THUẬT GIẢI RETURN MAPPING CHO BÀI TOÁN ĐÀN DẺO MỘT CHIỀU

Nguyễn Phú Vinh
Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP.HCM
(Bài nhận ngày 07 tháng 10 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa 09 tháng 12 năm 2002)

TÓM TẮT: Trong bài báo này chúng tôi trình bày qui luật ứng xử lý thuyết đàn dẻo của bài toán một chiều, sau đó chúng tôi khảo sát tính chất nghiệm của bài toán giá trị biên và ban đầu như: tính duy nhất, tính co của nghiệm, tiếp đó chúng tôi trình bày thuật toán return mapping cho bài toán tái bền đẳng hướng. Cuối cùng chúng tôi đề cập đến vấn đề cực tiểu hóa phiếm hàm năng lượng bổ sung chúng tôi cũng thu được kết quả tương đương với thuật toán return mapping.

1. Mở đầu

Trong bài báo này chúng tôi khảo sát luật ứng xử trong vật liệu đàn dẻo, liên quan tới bài toán giá trị biên và ban đầu (ibvp) trong phạm vi một chiều. Đầu tiên chúng tôi tóm lược dạng mạnh và dạng yếu (dạng biến phân của phương trình chuyển động). Sau đó chúng tôi đề cập đến sự hao tán trong hệ liên tục, đánh giá sự ổn định của hệ và cuối cùng áp dụng vào bài toán đàn dẻo, đó là thí dụ điển hình cho luật tái bền.

Hơn thế nữa chúng tôi cũng khảo sát tính chất nghiệm của ibvp như tính duy nhất, tính co với sự đánh giá năng lượng hao tán tiền định mà nó là kết qủa của tính chất có sự tiêu hao năng lượng ở bên trong các hệ cơ học. Tiếp đó chúng tôi trình bày thuật toán return mapping cho bài toán tái bền đẳng hướng. Cuối cùng chúng tôi đề cập đến vấn đề cực tiểu hoá phiếm hàm năng lượng bổ sung. Chúng tôi cũng thu được kết quả tương đương với thuật toán return mapping.

2. Dạng mạnh của I BVP một chiều:

Ký hiệu $\overline{B}=[0,L]$, $u:\overline{B}\times[0,T]\to IR$.

$u(x,t)$ hàm chuyển vị tại $x\in\overline{B}$, thời điểm $t\in[0,T]$. Ta có biến dạng, vận tốc:

$$\varepsilon(x,t)=u_x^{/}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \ v(x,t)=\dot{u}_t=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\tag{1}$$

$\sigma(x,t)$ trường ứng suất, giả thiết tất cả các hàm đều đủ trơn cần thiết. Chú ý rằng:

$$B=]0,L[,\ \partial B=\{0,L\},\ \overline{B}=B\cup\partial B.$$

Điều kiện biên: $u|_{\partial_u B}=\overline{u};\quad \sigma|_{\partial_\sigma B}=\overline{\sigma}.$ (2)

$\overline{\partial \mathrm{B}}=\overline{\partial_\sigma B\cup\partial_u B}$, $\partial_\sigma B\cap\partial_u B=\phi$, $\partial_u B=\{0\}$, $\partial_\sigma B=\{L\}$,

$u(0,t)=0,\ \sigma(L,t)=0.$ (điều kiện triệt tiêu trên biên)

$$\text{Điều kiện ban đầu :}\ \left.\begin{array}{ll} u(x,0)=u_0(x) & \text{(chuyển vị)}\\ v(x,0)=v_0(x) & \text{(vận tốc)}\end{array}\right\}\text{trong }\overline{\mathrm{B}}.\tag{3}$$

Từ các điều kiện trên, ta phải có điều kiện liên tục tương thích:

$$u_0\big|_{\partial_u B} = \bar{u}\big|_{t=0}; \qquad v_0\big|_{\partial_u B} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0}. \tag{4}$$

2.1. Phương trình chuyển động

Vật thể một chiều có phương trình chuyển động:

$$\sigma_x^{/} + \rho b = \rho \dot{v} \quad \text{trong } B\times]0,T[, \tag{5}$$

Trong đó $\rho : B \to IR$, hàm mật độ, $b : B\times[0,T] \to IR$, $b = b(x,t)$ lực trong.

