CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC PHẲNG, THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG PHÁT SINH LƯỚI HAI CHIỀU TRONG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Nguyễn Phú Vinh, Nguyễn Đình Tùng
Khoa Công Nghệ Thông Tin, Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP. HCM
(Bài nhận ngày 25 tháng 7 năm 2003, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 30 tháng 9 năm 2003)

***TÓMTẮT:** Trong bài báo này chúng tôi trình bày công thức tính diện tích đa giác ba chiều đơn giản, từ đó đưa ra một công thức tính thể tích của một khối đa diện bất kỳ ba chiều. Tiếp theo chúng tôi cài đặt thuật giải tìm các công thức trên bằng ngôn ngữ C++.*

1. Mở đầu

Các bài toán liên quan đến các quá trình thủy lực và lan truyền chất trong thực tế đa số là những bài toán không có lời giải giải tích. Để giải các bài toán này thông thường phải sử dụng các phương pháp số như sai phân hữu hạn hoặc phần tử hữu hạn. Một số vấn đề nảy sinh trong khi giải các bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn là chia lưới sao cho hợp lý, đơn giản về mặt tính toán nhưng vẫn bảo đảm tính chất vật lý của quá trình. Một vấn đề cần quan tâm khi chia lưới là bảo đảm sự tương xứng về mặt diện tích đối với từng ô lưới. Điều này khá đơn giản khi miền xét là những ô có hình đơn giản. Trong trường hợp miền khảo sát có hình dạng phức tạp và gồm hàng trăm ô không liên thông vấn đề tính toán là không đơn giản. Ví dụ khi chia lưới cho bài toán tràn lũ ở đồng bằng sông Cửu Long, do thực tế địa hình gồm hàng trăm ô cách nhau bởi những sông rạch, việc chia lưới bắt buộc phải dựa vào lưới cơ bản là các kênh sông nhưng khi phân nhỏ các ô ruộng để tính tràn việc chia diện tích các ô sao cho phù hợp với điều kiện địa hình thực tế và có thể tính dễ dàng. Ngoài ra các công thức được trình bày ở bài báo này rất hữu ích cho việc tính toán các đặc trưng hình học của một mặt cắt bất kỳ của vật thể có hình dáng phức tạp.

Nhằm mục đích tạo ra một công cụ tiện dụng trong việc lập trình tính toán, trong bài này chúng tôi đã dựa trên các kiến thức cơ bản của Giải tích và Hình học để đưa ra một công thức tính diện tích đa giác đơn giản, từ đó đưa ra một công thức tính thể tích của một khối đa diện bất kỳ.

Để tính diện tích đa giác (lồi hoặc lõm) trong mặt phẳng, trong [1] J.Rokne đã đưa ra công thức:

$$(1)\qquad A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n x_1 \\ y_1 y_2 y_3 \ldots y_n y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \ldots + y_nx_1)$$

Trong đó: (x_1,y_1), (x_2,y_2), …,(x_n,y_n) là tọa độ các đỉnh của đa giác, quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Ngoài ra các công thức momen tĩnh và mômen quán tính cuả đa giác phẳng có n đỉnh đối với trục x được tính như sau:

$$S_x = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)(y_i + y_{i+1})$$

$$J_x = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\left[(y_i + y_{i+1})^2 - (y_i y_{i+1})\right]$$

Trong đó $(x_{n+1},y_{n+1})= (x_1,y_1)$, các công thức này đã được chứng minh trong [3].

Công thức diện tích cũng như công thức tính momen tĩnh, momen quán tính diễn tả rất đơn giản trong lập trình. Từ gợi ý của công thức diện tích này chúng tôi đã đi đến một công thức tổng quát hơn để tính diện tích một đa giác phẳng $P_1P_2 \ldots P_n$ bất kỳ (lồi hoặc lõm) trong không gian:

(2) $$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1y_2y_3...y_ny_1 \\ z_1z_2z_3...z_nz_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1z_2z_3...z_nz_1 \\ x_1x_2x_3...x_nx_1 \end{vmatrix}^2}$$

trong đó $P_i(x_i,y_i,z_i)$, i=1..n.

