ưu lồi.



Thiết kế ý tưởng



## 2. Phát biểu bài toán tối ưu

Chúng ta xem xét bài toán tối ưu tổng khối lượng của hệ dàn chịu :

- Ràng buộc chuyển vị
- Ràng buộc ứng suất
- Ràng buộc ổn định

dưới nhiều trường hợp tải trọng. Có hai loại biến trong bài toán này

- Diện tích mặt cắt ngang của phần tử
- Tọa độ các nút

Kết cấu có thể đối xứng theo phương nào đó, do đó trong trường hợp tổng quát các biến không thể độc lập với những biến khác. Một số biến (biến diện tích mặt cắt ngang hay biến tọa độ nút) có thể bị cố định ngay từ đầu. Những giới hạn này có thể được biểu diễn bằng các quan hệ tuyến tính giữa các biến.

Bài toán tối ưu có thể được phát biểu dưới dạng toán học như sau:

$$\begin{aligned}
 \text{P:} & \quad \min w(x,c) \\
 \text{Chịu các ràng buộc:} & \quad d_i(x,c) \leq d_i & \quad i = 1, \dots, m_d \\
 & \quad \sigma_i(x,c) \leq \sigma_i & \quad i = 1, \dots, m_s \\
 & \quad b_i(x,c) \leq 0 & \quad i = 1, \dots, m_b \\
 & \quad A_c^x = h \\
 & \quad x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} & \quad j = 1, \dots, \text{kelem} \\
 & \quad c_j^{\min} \leq c_j \leq c_j^{\max} & \quad j = 1, \dots, 3*\text{knode}
 \end{aligned}$$

Trong đó:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{\text{kelem}})^T$	: vector các biến diện tích
kelem	: tổng các phần tử
$x_j$	: diện tích mặt cắt ngang thứ j
$c = (c_1, c_2, \dots, c_{\text{kelem}})^T$	: vector các biến tọa độ
knode	: tổng các nút, mỗi nút có 3 tọa độ
$w(x,c)$	: tổng khối lượng của kết cấu
$d_i(x,c)$	: chuyển vị của nút theo hướng cho trước dưới tải trọng cho trước hay tổ hợp tuyến tính những chuyển vị đó
$\sigma_i(x,c)$	: ứng suất trong phần tử dưới tải trọng cho trước (kéo hoặc nén)
$b_i(x,c)$	: ràng buộc ổn định của phần tử dưới tải trọng cho trước
$A_c^x = h$	: ràng buộc tuyến tính đảm bảo kết cấu đối xứng hay các nút có tọa độ cho trước, ... (A là ma trận và h là vector cho trước)
$x_j^{\min}, x_j^{\max}, c_j^{\min}, c_j^{\max}$	: cận dưới và cận trên của các biến
$d_i^{\max}$	: giá trị cho phép của chuyển vị $d_i(x,c)$
$\sigma_i^{\max}$	: giá trị cho phép của ứng suất $\sigma_i(x,c)$

P là bài toán tối ưu phi tuyến. Các hàm số  $\sigma_i(x,c)$ ,  $d_i(x,c)$ ,  $b_i(x,c)$  không cho trước một cách tường minh. Với các giá trị cho trước của các biến x và c, chúng ta có thể tính được các giá trị của hàm số trên theo phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Các tính toán theo FEM thường mất rất nhiều thời gian, đặc biệt khi gặp bài toán lớn, do đó phải tìm phương pháp tối ưu sử dụng càng ít các tính toán này càng tốt.



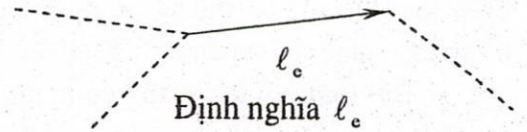
### 3. Gradient của các hàm ràng buộc

Tính chất quan trọng của các hàm ràng buộc  $\sigma_i(x, c), d_i(x, c), b_i(x, c)$  là các gradient của chúng được xác định mà không mất thêm quá nhiều công sức một khi giá trị của chúng được xác định bằng FEM. Trước khi tính các gradient của các ràng buộc, chúng ta có thể biểu diễn hàm mục tiêu như sau:

$$w(x, c) = \rho \sum_{e=1}^{kelem} x_e \|l_e\|$$

trong đó

- $\rho$  : khối lượng riêng của vật liệu cho trước
- $x_e$  : diện tích mặt cắt ngang của phần tử thứ e
- $l_e$  : là vector liên kết hai nút của phần tử thứ e
- $\|l_e\|$  : chiều dài phần tử thứ e



#### 3.1 Gradient của hàm ràng buộc chuyển vị

Xem xét ràng buộc chuyển vị  $d_i(x, c) \leq d_i^{max}$  tại điểm cho trước  $(x, c)$ . Chúng ta cần một số định nghĩa

$p$  : là vector chứa các ngoại lực ứng với trường hợp tải trọng cho trước  $p \in R^{3 \cdot knode}$

$u$  : là vector chuyển vị nút theo hướng cho trước ứng với trường hợp tải trọng cho trước  $u \in R^{3 \cdot knode}$

$K$  : ma trận độ cứng của kết cấu – ma trận đối xứng và xác định dương

Theo FEM chúng ta có quan hệ:  $Ku = p$  (1)

Đổi biến  $\xi$  đại diện cho các biến  $x$  và  $c$ ,  $\xi = x$  hay  $\xi = c$

Lấy đạo hàm phương trình (1) đối với  $\xi$

$$u \frac{\partial K}{\partial \xi} + K \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = K^{-1} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} - u \frac{\partial K}{\partial \xi} \right) \quad (3)$$

Giả sử rằng  $p$  là độc lập với  $x_j$  và  $c_j$ , vì thế  $\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$

Phương trình (3) có thể rút gọn: 
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -K^{-1} \left( u \frac{\partial K}{\partial \xi} \right) \quad (4)$$