Ta xét hai trường hợp cần quan tâm :

i/ Vật thể đàn hồi tuyến tính: $\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t)$. (6)

Sau khi thay vào phương trình chuyển động, ta được phương trình sóng một chiều, là dạng bài toán hyperbolic tuyến tính.

ii/ Nếu coi $\sigma(x,t)$ là không tuyến tính, mô hình đàn dẻo:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{E(K+H)}{E+(K+H)}\dot{\varepsilon}, & \text{nếu có điều kiện chảy dẻo } f = 0,\ \dot{f} = 0 \text{ trong } B\times[0,T], \\ E\dot{\varepsilon}, & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases} \tag{7}$$

Bài toán này là phi tuyến với hai lý do sau:

i/ Đòi hỏi điều kiện đặt tải, dở tải để quyết định module (7) nào được sử dụng.

ii/ Ứng suất và các biến dạng trong có liên quan đến các ràng buộc được xác định bởi các điều kiện chảy dẻo.

2.2. Dạng yếu của IBVP một chiều:

Ta định nghĩa trường chuyển vị động học khả dĩ:

$S_t = \{u(.,t) : B \to IR,\ u(.,t)\big|_{\partial_u B} = \bar{u}(.,t)\}$, ta có $S_t \subset H^1(B)$ với mỗi t cố định,

với $H^1(B)$ là không gian Sobolev cấp 1 trên B.

Ta định nghĩa

$$V = \{\eta \in C^1(\bar{B}) : \eta(0) = 0\}$$

là không gian các hàm có đạo hàm trên $\bar{B}$ và triệt tiêu tại $x = 0$.(không gian các hàm thử, hay biến phân động học khả dĩ). Khi đó

$$\bar{V} = \{\eta \in H^1(B) : \eta(0) = 0\} = \text{bao đóng của } V \text{ trong } H^1(B). \tag{8}$$

Với các định nghĩa trên, ta phát biểu dạng yếu của IBVP như sau:

Tìm hàm $u(.,t) \in S_t$ sao cho:

$$\int_B \rho \dot{v} \eta\, dx + G(\sigma, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in V,\ \ \forall t \in [0,T], \tag{9}$$

trong đó $G(\sigma,\eta) = \int_B \sigma \eta^{/} dx - \int_B \rho b \eta\, dx - \bar{\sigma}\eta\big|_{\partial_\sigma B}$ và $\eta^{/} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$.

Chú ý rằng $u(x,t)$ là hàm ẩn trong $\varepsilon = u_x$ và $\dot{v} = u_{tt}$.

Một chứng minh cho dạng yếu là đơn giản, bằng cách dùng công thức Green tổng quát. Còn ở đây ta chỉ tập trung chứng minh tính duy nhất nghiệm và tính co mà thôi.

3. Sự duy nhất của nghiệm IBVP- Tính co

3.1. Sự duy nhất của nghiệm

Coi trạng thái tái bền đẳng hướng và giả sử $\{u, v, \varepsilon^p, \alpha\}$ và $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{\varepsilon}^p, \hat{\alpha}\}$ làhai nghiệm của IBVP. Với giá trị ban đầu cho $\{u_0, v_0\}$ và các điều kiện biên $\{b, \bar{u}, \bar{\sigma}\}$, ta sẽ chứng minh hai nghiệm này trùng nhau. Thật vậy đầu tiên do 2 biểu thức động năng và thế năng đều dương nên có:

$$T(v-\hat{v}) + V_{\text{int}}(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e) \geq 0,$$

chú ý $K, E > 0$ và $T(v-\hat{v}) = \frac{1}{2}\int_B \rho(v-\hat{v})^2 dx$

$$V_{\text{int}}(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e) = \int_B [\frac{1}{2}E(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e)^2 + \frac{1}{2}K(\alpha-\hat{\alpha})^2]dx,$$

ta có

$$\frac{d}{dt}[T(v-\hat{v}) + V_{\text{int}}(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e)] = \int_B [\rho(v-\hat{v})\frac{d}{dt}(v-\hat{v})]dx$$

$$+\int_B [E(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e)\frac{d}{dt}(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e)]dx + \int_B [K(\alpha-\hat{\alpha})\frac{d}{dt}(\alpha-\hat{\alpha})]dx. \quad (*)$$

Chú ý các đẳng thức hiển nhiên sau:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p),\ \hat{\sigma} = E(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p),\ \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,\ \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^p,\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \dot{\varepsilon} = v'_x = \frac{\partial v}{\partial x} = u''_{tx}.$$