Cũng từ công thức tính diện tích đa giác phẳng trong không gian này chúng tôi đã phát hiện ra một công thức tính thể tích cho một hình khối đa diện $S_1S_2...S_n$ bất kỳ(lồi hoặc lõm):

(3) $$V=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{vmatrix} y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1} \\ z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1} \end{vmatrix}x_{i1} + \begin{vmatrix} z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1} \\ x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1} \end{vmatrix}y_{i1} + \begin{vmatrix} x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1} \\ y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1} \end{vmatrix}z_{i1}\right)$$

trong đó $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$ là những đa giác phẳng bất ky (lồi hoặc lõm). Đa giác $S_i(i=1..n): P_{i1}P_{i2}P_{i3}...P_{ik_i}$ với các điểm $P_{i1},P_{i2},P_{i3},...,P_{ik_i}$, $P_{ik}(x_{ik},y_{ik},z_{ik})$, k=1..$k_i$ nối nhau chạy theo chiều dương nhìn từ phía ngoài mặt S_i.

Trong thực tế khi chỉ cần tính toán với khối lồi, để đơn giản trong việc vào số liệu (không chú ý đến chiều quay của các đa giác),chúng tôi còn đưa ra công thức sau:

(4) $$V=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left\|\begin{vmatrix} y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1} \\ z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1} \end{vmatrix}(x_{11}-x_{i1}) + \begin{vmatrix} z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1} \\ x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1} \end{vmatrix}(y_{11}-y_{i1}) + \begin{vmatrix} x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1} \\ y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1} \end{vmatrix}(z_{11}-z_{i1})\right\|$$

Đa giác $S_i(i=1..n)$ là: $P_{i1}(x_{i1},y_{i1},z_{i1})P_{i2}(x_{i2},y_{i2},z_{i2})P_{i3}(x_{i3},y_{i3},z_{i3})...P_{ik_i}(x_{ik_i},y_{ik_i},z_{ik_i})$ lúc này không chú ý chiều quay. (đa giác $S_i(i=1..n)$ có thể lõm)

(Dấu $\| \ \|$, trong bài này ký hiệu là giá trị tuyệt đối).

Trong [2] Ronal N.Goldman đã đưa ra một công thức tính diện tích cho đa giác phẳng:

(5) $$A=\frac{1}{2}\left|N.\sum_k P_k \times P_{k+1}\right|$$

Trong đó N là pháp véctơ đơn vị của mặt phẳng chứa đa giác,P_k là các đỉnh .
Goldman cũng đưa ra một công thức tính thể tích khối đa diện trong không gian:

(6) $$V=\frac{1}{6}\left|\left[\sum_j (P_{0j}.N_j)\left|N_j.\left\{\sum_k P_{kj}\times P_{k+1j}\right\}\right|\right]\right|$$

với N_j là các pháp vec tơ đơn vị hướng ra ngoài của mặt chứa đa giác,P_{kj} (j=1,2,...) là đỉnh thứ j của đa giác thứ k ,các đỉnh này cũng quay theo chiều dương.Ở đó Ronald N.Goldman đã đưa ra cách chọn véctơ N_j như sau:

$$N_j=\{(P_{1j}-P_{0j})\times(P_{2j}-P_{0j})\}/|(P_{1j}-P_{0j})\times(P_{2j}-P_{0j})|$$

N_j như vậy không phải lúc nào cũng hướng ra ngoài,điều này làm cho công thức không đúng trong một số trường hợp.
Công thức của chúng tôi tỏ ra đơn giản và hữu hiệu hơn nhiều trong tính toán.

2.Chứng minh công thức tính diện tích đa giác:

2.1.Mệnh đề 2.1: Xét đa giác phẳng $P_1P_2...P_n$ ($P_i(x_i,y_i,z_i)$, i=1..n) bất kỳ trong không gian, diện tích đa giác tính bởi:

(2) $$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1y_2y_3...y_ny_1 \\ z_1z_2z_3...z_nz_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1z_2z_3...z_nz_1 \\ x_1x_2x_3...x_nx_1 \end{vmatrix}^2}$$

Chứng minh:

Lấy $P_0(x_0,y_0,z_0)$ tùy ý trong mặt phẳng P chứa đa giác,xét các véc tơ $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, $\overrightarrow{P_0P_3}$, ...$\overrightarrow{P_0P_{n-1}}$, $\overrightarrow{P_0P_n}$.