Ma trận độ cứng của phần tử thanh trong hệ tọa độ toàn cục :

$$\underline{K}_e^c = \begin{bmatrix} \tilde{K}_e & -\tilde{K}_e \\ -\tilde{K}_e & \tilde{K}_e \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad \tilde{K}_e = \frac{E x_e}{\|l_e\|^3} l_e l_e^T \quad (5)$$

trong đó  $E$  là module đàn hồi của vật liệu là hằng số cho trước

Từ (5) chúng ta có: 
$$\frac{\partial K_e}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e} K_e \quad \text{nếu } j = e \quad (6)$$

$$= [0] \quad \text{nếu } j \neq e, \quad [0] \text{ là ma trận zero}$$

$$\frac{\partial K_e}{\partial c_e} = E x_e \left( \frac{-3 \partial \|l_e\|}{\|l_e\|^4 \partial c_j} l_e l_e^T + \frac{1}{\|l_e\|^3} \frac{\partial l_e}{\partial c_j} l_e^T + \frac{1}{\|l_e\|^3} l_e \frac{\partial l_e^T}{\partial c_j} \right) \quad (7)$$



Nhận thấy rằng  $\frac{\partial K_e}{\partial c_j} \neq 0$  chỉ nếu  $c_j$  đại diện cho tọa độ của một trong hai nút của phần tử thứ

e. Tức là  $\frac{\partial K_e}{\partial c_j} = 0$  đối với phần lớn các chỉ j

**3.2 Gradient của hàm ràng buộc ứng suất**

Ứng suất có thể được tính trực tiếp từ:  $\sigma = \underline{S} \underline{u}$  (8)

Đạo hàm  $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}$  theo các biến  $x_j$   $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = \underline{S} \frac{\partial u}{\partial x_j}$  (9)

trong đó  $\underline{S}$  là ma trận độc lập với  $x_j$ , vì thế đạo hàm  $\underline{S}$  đối với  $x_j$  bằng [0]

Tương tự chúng ta có thể đạo hàm  $\frac{\partial \sigma}{\partial c_j}$  theo các biến  $c_j$   $\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = \underline{S} \frac{\partial u}{\partial c_j} + \frac{\partial \underline{S}}{\partial c_j} \underline{u}$  (10)

trong đó  $\frac{\partial \underline{S}}{\partial c_j}$  không bằng [0]

Từ lý thuyết FEM, chúng ta có

$$\underline{S} = [\underline{S}_1 \ \underline{S}_2 \ \dots \ \underline{S}_n]^T \quad \text{với} \quad \underline{S}_i = \frac{E}{\ell_i} [1 \ -1]^T \underline{T}_i \underline{b}_i \underline{a}_i$$

vì vậy  $\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = \left[ \frac{\partial \underline{S}_1}{\partial c_j} \ \frac{\partial \underline{S}_2}{\partial c_j} \ \dots \ \frac{\partial \underline{S}_n}{\partial c_j} \right]^T$  với  $\frac{\partial \underline{S}_i}{\partial c_j} = \frac{\partial \left\{ \frac{E}{\ell_i} [1 \ -1]^T \underline{T}_i \right\}}{\partial c_j} \underline{b}_i \underline{a}_i$

Do  $\underline{b}_i$  và  $\underline{a}_i$  là các ma trận hằng số

**3.3 Gradient của hàm ràng buộc về ổn định**

Giả sử  $\sigma_e$  là ứng suất nén trong phần tử thứ e dưới trường hợp tải trọng cho trước. Ràng

bộộc ổn định có thể viết như sau:  $b_e = \frac{\sigma_e}{E} - k \frac{x_e}{\|\ell_e\|^2} \leq 0$

trong đó k là hằng số phụ thuộc vào hình dạng mặt cắt (nếu mặt cắt là hình tròn thì  $k = \frac{\pi}{4}$ )

Chúng ta có:  $\frac{\partial b_e}{\partial \xi} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \xi} - \frac{k}{\|\ell_e\|^2} \frac{\partial x_e}{\partial \xi} + \frac{2kx_e}{\|\ell_e\|^3} \frac{\partial \|\ell_e\|}{\partial \xi}$

$\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \xi}$  được tính theo công thức trên

$\frac{k}{\|\ell_e\|^2} \frac{\partial x_e}{\partial \xi}$  không bằng 0 chỉ nếu  $\xi = x_e$  và lúc đó  $\frac{\partial x_e}{\partial \xi} = 1$

$\frac{2kx_e}{\|\ell_e\|^3} \frac{\partial \|\ell_e\|}{\partial \xi}$  không bằng 0 chỉ nếu  $\xi = c_j$  và lúc đó  $\frac{\partial \|\ell_e\|}{\partial \xi}$  dễ xác định

**3.4 Các ràng buộc độc lập**

Trong phần này chúng ta xem xét ràng buộc  $A(c, x) = h$ . Chúng ta không xét đến trường hợp tổng quát và chỉ xét trường hợp các biến có thể chia thành các nhóm riêng biệt sao cho tất cả các biến trong nhóm có thể biểu diễn tuyến tính đối với một biến thuộc nhóm đó. Giả sử

$J_x = \{1, \dots, kelem\}$  là nhóm chỉ số các biến diện tích

$J_c = \{1, \dots, 3 * knode\}$  là nhóm chỉ số các biến tọa độ nút

$J_x(j)$  = là nhóm chỉ số của nhóm thứ  $j$  của các biến diện tích  $j = 0, 1, \dots, n_x$

$J_c(j)$  = là nhóm chỉ số của nhóm thứ  $j$  của các biến tọa độ nút  $j = 0, 1, \dots, n_c$

