XÁC ĐỊNH THẾ BÌNH THƯỜNG TỪ MỘT CÔNG THỨC TRỌNG LỰC BÌNH THƯỜNG ĐỂ THÀNH LẬP DỊ THƯỜNG THẾ

Huỳnh Hữu Nghĩa, Trần Văn Nhạc
Bộ môn Vật lý Trái đất, Khoa Vật lý, trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 12 tháng 11 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 14 tháng 1 năm 2003)

TÓM TẮT: Cũng như dị thường trọng lực, dị thường thế cũng được sử dụng làm dữ liệu cho một số công thức, như công thức tính độ lệch dây dọi, độ cao geoid....Tuy nhiên, trước đây không có máy đo thế, cho nên các công thức chứa dị thường thế không có ý nghĩa thực tiễn. Ngày nay, thế trọng lực Trái đất cùng thế bình thường được xác định qua số liệu vệ tinh. Tuy nhiên, các thế bình thường xác định qua vệ tinh không liên hệ gì với công thức trọng lực bình thường cổ điển (Helmert, Cassini), mà một số quốc gia vẫn còn tiếp tục sử dụng, như nước ta sử dụng công thức Helmert. Trong bài báo này, công thức cho thế bình thường được tác giả rút ra từ một công thức trọng lực bình thường tuỳ ý, phục vụ cho việc thành lập dị thường thế cùng một hệ thống và bổ sung cho các công thức trọng lực bình thường cổ điển hiện còn khuyết phần thế bình thường, sao cho thế và lực được đồng bộ.

I. GIỚI THIỆU

Trước khi có vệ tinh nhân tạo (1957), việc xác định thế bình thường của một ellipsoid quay có độ dẹt α, bán trục lớn a (tức bán kính xích đạo R), tích hằng số hấp dẫn với khối lượng fM, vận tốc góc ω cho trước là bài toán thuận của Molođenxki từ thập niên 50. Trước đó, Clairaut đã giải bài toán trên cho spheroid vào năm 1743 và ông đã tìm ra biểu thức cho cả thế lẫn giá trị trọng lực phân bố trên mặt spheroid. Nay, các công thức và kết quả của họ đã trở nên lạc hậu, vì có độ chính xác thấp. Shimbiriev đã nói rằng:" *Song các công thức nhận được trên đây đã không còn thỏa mãn ngành trắc địa từ cuối thế kỷ qua, bởi vì không đủ độ gần đúng với điều kiện của Trái đất thực* " [13, tr. 117]. Khác với Clairaut và Molođenxki, bài toán của chúng tôi đặt ra là bài toán ngược: cho biết công thức trọng lực bình thường, đi tìm thế bình thường và các tham số thế và trắc địa của hê thống. Chúng tôi sử dụng các phương trình mới và kỹ thuật giải tự động bằng máy tính. Tuy không sử dụng đến số liệu vệ tinh, nhưng các kết quả hiện đại của trọng lực vệ tinh có thể dùng để đối chiếu. Công thức (không chứng minh) và kết quả tính toán của Bursa [11] đưa ra năm 1975 có thể làm tài liệu tham khảo. Chúng tôi chứng minh rằng có đủ phương trình để từ một công thức trọng lực bình thường, rút ra công thức cho thế bình thường và một hệ thống tham số thế bình thường bằng các dữ kiện ít hơn Bursa.

Nếu giữ lại các điều hoà chủ yếu, bậc 20, 40 cùng thế ly tâm trong chuỗi hàm cầu biểu diễn thế trọng lực, ta có công thức cho thế trọng lực bình thường quan sát trong không gian cách tâm Trái đất một khoảng ρ tại vĩ độ φ:

$$U(\rho,\varphi) = \frac{fM}{\rho}\left[1+\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 C'_{20}P_{20}(\sin\varphi)+\left(\frac{R}{\rho}\right)^4 C'_{40}P_{40}(\sin\varphi)\right]+\frac{\omega^2\rho^2}{3}\left[1-P_{20}(\sin\varphi)\right] \qquad (1)$$

Trong đó f – hằng số hấp dẫn. M – khối lượng Trái đất. $P_{20}(\sin\varphi)$, $P_{40}(\sin\varphi)$ - hàm liên kết Legendre, C'_{20}, C'_{40}, q, fM – các tham số và bán kính xích đạo R của spheroid cần phải xác định từ các hằng số $\gamma_e, \beta_1, \beta_2, \alpha$ (độ dẹt) kèm theo công thức trọng lực bình thường cổ điển và ω - vận tốc quay của Trái đất, khá ổn định, coi như biết trước bổ sung cho dữ kiện của chúng tôi.