Xét các tích có hướng sau:

$$\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2} = \left(\begin{vmatrix} y_1 y_2\\ z_1 z_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 y_0\\ z_2 z_0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0 y_1 \\ z_0 z_1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 z_2\\ x_1 x_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 z_0\\ x_2 x_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_0 z_1\\ x_0 x_1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1x_2\\y_1y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2x_0\\y_2y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_0x_1\\y_0y_1\end{vmatrix}\right)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2}\times\overrightarrow{P_0P_3} = \left(\begin{vmatrix} y_2 y_3\\ z_2 z_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 y_0\\ z_3 z_0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0 y_2 \\ z_0 z_2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_2 z_3\\ x_2 x_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 z_0\\ x_3 x_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_0 z_2\\ x_0 x_2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2x_3\\y_2y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3x_0\\y_3y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_0x_2\\y_0y_2\end{vmatrix}\right)$$

....

$$\overrightarrow{P_0P_n}\times\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\begin{vmatrix} y_n y_1\\ z_n z_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 y_0\\ z_1 z_0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0 y_n \\ z_0 z_n\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_n z_1\\ x_n x_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 z_0\\ x_1 x_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_0 z_n\\ x_0 x_n\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_nx_1\\y_ny_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1x_0\\y_1y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_0x_n\\y_0y_n\end{vmatrix}\right)$$

Các vécto:

$\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$, $\overrightarrow{P_0P_2}\times\overrightarrow{P_0P_3}$, $\overrightarrow{P_0P_3}\times\overrightarrow{P_0P_4}$,…., $\overrightarrow{P_0P_{n-1}}\times\overrightarrow{P_0P_n}$, $\overrightarrow{P_0P_n}\times\overrightarrow{P_0P_1}$ đều vuông góc với mặt phẳng P chứa đa giác. Khi đó véctơ:

$\vec{n}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}+\ \overrightarrow{P_0P_2}\times\overrightarrow{P_0P_3}+\overrightarrow{P_0P_3}\times\overrightarrow{P_0P_4}+\ldots+\overrightarrow{P_0P_{n-1}}\times\overrightarrow{P_0P_n}+\overrightarrow{P_0P_n}\times\overrightarrow{P_0P_1}$ nếu khác không sẽ vuông góc với phẳng P.

Cộng tất cả các thành phần 1,2,3 ở vế phải với chú ý: $\begin{vmatrix} y_2 y_0\\ z_2 z_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_0 y_2\\ z_0 z_2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} y_3 y_0\\ z_3 z_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_0 y_3\\ z_0 z_3\end{vmatrix}=0,\ldots,\begin{vmatrix} y_n y_0\\ z_n z_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_0 y_n\\ z_0 z_n\end{vmatrix}=0$ và $\begin{vmatrix} y_1 y_0\\ z_1 z_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_0 y_1\\ z_0 z_1\end{vmatrix}=0$,tương tự cho các thành phần thứ 2,3 ta có:

$$\vec{n}=\left(\begin{vmatrix} y_1 y_2\\ z_1 z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_2 y_3\\ z_2 z_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_3 y_4\\ z_3 z_4\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} y_{n-1} y_n\\ z_{n-1} z_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_n y_1\\ z_n z_1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 z_2\\ x_1 x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_2 z_3\\ x_2 x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_3 z_4\\ x_3 x_4\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} z_{n-1} z_n\\ x_{n-1} x_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_n z_1\\ x_n x_1\end{vmatrix};\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} x_1 x_2\\ y_1 y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 x_3\\ y_2 y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 x_4\\ y_3 y_4\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_{n-1} x_n\\ y_{n-1} y_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_n x_1\\ y_n y_1\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix} y_1y_2y_3\ldots y_ny_1\\ z_1z_2z_3\ldots z_nz_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1z_2z_3\ldots z_nz_1\\ x_1x_2x_3\ldots x_nx_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1x_2x_3\ldots x_nx_1\\ y_1y_2y_3\ldots y_ny_1\end{vmatrix}\right) = (n_1,n_2,n_3)$$

Ta có: $\frac{1}{2}\|n_1\|,\frac{1}{2}\|n_2\|,\ \frac{1}{2}\|n_3\|$ chính là diện tích của hình chiếu đa giác xuống các mặt y0z,z0x,x0y (theo công thức của Jon Rokne) nên ít ra một giá trị khác không.