Chúng thỏa mãn

$$J_x(0) \cap J_x(1) \cap \dots \cap J_x(n_x) = J_x$$

$$J_c(0) \cap J_c(1) \cap \dots \cap J_c(n_c) = J_c$$

$$J_x(i) \cap J_x(j) = 0 \quad \text{nếu } i \neq j$$

$$J_c(i) \cap J_c(j) = 0 \quad \text{nếu } i \neq j$$

Bây giờ chúng ta giả sử rằng  $x_{e0}^*, x_{e1}^*, c_{v0}^*, c_{v1}^*$  là hằng số cho tất cả  $e \in J_x$  và  $v \in J_c$

$$x_e = x_{e0}^* \quad \text{với } e \in J_x(0) \quad (11)$$

$$x_e = x_{e0}^* + \alpha_j x_{e1}^* \quad \text{với } e \in J_x(j), j = 1, \dots, n_x \quad (12)$$

$$c_v = c_{v0}^* \quad \text{với } v \in J_c(0) \quad (13)$$

$$c_v = c_{v0}^* + \gamma_j c_{v1}^* \quad \text{với } v \in J_c(j), j = 1, \dots, n_c \quad (14)$$

trong đó  $\alpha_j$  và  $\gamma_j$  là những biến độc lập mới

Bài toán tối ưu khối lượng bây giờ được thiết lập theo các biến  $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_x})^T$  và

$\gamma = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n_c})^T$  thay vì các biến  $x, c$ . Vì thế các ràng buộc tuyến tính  $A(c, x) = h$  biến mất.

Gradient hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc đối với các biến  $\alpha$  và  $\gamma$  được xác định dưới

đây với  $f$  đại diện cho các hàm số  $w, d_i, \sigma_i$  và  $b_i$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = \sum_{e \in J_x(j)} \frac{\partial f}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial \alpha_j} = \sum_{e \in J_x(j)} \frac{\partial f}{\partial x_e} \bar{x}_{e1} \quad j = 1, \dots, n_x \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma_j} = \sum_{v \in J_c(j)} \frac{\partial f}{\partial c_v} \frac{\partial c_v}{\partial \gamma_j} = \sum_{v \in J_c(j)} \frac{\partial f}{\partial c_v} \bar{c}_{v1} \quad j = 1, \dots, n_c \quad (17)$$

Từ bây giờ, chúng ta xem xét bài toán P theo dạng dưới đây

P:  $\min w(\alpha, \gamma)$

Chịu các ràng buộc  $d_i(\alpha, \gamma) \leq d_i^{\max} \quad i = 1, \dots, m_d$

$$\sigma_i(\alpha, \gamma) \leq \sigma_i^{\max} \quad i = 1, \dots, m_\sigma$$

$$b_i(\alpha, \gamma) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_b$$

$$\alpha_j^{\min} \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{\max} \quad i = 1, \dots, n_x$$

$$\gamma_j^{\min} \leq \gamma_j \leq \gamma_j^{\max} \quad i = 1, \dots, n_c$$

trong đó các ràng buộc  $\{\alpha_j^{\min}, \alpha_j^{\max}\}_{j=1}^{n_x}$  và  $\{\gamma_j^{\min}, \gamma_j^{\max}\}_{j=1}^{n_c}$  dễ dàng tính được từ các hằng số đã biết

$$\{x_j^{\min}, x_j^{\max}, x_{j0}^*, x_{j1}^*\}_{j=1}^{kelem} \quad \text{và} \quad \{c_j^{\min}, c_j^{\max}, c_{j0}^*, c_{j1}^*\}_{j=1}^{3knode}$$

#### 4. Phương pháp giải bài toán tối ưu

Như đã trình bày trong phần trước, gradient của hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc đối với các biến  $\alpha$  và  $\gamma$  dễ dàng được tính toán một khi các hàm này được tính bằng FEM.

Chúng ta mong muốn tìm được  $\alpha$  và  $\gamma$  gần với lời giải tối ưu càng nhiều càng tốt sau mỗi sau mỗi tính toán FEM. Cách tiếp cận tự nhiên là giải các bài toán con sau mỗi tính toán FEM. Mỗi bài toán con là sự xấp xỉ của bài toán ban đầu dựa trên các thông tin gradient mà chúng ta có thể tính nó dễ dàng.



Chúng ta có thể xấp xỉ tuyến tính cả hai hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc, sau đó giải bài toán tối ưu hoá tuyến tính. Tuy nhiên nếu hình học được cố định hay  $\gamma$  cố định thì chúng ta có thể đạt được sự xấp xỉ tốt hơn nếu xấp xỉ tuyến tính các hàm ràng buộc theo các biến nghịch đảo  $\frac{1}{\alpha_j}$ , trong khi xấp xỉ hàm mục tiêu theo biến  $\alpha_j$ . Mặc dù bài toán con tương ứng không tuyến tính nhưng có thể giải chúng một cách hiệu quả bằng phương pháp đối ngẫu của tối ưu lồi.

Chúng ta có thể tổng quát hóa nhận xét trên với một ít thay đổi khi hình học không bị cố định tức là  $\gamma$  thay đổi.

**4.1 Tiếp cận bài toán tổng quát**

Bài toán P có thể viết lại

P: 
$$\min w(\alpha, \gamma)$$
 Chịu các ràng buộc 
$$g_i(\alpha, \gamma) \leq 0 \quad \text{với } i = 1, \dots, m = m_d + m_\sigma + m_b$$

$$\alpha_j^{\min} \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{\max} \quad \text{với } j = 1, \dots, n_x$$

$$\gamma_j^{\min} \leq \gamma_j \leq \gamma_j^{\max} \quad \text{với } j = 1, \dots, n_c$$

Cách tiếp cận tổng quát của bài toán này được thể hiện qua sơ đồ dưới (4.1)

Mục đích của việc đưa ra thông số  $h_j^{(k)}$  là để ổn định thuật toán bằng việc đảm bảo rằng  $\gamma_j^{(k+1)}$  nằm trong khoảng định trước xung quanh  $\gamma_j^{(k)}$ . Điều này cũng thỏa mãn  $\frac{1}{2}\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq 2\alpha_j^{(k)}$ .  $h_j^{(k)}$  được chọn sao cho  $h_j^{(k)} \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ , nhưng  $h_j^{(k)}$  không được tiến quá nhanh đến zero, nghĩa là  $\{\alpha_j^{(k)} \gamma_j^{(k)}\}_{k=1}^\infty$  tiệm cận đến lời giải không tối ưu của P. Vì thế chúng ta cần có  $\sum_{j=1}^\infty h_j^{(k)} = \infty$ . Sự chọn lựa đơn giản là  $h_j^{(k)} = \frac{C_j}{k + D_j}$ , trong đó  $C_j$  và  $D_j$  là những hằng số.