Ký hiệu q = $\dfrac{\omega^2 R^3}{fM}$ [11]; thay $P_{20}(\sin\varphi) = \dfrac{3}{2}\sin^2\varphi - \dfrac{1}{2}$,

$P_{40}(\sin\varphi) = \dfrac{35}{8}\sin^4\varphi - \dfrac{15}{4}\sin^2\varphi + \dfrac{3}{8}$ vào (1) và gán vế phải của (1) cho hằng số U₀ , ta có phương trình mặt spheroid :

$$\frac{fM}{\rho}\left[1 + \frac{R^2}{\rho^2}C'_{20}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \frac{R^4}{\rho^4}C'_{40}\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2}q\left(1 - \sin^2\varphi\right)\right] = U_0 \qquad (2)$$

U_0 chính là thế bình thường trên mặt spheroid, nếu thay vào (2) tọa độ $\rho = R$ – bán kính xích đạo spheroid, $\varphi = 0$ [10], ta có:

$$U_0 = \frac{fM}{R}\left[1 - \frac{1}{2}C'_{20} + \frac{3}{8}C'_{40} + \frac{1}{2}q\right] \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) rút ρ bằng phương pháp lặp, khai triển dùng phép gần đúng [4], nhóm các số hạng lại, ta được phương trình bán kính spheroid:

$$\rho = R\left[1 + A_{00} + A_{20}P_{20}(\sin\varphi) + A_{40}P_{40}(\sin\varphi)\right] \qquad (4)$$

Các hệ số: A_{00} , A_{20} , A_{40} chứa q, C'_{20}, C'_{40}.

Công thức trọng lực bình thường, được tính gần đúng bằng đạo hàm riêng của thế (1) theo ρ:

$$\gamma = \frac{fM}{\rho^2}\left[1 + 3\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 C'_{20}P_{20}(\sin\varphi) + 5\left(\frac{R}{\rho}\right)^4 C'_{40}P_{40}(\sin\varphi) - \frac{2}{3}q\left(\frac{R}{\rho}\right)^{-3}\left\langle 1 - P_{20}(\sin\varphi)\right\rangle\right] \qquad (5)$$

Thay ρ rút từ (4) và các số hạng A_{00}, A_{20}, A_{40} vào (5); thực hiện phép tính ta được :

$$\gamma = \gamma_{00} + \gamma_{20}P_{20}(\sin\varphi) + \gamma_{40}P_{40}(\sin\varphi) \qquad (6)$$

Với các hệ số điều hoà tính chính xác đến 10^{-9} như sau:

$$\gamma_{00} = \frac{fM}{R^2}\Big(1 - \frac{1}{3}q + \frac{3}{5}q^2 - C'_{20} - \frac{3}{5}qC'_{20} - \frac{83}{35}q^2C'_{20} - \frac{8}{5}C'^2_{20} - \frac{17}{210}qC'^2_{20} +$$
$$\frac{3}{4}C'_{40} + \frac{5}{4}qC'_{40} + \frac{407}{140}q^2C'_{40} + \frac{3}{10}C'^2_{2}C'_{40} + \frac{8}{9}C'^2_{40} - \frac{7}{3}qC'_{20}C'_{40}\Big)$$

$$\gamma_{20} = \frac{fM}{R^2}\Big(\frac{4}{3}q - \frac{1}{7}q^2 + C'_{20} + \frac{20}{7}qC'_{20} + \frac{1264}{147}q^2C'_{20} - \frac{79}{7}C'^2_{20} - \frac{395}{42}qC'^2_{20} -$$
$$\frac{121}{84}qC'_{40} - \frac{135}{28}C'_{20}C'_{40} - \frac{57}{14}C'^2_{20}C'_{40}\Big) \qquad (7)$$