Vậy $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)\neq\vec{0}$ và vuông góc với phẳng P chứa đa giác nên là véctơ pháp của P.

Phương trình của phẳng P là: $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$. Giả sử $n_3\neq0$ (tương tự cho $n_1\neq0,n_2\neq0$). Ta có:

$$z=-\frac{n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)}{n_3}+z_0$$

Theo công thức tích phân mặt loại I diện tích của đa giác là:

$$S=\iint_S ds=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$ (D_{xy} là hình chiếu của đa giác xuống mặt x0y)

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2+\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2}\,dxdy=\frac{1}{\|n_3\|}\sqrt{n_3^{\ 2}+n_1^{\ 2}+n_2^{\ 2}}\ S(D_{xy})$$

($S(D_{xy})$ là diện tích của D_{xy})

D_{xy} là đa giác $P_1^{'}(x_1, y_1)\ P_2^{'}(x_2, y_2) \ldots P_n^{'}(x_n, y_n)$ hiển nhiên là không tự cắt và quay theo một chiều nào đó. Theo công thức của Jon Rokne $S(D_{xy})=\dfrac{1}{2}\|n_3\|$,từ đó có điều cần chứng minh.

3.Chứng minh công thức tính thể tích khối đa diện: (Công thức tổng quát cho mọi khối)

Trước khi chứng minh công thức xét mệnh đề sau:

3.1.Mệnh đề 3.1: *Trong mặt phẳng P cho đa giác $P_1P_2...P_n$ có tọa độ các điểm $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$,. . ., $P_n(x_n,y_n,z_n)$; P là mặt hai phía,xét phía mà trên đó đi dọc theo các con đường P_1P_2, P_2P_3,... ,$P_{n-1}P_n$, P_nP_1 miền đa giác nằm bên tay trái người đi. Khi đó: $\vec{n}$ $=\left(\begin{vmatrix} y_1y_2y_3...y_ny_1 \\ z_1z_2z_3...z_nz_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1z_2z_3...z_nz_1 \\ x_1x_2x_3...x_nx_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix}\right)$ là végto định hướng cho mặt P (tức là $\vec{n}$ hướng từ chân lên đầu người đi).*

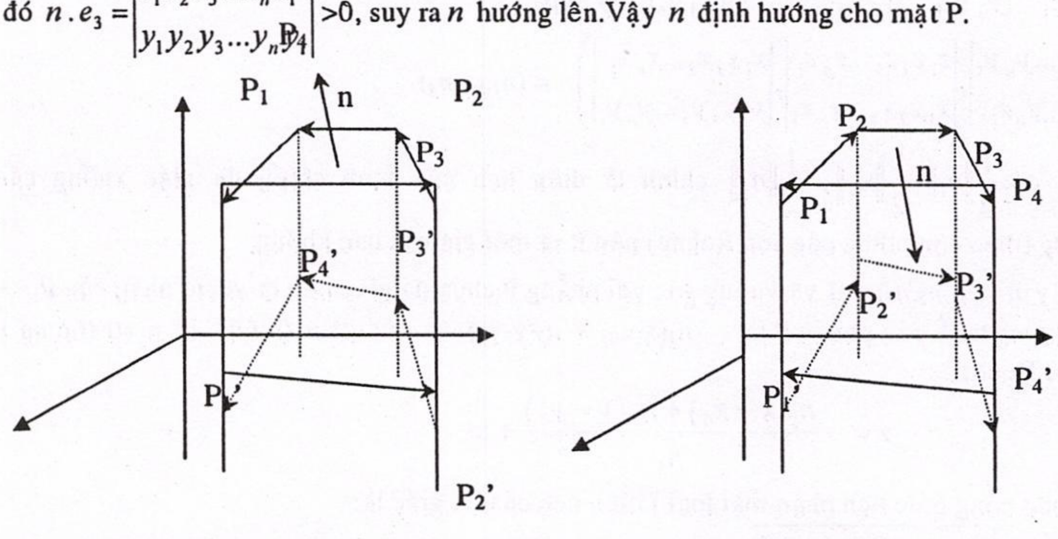
Chứng minh:

$\vec{n}$ vuông góc với P đã biết ở phần II.