Bây giờ chúng ta xấp xỉ hàm mục tiêu như sau

$$w(\alpha, \gamma) \cong w^{(k)}(\alpha, \gamma) = w(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} (\alpha_j - \alpha_j^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n_c} \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} (\gamma_j - \gamma_j^{(k)}) \quad (18)$$

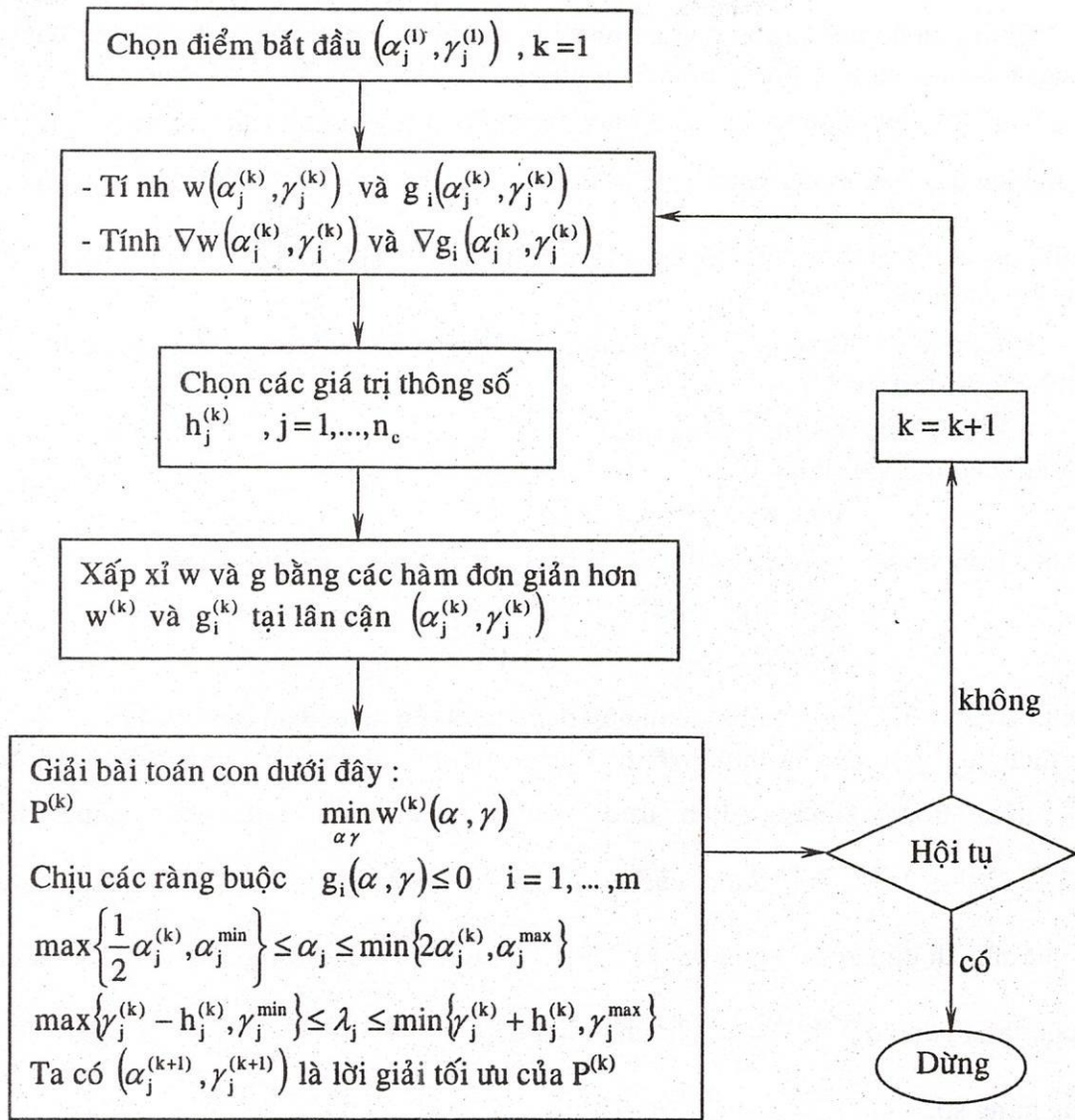
trong đó các đạo hàm được tính theo  $(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)})$ .

W là hàm tuyến tính theo  $\alpha$ : 
$$w(\alpha, \gamma) = w_0(\gamma) + \sum_{j=1}^{n_x} \nu_j(\gamma) \alpha_j \quad (19)$$