$$\gamma_{40} = \frac{fM}{R^2}\Big(-\frac{16}{35}q^2 - \frac{96}{35}qC'_{20} - \frac{65}{27}q^2C'_{20} - \frac{144}{35}C'^2_{20} - \frac{438}{385}qC'^2_{20} + 3C'_{40} +$$
$$\frac{422}{231}qC'_{40} - \frac{684}{77}C'_{20}C'_{40} - \frac{36}{35}C'^2_{40}\Big)$$

Việc rút ra các hệ số của các điều hòa trên không khác gì phân tích điều hòa bằng tay, nên thường nhầm lẫn, chứa sai số, vô cùng mất thời gian. Nhờ chương trình Mathematica 4.0, chúng tôi đã thực hiện nhanh chóng, chính xác.

Mặt khác, trong biểu thức (6) thay :

$P_{20}(\sin\varphi)$, $P_{40}(\sin\varphi)$, và $\sin^4\varphi = \sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$, ta được:

$$\gamma = (\gamma_{00} - \frac{1}{2}\gamma_{20} + \frac{3}{8}\gamma_{40}) + \left(\frac{3}{2}\gamma_{20} + \frac{5}{8}\gamma_{40}\right)\sin^2\varphi - \frac{35}{32}\gamma_{40}\sin^2 2\varphi \tag{8}$$

So sánh (8) với công thức trọng lực bình thường dạng cổ điển cho spheroid [1], [13]:

$$\gamma = \gamma_e\left(1 + \beta_1\sin^2\varphi - \beta_2\sin^2 2\varphi\right) = \gamma_e + \gamma_e\beta_1\sin^2\varphi - \gamma_e\beta_2\sin^2 2\varphi \tag{9}$$

Ta rút ra mối liên hệ:

$$\begin{aligned}
\gamma_e &= \gamma_{00} - \frac{1}{2}\gamma_{20} + \frac{3}{8}\gamma_{40}\\
\beta_1 &= \frac{1}{\gamma_e}\left(\frac{3}{2}\gamma_{20} + \frac{5}{8}\gamma_{40}\right)\\
\beta_2 &= \frac{1}{\gamma_e}\frac{35}{32}\gamma_{40}
\end{aligned} \tag{10}$$

Mối liên hệ ngược:

$$\begin{aligned}
\gamma_{00} &= \gamma_e\left(1 + \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{8}{15}\beta_2\right)\\
\gamma_{20} &= \gamma_e\left(\frac{2}{3}\beta_1 - \frac{8}{21}\beta_2\right)\\
\gamma_{40} &= \frac{32}{35}\gamma_e\beta_2
\end{aligned} \tag{11}$$

Shimbiriev [13] chỉ rút ra đến công thức (11) từ (9) mà thôi. Kết hợp mối quan hệ (7) và (11), bỏ qua các các đại lượng bé bậc 2 và 3 trong (7), ta có gần đúng:

$$\begin{aligned}
\frac{fM}{R^2}\left(1 - \frac{1}{3}q - C'_{20} + \frac{3}{4}C'_{40}\right) &= \gamma_e\left(1 + \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{8}{15}\beta_2\right)\\
\frac{fM}{R^2}\left(\frac{4}{3}q + C'_{20}\right) &= \gamma_e\left(\frac{2}{3}\beta_1 - \frac{8}{21}\beta_2\right)\\
\frac{fM}{R^2}\left(3C'_{40}\right) &= \frac{32}{35}\gamma_e\beta_2
\end{aligned} \tag{12}$$

Từ (4) cho ρ ứng với 0^0 và 90^0, ta có: $\alpha = \frac{q}{2} - \frac{3C'_{20}}{2} - \frac{5C'_{40}}{8}$, còn $q = \frac{\omega^2 R^3}{fM}$ (13)