(i) *Trường hợp mặt P hướng lên tức nhìn từ trên 0z xuống thấy P.(trường hợp P song song 0z xét sau)*

Đa giác $P_1(x_1,y_1,z_1)P_2(x_2,y_2,z_2)P_3(x_3,y_3,z_3)$. . . $P_n(x_n,y_n,z_n)$ chiếu xuống mặt x0y là đa giác $P_1^{'}(x_1, y_1)\ P_2^{'}(x_2, y_2) \ldots P_n^{'}(x_n, y_n)$ tạo nên một hình khối có các cạnh bên vuông góc với x0y. Đi dọc theo các con đường (đầu hướng lên) P_1P_2, P_2P_3,... ,$P_{n-1}P_n$, P_nP_1 miền đa giác nằm bên tay trái, thì trên $P_1^{'}P_2^{'}, P_2^{'}P_3^{'}, \ldots, P_{n-1}^{'}P_n^{'}, P_n^{'}P_1^{'}$ đầu hướng lên 0z (phía dương) cũng thấy miền đa giác $P_1^{'}P_2^{'}...P_n^{'}$ nằm bên tay trái (nằm bên trong hình khối). Khi đó đã biết: $S(P_1^{'}P_2^{'}...P_n^{'}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix} > 0$.

Từ đó $\vec{n}.\vec{e_3} = \begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix}$ >0, suy ra $\vec{n}$ hướng lên.Vậy $\vec{n}$ định hướng cho mặt P.



(ii) *Trường hợp mặt P hướng xuống nhìn từ dưới 0z lên mới thấy P:*

Khi nhìn từ dưới lên thấy một người đi dọc theo các con đường (đầu hướng lên tức về phía người quan sát) P_1P_2, P_2P_3,... ,$P_{n-1}P_n$, P_nP_1 miền đa giác nằm bên tay trái,thì trên $P_1^{'}P_2^{'}, P_2^{'}P_3^{'}, \ldots, P_{n-1}^{'}P_n^{'}, P_n^{'}P_1^{'}$ đầu hướng lên 0z (theo chiều dương) người đi sẽ thấy miền đa giác nằm bên tay phải. Khi đó: $S(P_1^{'}P_2^{'}...P_n^{'}) = -\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix} > 0$.

Suy ra $\vec{n}.\vec{e_3} = \begin{vmatrix} x_1x_2x_3...x_nx_1 \\ y_1y_2y_3...y_ny_1 \end{vmatrix} < 0$, từ đó $\vec{n}$ hướng xuống .

Tóm lại $\vec{n}$ định hướng cho mặt P.

Trường hợp P//0z ta cũng làm tương tự với trục 0x hoặc 0y,và có được $\vec{n}$ định hướng cho mặt P.

3.2.Mệnh đề 3.2 (công thức tính thể tích khối đa diện):

Cho hình khối đa diện $S_1S_2...S_n$ bất kỳ trong đó $S_1,S_2,S_3,...,S_n$ là những đa giác phẳng bất kỳ. Đa giác $S_i(i=1..n): P_{i1}P_{i2}P_{i3}...P_{ik_i}$ với các điểm $P_{i1},P_{i2},P_{i3},...,P_{ik_i}$, $P_{ik}(x_{ik},y_{ik},z_{ik})$, $k=1..k_i$ nối nhau chạy theo chiều dương nhìn từ phía ngoài mặt S_i. Khi đó thể tích của khối tính bởi công thức:

$$(3)\qquad V=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{vmatrix} y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1} \\ z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1}\end{vmatrix}x_{i1}+\begin{vmatrix} z_{i1}z_{i2}...z_{ik_i}z_{i1} \\ x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1}\end{vmatrix}y_{i1}+\begin{vmatrix} x_{i1}x_{i2}...x_{ik_i}x_{i1} \\ y_{i1}y_{i2}...y_{ik_i}y_{i1}\end{vmatrix}z_{i1}\right)$$

Chứng minh:

Xét ba hàm P(x,y,z) = x ; Q(x,y,z) = y ; R(x,y,z) = z , miền V trong khối đa diện. Theo công thức Gauss-Ostrogratski ta có:

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=3\text{V}$$

$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$ là tích phân mặt loại II lấy theo phía ngoài S (S là mặt ngoài khối đa diện).