$w_0(\gamma)$  là khối lượng các phần tử có diện tích mặt cắt không thay đổi

Từ (19) chúng ta thấy  $\nu_j(\gamma^{(k)}) = \frac{\partial w}{\partial \alpha_j}$ , vì thế  $w(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}) = w_0^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(k)}$

trong đó  $w_0^{(k)} = w_0(\gamma^{(k)})$



Sơ đồ giải bài toán tối ưu hoá 4.1

Phương trình (18) có thể viết lại

$$w^{(k)}(\alpha, \gamma) = w_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n_c} \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} (\gamma_j - \gamma_j^{(k)}) \quad (20)$$

với 
$$s_j^{(k)} = \begin{cases} \theta h_j^{(k)} & \text{nếu } \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} \geq 0 \text{ tại } (\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}) \\ -\theta h_j^{(k)} & \text{nếu } \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} \leq 0 \text{ tại } (\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)}) \end{cases}$$

trong đó  $\theta$  là hằng số lớn hơn 1. Chúng ta có thể lấy  $\theta = 3$

Chúng ta có thể đưa ra các biến mới  $y$  và  $z$

$$y_j = \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j} \Leftrightarrow \alpha_j = \frac{\alpha_j^{(k)}}{y_j} \quad (21)$$

$$z_j = \frac{s_j^{(k)}}{(\gamma_j^{(k)} - \gamma_j + s_j^{(k)})} \Leftrightarrow \gamma_j = \gamma_j^{(k)} - s_j^{(k)} + \frac{s_j^{(k)}}{z_j} \quad (22)$$



Chúng ta có thể biểu diễn  $w^{(k)}$  theo các biến mới

$$w^{(k)}(y, z) = w_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{nx} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \left( \frac{\alpha_j^{(k)}}{y_j} \right) + \sum_{j=1}^{nc} \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} \right) s_j^{(k)} \left( \frac{1}{z_j} - 1 \right) \quad (23)$$

Các cận trên biến  $\alpha_j$ :  $\frac{1}{2} \alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j \leq 2 \alpha_j^{(k)}$  và  $\alpha_j^{\min} \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{\max}$

Sau khi chuyển sang biến  $y_j$  bởi (22), chúng ta có:  $\frac{1}{2} \leq y_j \leq 2$  và  $\frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\max}} \leq y_j \leq \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\min}}$

hay 
$$\max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\max}} \right\} \leq y_j \leq \min \left\{ 2, \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\min}} \right\}$$

Các cận trên biến  $\gamma_j$ :  $\max \{ \gamma_j^{\min}, \gamma_j^{(k)} - h_j^{(k)} \} \leq \gamma_j \leq \min \{ \gamma_j^{\max}, \gamma_j^{(k)} + h_j^{(k)} \}$

Khi chuyển chúng sang biến  $z_j$ :  $\frac{\theta}{\theta + \delta_j^+} \leq z_j \leq \frac{\theta}{\theta + \delta_j^-}$

Trong đó  $\delta_j^+ = \min \{ 1, \max \{ \delta_j^{\min}, \delta_j^{\max} \} \}$  và  $\delta_j^- = \max \{ -1, \min \{ \delta_j^{\min}, \delta_j^{\max} \} \}$

và  $\delta_j^{\min} = \theta \frac{(\gamma_j^{\min} - \gamma_j^{(k)})}{s_j^{(k)}}$  và  $\delta_j^{\max} = \theta \frac{(\gamma_j^{\max} - \gamma_j^{(k)})}{s_j^{(k)}}$

Để ý rằng  $\delta_j^{\min} \delta_j^{\max} \leq 0$ , nên  $\delta_j^+ \geq 0$  và  $\delta_j^- \leq 0$

Vì  $y_j \geq 0$ ,  $z_j \geq 0$  trong miền khả dĩ của  $y_j$ ,  $z_j$  và  $\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \alpha_j} \geq 0$ ,  $\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \gamma_j} s_j^{(k)} \geq 0$  nên dựa vào phương trình (23) chúng ta nhận thấy  $w^{(k)}$  là hàm lồi theo các biến  $y$  và  $z$ .

Bây giờ chúng ta sẽ tuyến tính hóa các hàm ràng buộc  $g_i (= d_i$  hay  $\sigma_i$  hay  $b_i)$  trong không gian  $(y, z)$ , ngược lại với hàm mục tiêu  $w$  là tuyến tính hoá trong không gian  $(\alpha, \gamma)$

$$g^{(k)}(y, z) = g_i(y^{(k)}, z^{(k)}) + \sum_{j=1}^{nx} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} (y_j - y_j^{(k)}) + \sum_{j=1}^{nc} \left( \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right) (z_j - z_j^{(k)})$$

Giả sử  $g_i^{(k)} = g_i(y^{(k)}, z^{(k)}) = g_i(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)})$

Từ (21) và (22) chúng ta thấy rằng  $\alpha_j = \alpha_j^{(k)}$  tương ứng với  $y_j = 1$  và  $\gamma_j = \gamma_j^{(k)}$  tương ứng  $z_j = 1$ . Vì vậy  $y_j^{(k)} = 1$  và  $z_j^{(k)} = 1$ .

Mặt khác 
$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_j} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} (-\alpha_j^{(k)}) \quad (26)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial z_j} = \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial z_j} = \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_j} (-s_j^{(k)}) \quad (27)$$

Bài toán con  $P^{(k)}$  có thể viết lại như sau:

$P^{(k)}$  : 
$$\min_{y, z} w_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{nx} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \left( \frac{\alpha_j^{(k)}}{y_j} \right) + \sum_{j=1}^{nc} \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} \right) s_j^{(k)} \left( \frac{1}{z_j} - 1 \right)$$

Chịu các ràng buộc 
$$g_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{nx} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} (y_j - 1) \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{nc} \left( \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_j} \right) (z_j - 1) s_j^{(k)} \leq 0$$

$$\max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\max}} \right\} \leq y_j \leq \min \left\{ 2, \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_j^{\min}} \right\}$$



$$\frac{\theta}{\theta + \delta_j^+} \leq z_j \leq \frac{\theta}{\theta + \delta_j^-}$$

Trong đó tất cả các đạo hàm được tính tại  $(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)})$