Bây giờ ta khai triển biểu thức (*)

$$(*) = \int_B [\rho\frac{\partial v}{\partial t}(v-\hat{v}) + \sigma\frac{\partial(v-\hat{v})}{\partial x} - \rho b(v-\hat{v})]dx - \bar{\sigma}(v-\hat{v})\Big|_{\partial_\sigma B}$$

$$+\int_B [\rho\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}(\hat{v}-v) + \hat{\sigma}\frac{\partial(\hat{v}-v)}{\partial x} - \rho b(\hat{v}-v)]dx - \bar{\sigma}(\hat{v}-v)\Big|_{\partial_\sigma B}$$

$$+\int_B [(\sigma-\hat{\sigma})\dot{\hat{\varepsilon}}^p - (\alpha-\hat{\alpha})K\dot{\hat{\alpha}}]dx$$

$$+\int_B [(\hat{\sigma}-\sigma)\dot{\varepsilon}^p - (\hat{\alpha}-\alpha)K\dot{\alpha}]dx.$$

Đó là ta đã cộng và trừ cho đại lượng $\rho b(v-\hat{v}),\ \bar{\sigma}(v-\hat{v})\Big|_{\partial_\sigma B}$ hơn nữa $(v-\hat{v}), (\hat{v}-v) \in V$. Do đó 2 số hạng đầu thoả mãn dạng yếu IBVP (9), nên triệt tiêu. Sau đó ta áp dụng điều kiện chảy dẻo và luật tái bền vào 2 số hạng cuối cùng như sau:

$$\dot{\hat{\varepsilon}}^p = \hat{\gamma}\, sign(\hat{\sigma}) = \hat{\gamma}\frac{\partial f}{\partial\sigma} \text{ và } -K\dot{\hat{\alpha}} = \hat{\gamma}\frac{\partial f}{\partial\alpha}.$$

Tương tự

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma\ sign(\sigma) = \gamma\frac{\partial f}{\partial\sigma} \text{ và } -K\dot{\alpha} = \gamma\frac{\partial f}{\partial\alpha}.$$

Cuối cùng ta có

$$\frac{d}{dt}[T(v-\hat{v}) + V_{\text{int}}(\varepsilon^e - \hat{\varepsilon}^e)] = \int_B \hat{\gamma}[(\sigma-\hat{\sigma})\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\hat{\sigma},\hat{\alpha}) + (\alpha-\hat{\alpha})\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\hat{\sigma},\hat{\alpha})]dx$$

$$+\int_B \gamma[(\hat{\sigma}-\sigma)\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma,\alpha)+(\hat{\alpha}-\alpha)\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\sigma,\alpha)]dx. \quad (10)$$

Mục đích cuối cùng của(10) là áp dụng điều kiện chảy dẻo cho hàm $f(\sigma,\alpha)$ là hàm lồi 2 biến:

$$(f(u)-f(v)) \ge \nabla f(v)(u-v).$$

Nên cuối cùng ta có

$$\frac{d}{dt}[T(v-\hat{v})+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\hat{\varepsilon}^e)] \le \int_B \hat{\gamma}[f(\sigma,\alpha)-f(\hat{\sigma},\hat{\alpha})]dx+\int_B \gamma[f(\hat{\sigma},\hat{\alpha})-f(\sigma,\alpha)]dx.$$

Do điều kiện Kuhn- Tucker ($\gamma f(\sigma,\alpha)=0$ và $\hat{\gamma} f(\hat{\sigma},\hat{\alpha})=0$)

Hơn nữa ($\gamma\ge 0,\ f(\sigma,\alpha)\le 0$) và ($\hat{\gamma}\ge 0,\ f(\hat{\sigma},\hat{\alpha})\le 0$). Do đó ta có

$$\frac{d}{dt}[T(v-\hat{v})+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\hat{\varepsilon}^e)] \le \int_B \hat{\gamma} f(\sigma,\alpha)dx+\int_B \gamma f(\hat{\sigma},\hat{\alpha})dx \le 0.$$

Vậy $$T(v-v)+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\varepsilon^e)\le 0, \quad (11)$$

so sánh với biểu thức đầu có vế trái ≥ 0, nên ta kết luận

$$T(v-v)+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\varepsilon^e)=0.$$

Cuối cùng vì đây là dạng toàn phương xác định dương nên $v=\hat{v}$, $\varepsilon^e=\hat{\varepsilon}^e$ và tương tự cho quá trình chứng minh chức năng $\varepsilon^e=\hat{\varepsilon}^e$ giống như $\varepsilon^e=\hat{\varepsilon}^e$ trong biểu thức V_{int} nên ta cũng kết luận $\alpha=\hat{\alpha}$, hơn nữa $\sigma=\hat{\sigma}$ vì $E>0$, và do môđun đàn dẻo $E^{ep}=\dfrac{EK}{E+K}>0$, nên chúng ta cũng kết luận $\dot{\varepsilon}^p=\dot{\hat{\varepsilon}}^p$. Vậy ta có $u=\hat{u}$ kéo theo $v=\hat{v}$ là 2 nghiệm trùng nhau.□