Ta có: $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i}xdydz+ydzdx+zdxdy$

S_i là mặt ngoài của các đa giác phẳng. Tích phân trên mặt S_1 :

$$\iint_{S_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{S_1}(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1)ds$$

(Tích phân ở vế phải là tích phân mặt loại I).$\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1$ là cosin của góc tạo bởi végto đơn vị định hướng mặt S_1 (mặt ngoài) với các trục 0x,0y,0z theo chiều dương. Theo mệnh đề 2.1:

$$\overrightarrow{N_1}=\left(\begin{vmatrix} y_{11}y_{12}...y_{1k_1}y_{11} \\ z_{11}z_{12}...z_{1k_1}z_{11}\end{vmatrix};\begin{vmatrix} z_{11}z_{12}...z_{1k_1}z_{11} \\ x_{11}x_{12}...x_{1k_1}x_{11}\end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_{11}x_{12}...x_{1k_1}x_{11} \\ y_{11}y_{12}...y_{1k_1}y_{11}\end{vmatrix}\right)$$

$=(n_{11},n_{12},n_{13})$ là végto định hướng của S_1. Suy ra $\frac{\overrightarrow{N_1}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}$ là végto đơn vị định hướng của S_1.Từ đó :$\cos\alpha_1=\frac{n_{11}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}$, $\cos\beta_1=\frac{n_{12}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}$, $\cos\gamma_1=\frac{n_{13}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}$, ($\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|=\sqrt{n_{11}^2+n_{12}^2+n_{13}^2}$ là chuẩn Euclide trong R^3)

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1)ds=\iint_{S_1}x\frac{n_{11}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds+\iint_{S_1}y\frac{n_{12}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds+\iint_{S_1}z\frac{n_{13}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds$$

Phương trình mặt phẳng S_1 là: $n_{11}(x-x_{11})+n_{12}(y-y_{11})+n_{13}(z-z_{11})=0$.

Giả sử $n_{13}\neq 0$ (tương tự cho các trường hợp khác) ,ta có:

$$z=-\frac{n_{11}(x-x_{11})+n_{12}(y-y_{11})}{n_{13}}+z_{11}$$

$$\iint_{S_1} x\frac{n_{11}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds + \iint_{S_1} y\frac{n_{12}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds + \iint_{S_1} z\frac{n_{13}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}ds = \iint_{D_{1xy}} x\frac{n_{11}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy +$$

$$\iint_{D_{1xy}} y\frac{n_{12}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy +$$

$$\iint_{D_{1xy}}\left(-\frac{n_{11}(x-x_{11})+n_{12}(y-y_{11})}{n_{13}}+z_{11}\right)\frac{n_{13}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$$

$$= \iint_{D_{1xy}} x_{11}\frac{n_{11}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{n_{11}}{n_{13}}\right)^2+\left(\frac{n_{12}}{n_{13}}\right)^2}dxdy + \iint_{D_{1xy}} y_{11}\frac{n_{12}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{n_{11}}{n_{13}}\right)^2+\left(\frac{n_{12}}{n_{13}}\right)^2}dxdy$$

$$+ \iint_{D_{1xy}} z_{11}\frac{n_{13}}{\left\|\overrightarrow{N_1}\right\|}\sqrt{1+\left(\frac{n_{11}}{n_{13}}\right)^2+\left(\frac{n_{12}}{n_{13}}\right)^2}dxdy = \frac{1}{\left\|n_{13}\right\|}\left(\iint_{D_{1xy}} n_{11}x_{11}+n_{12}y_{11}+n_{13}z_{11}\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{\left\|n_{13}\right\|}\left(n_{11}x_{11}+n_{12}y_{11}+n_{13}z_{11}\right)S(D_{1xy})$$ (D_{1xy} là hình chiếu của S_1 xuống x0y)

$$= \frac{1}{\left\|n_{13}\right\|}\left(n_{11}x_{11}+n_{12}y_{11}+n_{13}z_{11}\right).\frac{1}{2}\left\|n_{13}\right\| = \frac{1}{2}\left(n_{11}x_{11}+n_{12}y_{11}+n_{13}z_{11}\right).$$

(Nếu $n_{12} \neq 0$ thì chiếu xuống mặt z0x, $n_{11} \neq 0$ chiếu xuống mặt y0z cũng được các kết qủa như trên).