Việc đưa ra các biến mới  $y_j$  và  $z_j$  có một vài thuận lợi. Thứ nhất, các bài toán con bây giờ ở dạng hoàn toàn thích hợp cho việc áp dụng tối ưu hóa đối ngẫu lồi. Thứ hai, nếu chúng ta chọn dạng bài toán  $P^{(k)}$  mà cả hai hàm mục tiêu và hàm ràng buộc là tuyến tính thì lời giải tối ưu của  $P^{(k)}$  là sẽ ở trên biên các vùng giới hạn của biến, vì vậy rất khó khăn quyết định khi nào sự hội tụ xảy ra. Bây giờ với hàm mục tiêu lồi nghiêm ngặt các vùng giới hạn trên biến hầu như không còn cần thiết nữa trong các vòng lặp cuối và quá trình hội tụ được thiết lập dựa theo bổ đề dưới đây

**Bổ đề 1**

Nếu bài toán con có lời giải tối ưu  $y_j$  với  $j = 1, \dots, n_x$  và  $z_j$  với  $j = 1, \dots, n_c$  thì  $(\alpha^{(k)}, \gamma^{(k)})$  là điểm Kuhn-Tucker (hầu như là điểm cực trị địa phương) của bài toán P ban đầu

**4.2 Sử dụng sự đối ngẫu để giải các bài toán con**

Bài toán con  $P^{(k)}$  là bài toán tối ưu lồi. Nếu chúng ta bỏ qua các  $\frac{\partial w}{\partial \gamma_j} = 0$  với một vài  $j$  thì

chúng ta có thể phát biểu bài toán con  $P^{(k)}$  là bài toán tối ưu lồi nghiêm ngặt, vì hàm mục tiêu là lồi nghiêm ngặt trên  $(y, z)$  và các hàm ràng buộc là tuyến tính.

Sau khi loại bỏ các hằng số từ hàm mục tiêu, bài toán con  $P^{(k)}$  có thể viết lại :

$P^{(k)}$  : 
$$\min_x \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j}$$

Chịu các ràng buộc 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}\}$$

trong đó  $n = n_x + n_c$  và  $m = m_d + m_\sigma + m_b$

$c_j, a_{ij}, b_j, x_j^{\min}, x_j^{\max}$  là những hằng số đã biết

$$c_j = \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(k)} \quad j = 1, \dots, n_x$$

$$c_j = \frac{\partial w}{\partial \gamma_j} s_j^{(k)} \quad j = n_x+1, \dots, n = n_x+n_c$$

$$a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T$$

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(k)} \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n_x$$

$$a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_j} s_j^{(k)} \quad i = 1, \dots, m ; j = n_x+1, \dots, n = n_x+n_c$$

$$b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T$$

$$b_i = -g_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(k)} + \sum_{j=n_x+1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_j} s_j^{(k)} \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$$

$$x_j = y_j \quad j = 1, \dots, n_x$$

$$x_j = z_{j-n_x} \quad j = n_x+1, \dots, n = n_x+n_c$$

Áp dụng lý thuyết đối ngẫu cho bài toán tối ưu lồi, chúng ta có hàm mục tiêu đối ngẫu

$$\Phi(\lambda) = L(x(\lambda), \lambda) = \sum_j \left( \frac{c_j}{x_j(\lambda)} + x_j(\lambda) \lambda^T a_j \right) - \lambda^T b$$

với  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^T$

$$(*) \quad x_j(\lambda) = \begin{cases} x_j^{\min} & \text{nếu } \lambda^T a_j \geq \frac{c_j}{(x_j^{\min})^2} \\ \sqrt{\frac{c_j}{\lambda^T a_j}} & \text{nếu } \frac{c_j}{(x_j^{\max})^2} \leq \lambda^T a_j \leq \frac{c_j}{(x_j^{\min})^2} \\ x_j^{\max} & \text{nếu } \lambda^T a_j \leq \frac{c_j}{(x_j^{\max})^2} \end{cases}$$

Có thể dễ dàng tính đạo hàm của hàm  $\Phi$  theo  $\lambda$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = \sum_j a_{ij} x_j(\lambda) - b_i$$

Thay vì giải bài toán  $P^{(k)}$ , chúng ta giải bài toán đối ngẫu  $D^{(k)}$

$$D^{(k)} \quad \max \quad \partial \Phi(\lambda)$$

Chịu ràng buộc  $\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$

Nếu  $\lambda^*$  là lời giải tối ưu của  $D^{(k)}$  thì chúng ta có lời giải tối ưu  $x_j^* = x_j(\lambda)$ , trong đó  $x_j(\lambda)$  được xác định theo (\*)

Giải bài toán  $D^{(k)}$  dễ hơn  $P^{(k)}$  bởi hai lý do :

- Các ràng buộc đơn giản (Chỉ có các ràng buộc không âm trên các biến)
- Ít biến hơn (thường  $m \ll n$ )

$P^{(k)}$  có  $n$  biến,  $m$  ràng buộc tuyến tính,  $2n$  cận đơn giản trên biến

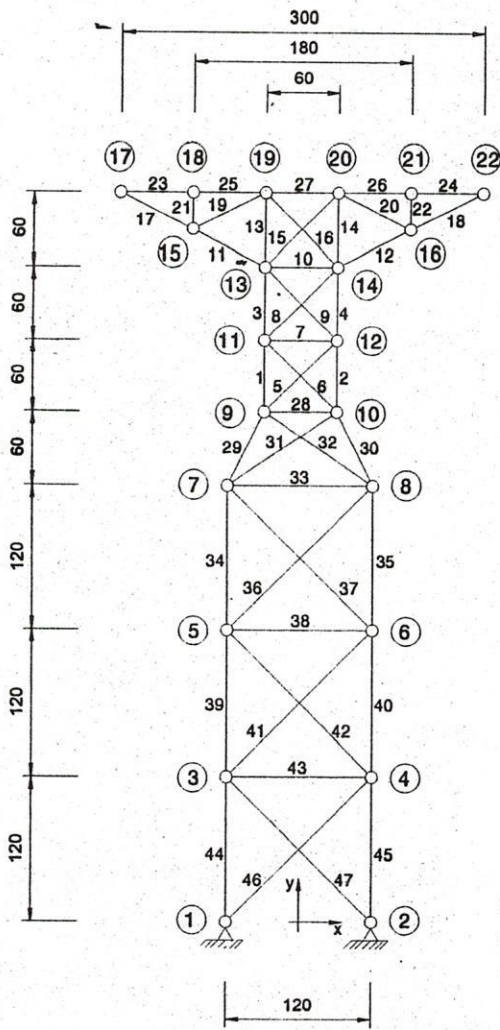
$D^{(k)}$  có  $m$  biến, không có ràng buộc tuyến tính,  $m$  cận đơn giản trên biến