3.2. Tính co

Ở trên ta đã có

$$\frac{d}{dt}[T(v-\hat{v})+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\hat{\varepsilon}^e)]\le 0,$$

nên ta suy ra

$$T(v-\hat{v})+V_{\text{int}}(\varepsilon^e-\hat{\varepsilon}^e)]\le T(v_0-\hat{v}_0)+V_{\text{int}}(\varepsilon_0^p-\hat{\varepsilon}_0^p).$$

Vậy ta nói rằng bài toán đàn dẻo thì có chuẩn năng lượng co theo thời gian hay ổn định theo thời gian.□

4. Thuật toán Return mapping cho bài toán tái bền đẳng hướng

4.1. Dạng đàn hồi thử

Chúng ta giả sử bước thuần đàn hồi thử được định nghĩa như sau:

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_{n+1}^{trial}=E(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n^p)=\sigma_n+E\Delta\varepsilon_n,\\ \varepsilon_{n+1}^{p,trial}=\varepsilon_n^p,\\ \sigma_{n+1}^{p,trial}=\alpha_n,\\ f_{n+1}^{trial}=\left|\sigma_{n+1}^{trial}\right|-[\sigma_Y+K\alpha_n].\end{array}\right. \quad (12)$$

Ta thấy rằng trạng thái thử này được xác định qua các điều kiện trước $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha\}$ và độ biến dạng $\Delta\varepsilon_n$ và trạng thái này không tương ứng với bất kỳ trạng thái thật nào trừ khi quá trình gia tăng tải là đàn hồi . Trạng thái thử được minh họa cụ thể trong thuật của điều kiện đặt tải dưới đây:

4.2. Thuật toán của điều kiện đặt tải

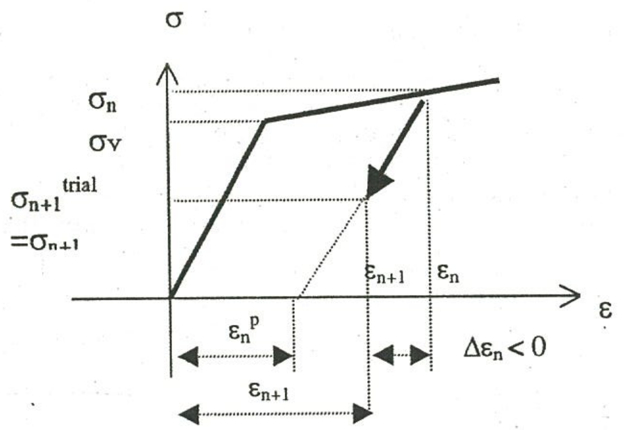
Chú ý ở (12) $f_{n+1}^{trial} \leq 0$, dẫn đến trạng thái thử được chấp nhận theo nghĩa sau

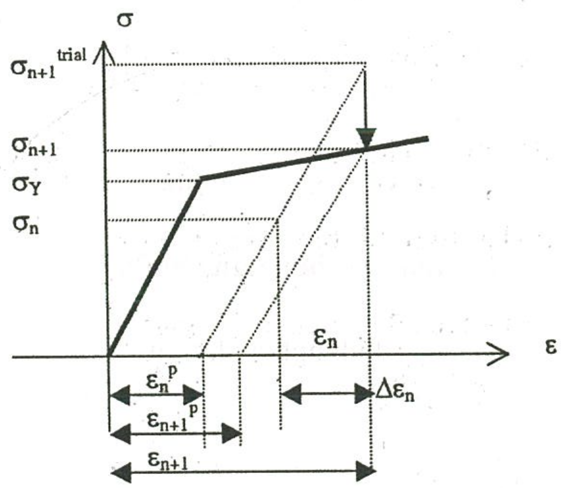
$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}. \end{array} \right.$$

phải thoả mãn luật

* Ứng xử biến dạng -ứng suất
* Luật chảy và luật tái bền với $\Delta\gamma = 0$
* Điều kiện Kuhn-Tucker $f_{n+1} = f_{n+1}^{trial} \leq 0$ và $\Delta\gamma = 0$.