Tương tự cho các mặt S_2, S_3,..., S_n và ta được:

$$V=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(n_{i1}x_{i1}+n_{i2}y_{i1}+n_{i3}z_{i1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{vmatrix} y_{i1}y_{i2}\ldots y_{ik_i}\,y_{i1} \\ z_{i1}z_{i2}\ldots z_{ik_i}\,z_{i1}\end{vmatrix}x_{i1}+\begin{vmatrix} z_{i1}z_{i2}\ldots z_{ik_i}\,z_{i1} \\ x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ik_i}\,x_{i1}\end{vmatrix}y_{i1}+\begin{vmatrix} x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ik_i}\,x_{i1} \\ y_{i1}y_{i2}\ldots y_{ik_i}\,y_{i1}\end{vmatrix}z_{i1}\right)$$

Vậy công thức tính thể tích cho mọi khối đa diện được chứng minh.

Nếu là khối lồi (các mặt có thể là đa giác lõm) thì chứng minh như sau:

Lấy điểm $P_{11}(x_{11},y_{11},z_{11})$ trong mặt S_1 chia hình khối ra *n* hình chóp với đáy là $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$ (nếu P_{11} nằm trên mặt nào thì hình đó suy biến thành mặt phẳng).Vì khối là lồi nên các hình chóp đó rời nhau ,do đó $V=\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}S_ih_i$ (S_i, h_i lần lược là diện tích của đa giác S_i và khoảng cách từ P_{11} đến S_i),mặt S_i có phương trình pháp dạng là :

$$\frac{n_{i1}}{\left\|\overrightarrow{N_i}\right\|}(x-x_{i1})+\frac{n_{i2}}{\left\|\overrightarrow{N_i}\right\|}(y-y_{i1})+\frac{n_{i3}}{\left\|\overrightarrow{N_i}\right\|}(z-z_{i1})=0$$

do đó $h_i=\left\|\frac{n_{i1}(x_{11}-x_{i1})+n_{i2}(y_{11}-y_{i1})+n_{i3}(z_{11}-z_{i1})}{\left\|\overrightarrow{N_i}\right\|}\right\|$,(cần phân biệt trị tuyệt đối và chuẩn),và chú ý công thức diện tích cho đa giác phẳng $S_i=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{N_i}\right\|$,suy ra điều phải chứng minh.

4.Kết luận:

Các công thức có thể ứng dụng trong thực tế khi cần tính diện tích hình đa giác phẳng và thể tích khối đa diện tùy ý. Nếu hình là không phẳng thì có thể chia thật mịn để được một hình đa giác có diện tích xấp xỉ với hình cần tính. Trong trường hợp khối không phải là đa diện cũng lấy một số điểm trên mặt chia thành các đa giác, để hình thành một khối đa diện có thể tích xấp xỉ với khối cần tính.

Như đã nói ở phần mở đầu các công thức trên có thể sử dụng trong các bài toán tự phát sinh lưới hai chiều cho bài toán phần tử hữu hạn. Ngoài ra công thức tính thể tích còn được sử dụng cho việc tính toán dự báo mức độ ngập nước của các ô chứa ven sông cũng như nội đồng.

Các công thức đều cho những thuật toán hết sức đơn giản, nhưng vẫn bảo đảm sai số nhỏ bởi vì ở các công thức hầu như chỉ làm việc với các phép toán: cộng, trừ, nhân; đây là những phép toán làm cho sai số ít.

THE AREA FORMULA OF POLYGON FOR THREE DIMENSIONAL, VOLUME OF POLYGON AND THE APPLICATION TO DESIGN A NET IN FINITE ELEMENT METHOD

Nguyen Phu Vinh, Nguyen Dinh Tung
Department of Technology, College of Industry 4, HoChiMinh City

ABSTRACT: *In this paper, we present the area formula of simple polygon for three dimensional, then we get a volume of polygon. Finally a appliacation to design a net in finite element method*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Jon Rokne, *The Area of a Simple Polygon* (p.5-6), Graphics Gems, Academic Press Limited, London 1991.

[2] Ronald N.Goldman, *Area of planar Polygons and Volume of Polyhedra* (p.170-172), Graphics Gems, Academic Press Limited, London 1991.

[3] Nguyễn Phú Vinh, Đỗ Hoài Vũ, Đinh Văn Ruy, *Giáo Trình toán cao cấp* - Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP. HCM 2000.