Vì  $\Phi$  là hàm lõm ( $-\Phi$  sẽ là hàm lồi), liên tục và có gradient được tính dễ dàng nên bài toán  $D^{(k)}$  có thể giải bằng một số phương pháp như : phương pháp gradient tùy ý (arbitrary gradient method), phương pháp đường dốc nhất (steepest ascent method), ... Ở đây chúng ta sử dụng phương pháp đường dốc nhất.

## 5. Áp dụng cho một số bài toán

### 5.1 Bài toán tháp phẳng 47-thanh :





**a. Dữ liệu thiết kế của tháp phẳng 47-thanh**

- Modul đàn hồi =  $3 \times 10^4$  ksi
- Khối lượng riêng =  $3 \times 10^{-4}$  lb/in<sup>3</sup>
- Ứng suất giới hạn = [-15, 20] ksi
- Cận dưới của diện tích mặt cắt =  $10^{-6}$  in<sup>2</sup>
- Hệ số ổn định Euler  $k_b = \frac{10\pi}{8}$ ,  $(\sigma_b = k_b \frac{E\lambda}{\ell^2})$

Số trường hợp tải = 3

1 ksi = 6.894 MN/m<sup>2</sup> ; 1 lb = 4.448 N

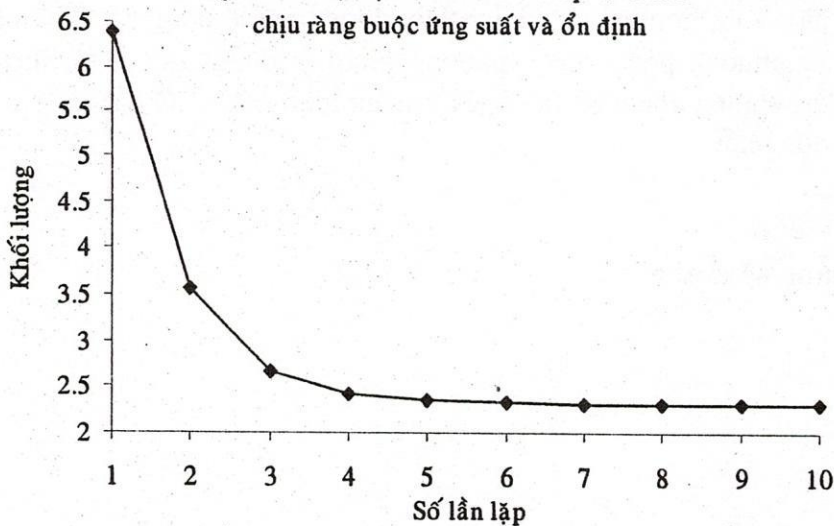
**b. Dữ liệu tải trọng**

Trường hợp tải	Nút	Tải trọng	
		x	y
1	17	6	-14
	22	0	0
2	17	0	0
	22	6	-14
3	17	6	-14
	22	6	-14

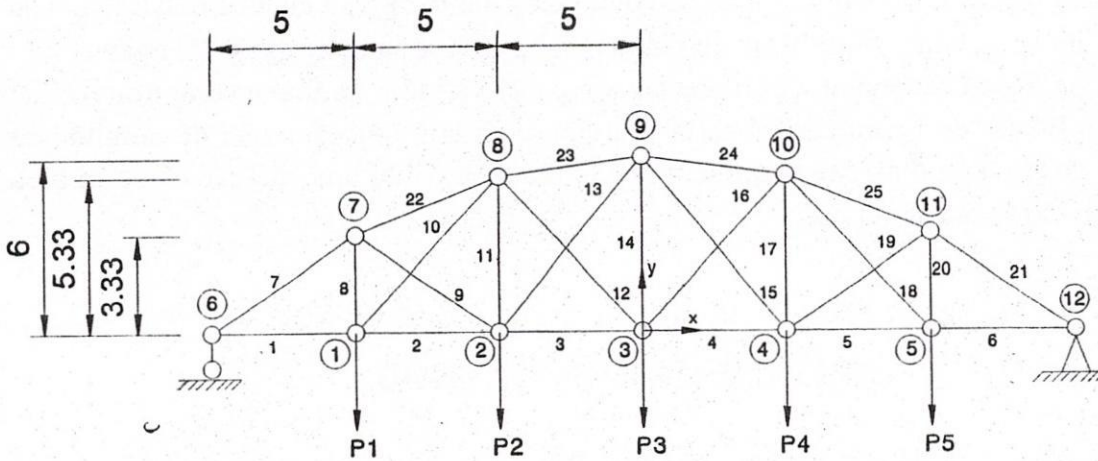
Lời giải của Uri Kirsch có tổng khối lượng là 2.306