Coi hình dưới minh họa trạng thái này





Hình thứ hai là trường hợp nếu $f_{n+1}^{trial} > 0 \Rightarrow \Delta\gamma > 0$ (để có $\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_n^p$)

Tóm lại ta có thuật toán return mapping cho tái bền đẳng hướng như sau

1./ Dữ kiện $(\varepsilon_n^p, \alpha_n, \varepsilon_n)\Delta\sigma$

2./ $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$

3./ Tính ứng suất thử đàn hồi và test đặt tải dẻo

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{n+1}^{trial} = \left|\sigma_{n+1}^{trial}\right| - [\sigma_Y + K\alpha_n]$$

If $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ then (tính các bước đàn hồi)

set $(\bullet)_{n+1}$= set $(\bullet)_{n+1}^{trial}$ và exit

ELSE (tính dẻo)

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+K} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\gamma.E}{\left|\sigma_{n+1}^{trial}\right|}\right].\sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma\, sign(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

END

Để kết thúc bài này ta sẽ chứng minh cực tiểu hoá phiếm hàm năng lượng bổ sung ta cũng thu được kết quả giống như thuật toán return mapping vừa mới trình bày.

5. Bài toán qui hoạch lồi rời rạc

Ta xét hàm hai biến (σ, α):

$$\chi(\sigma,\alpha) = \frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^{trial} - \sigma)E^{-1}(\sigma_{n+1}^{trial} - \sigma) + \frac{1}{2}(\alpha_n - \alpha)K(\alpha_n - \alpha). \quad (13)$$

Hàm $\chi(\sigma,\alpha)$ là năng lượng bù bổ sung khi độ tăng giữa 2 trạng thái ứng suất (σ,α). Ta sẽ cực tiểu hóa hàm $\chi(\sigma,\alpha)$ trên miền đàn hồi E_σ được định nghĩa như sau

$$E_\sigma = \{(\sigma,\alpha) \in IR \times IR_+ : f(\sigma,\alpha) \leq 0\}. \quad (14)$$

Ta giả thiết miền E_σ là miền lồi nghĩa là hàm $f : IR \times IR \to IR$ là hàm lồi. Bây giờ ta phát biểu bài toán cực trị:

Tìm $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) \in E_\sigma$ sao cho $\chi(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \underset{(\sigma,\alpha)\in E_\sigma}{Min}\ \chi(\sigma,\alpha)$, (15)

trong đó $E > 0$ và $K > 0$. Bài toán (15) là tìm cực tiểu với (σ,α) thoả mãn ràng buộc $f(\sigma,\alpha) \leq 0$, ta có thể dùng phương pháp nhân tử Lagrange, và hơn thế nữa trong lý thuyết qui hoạch tối ưu Bertseka đã chứng minh được có duy nhất nghiệm. Hàm Lagrange:

$$L(\sigma,\alpha,\Delta\gamma) = \chi(\sigma,\alpha) + \Delta\gamma\, f(\sigma,\alpha) \quad (16)$$

và bài toán tìm cực trị có điều kiện trở về bài toán cực trị tư do của hàm Lagrange.

Nếu $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) \in E_\sigma$ thỏa (15) thì điều kiện cần là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \sigma}(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, \Delta\gamma) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha}(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, \Delta\gamma) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

với các ràng buộc thêm là:

$$\begin{cases} \Delta\gamma \geq 0, f(\sigma, \alpha) \leq 0, \\ \Delta\gamma\, f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Chú ý $f = f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0$ suy ra $\dot{f}_\sigma = sign(\sigma)$, nên từ (17) ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{E}(\sigma_{n+1}^{trial} - \sigma) + \Delta\gamma\, sign(\sigma) = 0, \\ -k(\alpha_n - \alpha) + \Delta\gamma\, \dot{f}_\alpha = 0. \end{cases} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta\gamma\, sign(\sigma_{n+1}), \\ -K(\alpha_n - \alpha + \Delta\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma. \end{cases}$$

Điều này trùng với phương trình Return - mapping. □

RETURN-MAPPING ALGORITHM FOR 1-D ELASTIC-PLASTIC PROBLEM

Nguyen Phu Vinh

Department of Information Technology, College of Industry 4, HoChiMinh City

ABSTRACT:

We present the system of local constitutive equations of the one dimension elastic-plastic problem, after that we prove the existence and uniqueness, contractivity of the solution, next we describes the algorithm return-mapping for plastic-isotropic hardn-ing. Finally we show that by minimizing the complementary energy functional, we obtain equivalent result with the algorithm return-mapping.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] ***S.S. Rao***, The finite element method in engineering, USA, 1988.

[2] ***J. Owen, E. Hinton***, The finite element method in plasticity, UK, 1980.

[3] ***J.C. Simo, T.J.R. Hughes***, Computational inelasticity, Stanford 1998.

[4] ***L.M. Khachanop***, Cơ sở lý thuyết dẻo, Nhà xuất bản Đại học &Trung học chuyên nghiệp, 1987.