Lời giải trong bài báo có tổng khối lượng là 2.308

Quá trình hội tụ của bài toán tháp 47-thanh  
chịu ràng buộc ứng suất và ổn định



5.2 Bài toán cầu dầm 25-thanh



a. Dữ liệu thiết kế của cầu dầm phẳng 25-thanh

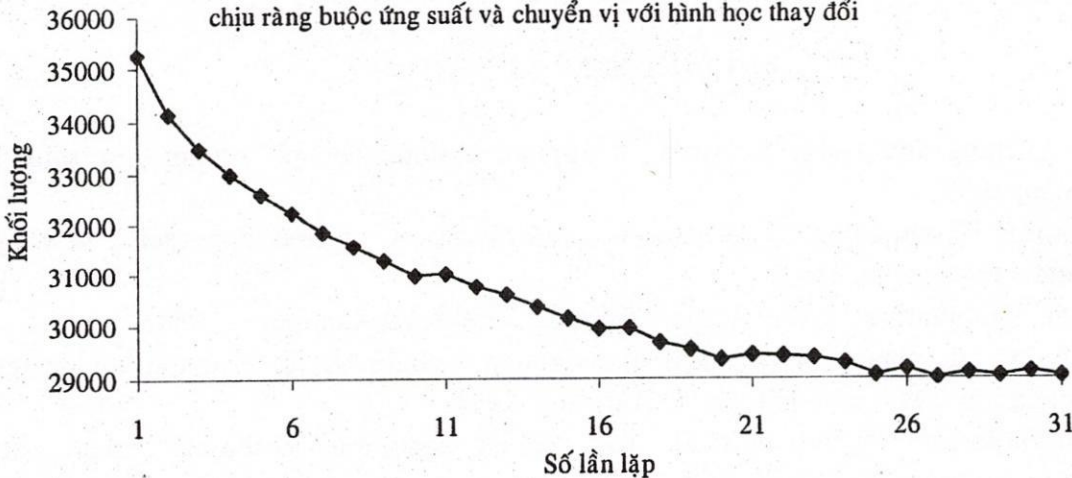
- Modul đàn hồi =  $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Khối lượng riêng =  $7850 \text{ kg/m}^3$
- Ứng suất giới hạn =  $[-1.04 \times 10^8, 1.3 \times 10^8] \text{ N/m}^2$
- Chuyển vị giới hạn trên tất cả nút =  $0.01 \text{ m}$
- Số trường hợp tải =  $5$

b. Dữ liệu tải trọng:

Trường hợp tải	Nút	Tải trọng(N)	
		x	y
1	2	0	$3 \times 10^6$
2	3	0	$3 \times 10^6$
3	4	0	$3 \times 10^6$
4	5	0	$3 \times 10^6$
5	6	0	$3 \times 10^6$

Lời giải của Uri Kirsch có tổng khối lượng là 29110 kg  
 Lời giải trong bài báo có tổng khối lượng là 29052 kg

Quá trình hội tụ của cầu dầm 25-thanh chịu ràng buộc ứng suất và chuyển vị với hình học thay đổi



6. Kết luận

Bài báo này trình bày phương pháp tối ưu hóa bằng toán học để giải hệ dầm chịu các ràng buộc về ứng suất, chuyển vị, ổn định dưới nhiều trường hợp tải trọng cho trước. Hàm mục tiêu là khối lượng của hệ dầm và các biến thiết kế hoặc là diện tích mặt cắt ngang của thanh dầm trong trường hợp hình học bị cố định trước hoặc là cả hai diện tích mặt cắt ngang thanh dầm và tọa độ nút dầm khi hình học thay đổi.

Một khó khăn chung của các bài toán tối ưu là quá trình hội tụ của nó. Phương pháp trình bày có quá trình hội tụ tương đối tốt, ổn định nhưng hội tụ gần đến điểm tối ưu còn chậm. Đặc biệt phương pháp thích hợp tốt với những bài toán có nhiều loại ràng buộc. Với



bài toán có hình học cố định chỉ cần một số ít các vòng lặp có thể đạt đến gần lời giải tối ưu. Đối với bài toán có hình học thay đổi thì cần nhiều vòng lặp hơn rất nhiều và quá trình hội tụ chưa thật sự ổn định. Do bài toán ban đầu được thay thế bằng một chuỗi các bài toán con lồi và tách biệt nên chúng có thể được giải hiệu quả bằng việc sử dụng dạng đối ngẫu.

Tác giả được lập trình dựa trên phương pháp này và kiểm tra thành công trên một số bài toán tiêu biểu. Tuy nhiên còn có rất nhiều điều phải làm tiếp theo nữa để tăng tốc độ hội tụ cũng như tính ổn định của thuật toán như là tìm kích cỡ tốt hơn của các cận trên biến trong khi giải bài toán con tối ưu.

## STRUCTURAL OPTIMIZATION USING LINEAR APPROXIMATION METHOD

Nguyen Tam Hung

*ABSTRACT: In this report, the mathematical programming method is described, which is capable of solving a broad class of structural optimization problem. The method employs reciprocal design variables in order to get first-order approximations to the object function and to the constraints.*

*By this approach, the primary problem is replaced with a sequences of explicit subproblems. Each subproblem which is convex and separable could be efficiently solved by using a dual formulation.*

*Within this report, the method is applied on sizing optimization of trusses for a fixed geometry and it is generalized to the case where the geometry is not fixed*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Edward J. Haug and Jasbir S. Arora, "Applied optimal design", Wiley-Interscience Publication, 1979.
2. A. J. Morris, "Foundation of structural optimization: A unified approach", Wiley-Interscience Publication, 1981.
3. Uri Kirch, "Optimum structural design", McGraw-Hill Book Company, 1981.
4. Garret N. Vanderplaats, "Numerical optimization techniques for engineering design: with application", McGraw-Hill Book Company, 1984.
5. C. Fleury, Report "Dual methods for convex separable problems", Aerospace Laboratory, University of Liege, Belgium, 1985.
6. C. Fleury, Report "Sequential convex programming for structure optimization problems", Aerospace Laboratory, University of Liege, Belgium, 1985.
7. Pierre Brousse, "Optimization in mechanics: Problems and methods", 1988.
8. O. C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "The finite element method", Fourth edition, Vol. 1, McGraw-Hill international editions, 1989.
9. Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. M. Shetty, "Nonlinear programming: Theory and Algorithms", Wiley-Interscience Publication, 1993.
10. J. E. Akin, "Finite elements for analysis and design", Academic Press, 1994.