Giải hệ năm phương trình (12), (13), ta có:

$$\begin{aligned}
C'_{20} &= -\frac{2\alpha}{3} + \frac{14(\alpha + \beta_1 + \alpha\beta_1)}{105 + 63\beta_1 - 104\beta_2}\\
C'_{40} &= \frac{(160 + 64\alpha)\beta_2}{525 + 315\beta_1 - 520\beta_2}\\
q &= \frac{42\alpha + 42\beta_1 + 42\alpha\beta_1 - 16\beta_2}{105 + 42\beta_1 - 104\beta_2}\\
fM &= \frac{(105 + 42\beta_1 - 104\beta_2)(42\alpha + 42\beta_1 + 42\alpha\beta_1 - 16\beta_2)^2\gamma_e^3}{(105 + 6\alpha)^3\omega^4}\\
R &= \frac{(42\alpha + 42\beta_1 + 42\alpha\beta_1 - 16\beta_2)\gamma_e}{(105 + 6\alpha)\omega^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Trị số thế bình thường trên mặt spheroid U_0 là hằng và suy từ (3) ta có :

$$
\begin{aligned}
U_0 = \Big\{ 2\big\langle 21(\alpha + (1+\alpha)\beta_1) - 8\beta_2 \big\rangle \big[2205\big\langle 5(15+7\alpha) + \beta_1(85+42\alpha+(25+13\alpha)\beta_1)\big\rangle - \\
84(3825+1470\alpha+2(1105+437\alpha)\beta_1)\beta_2 + 416(375+112\alpha)\beta_2^2 \big] \gamma_e^2 \Big\} / \\
\big[135(35+2\alpha)^2 \omega^2 (105+63\beta_1-104\beta_2)\big]
\end{aligned}
\qquad (14b)
$$

Khác với Bursa [11], trên đây chúng tôi đã coi fM là ẩn số và tùy thuộc từng mô hình.

2. ÁP DỤNG TÍNH TOÁN

Để làm ví dụ, chúng tôi chọn công thức trọng lực bình thường Cassini (1930) ứng với ellipsoid có độ dẹt: $\alpha = 1/297,0$ [6], [7] để áp dụng:

$$\gamma = 978,049(1 + 0,0052884\sin^2\varphi - 0,0000059\sin^2 2\varphi) \qquad (15)$$

Thay các hệ số của (15) cùng α và ω [8] lần lượt vào (14) và (14b) ta được: bộ tham số thế gồm : fM, ω, R, α, C'_{20}, C'_{40}, q, U_0:

$$
\begin{aligned}
C'_{20} &= -1091,892.10^{-6} \\
C'_{40} &= 1,7948.10^{-6} \\
fM &= 398645,502.10^{9}\ m^3s^{-2} \\
\omega &= 7,292115.10^{-5}\ s^{-1} \\
q &= 3461,084.10^{-6} \\
\alpha &= 1/297,0 \\
R &= 6378187,698\ m \\
U_0 &= 62643,698.10^{3}\ m^2s^{-2}
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Giá trị bán kính của chúng tôi tính cho mặt đẳng thế spheroid, có khác ellipsoid trắc địa của Hayford mà Cassinis đã chọn 6378388 m. Để so sánh ta có : Hệ thống WGS năm 1984: 6378137 m. Hệ thống năm 1990: 6378136 m [5]. Bán kính của ellipsoid Hayford hơi lớn. Trong công thức (không chứng minh) dưới đây cho thế U_0 bình thường, Bursa [11] đã coi fM, q, là được cho trước.

$$U_0 = \sqrt{fM\gamma_e}\left[1 + \frac{1}{6}\beta_1 + \frac{2}{3}q + q\beta_1 - \frac{5}{6}q^2 - \frac{23}{120}\beta_1^2 - \frac{4}{15}\beta_2\right]$$

Các công thức cổ điển chấp nhận R, fM, q là được cho trước. Theo qui ước hiện đại, chúng là các đại lượng cần xác định và phụ thuộc vào từng mô hình. hệ thống. Để so sánh, tham khảo, dưới đây là các giá trị thế bình thường U_0 do Bursa tính [11]:

Helmert (1909)	Cassini (1930)	IAG (1967)
$62636,95.10^3\ m^2s^{-2}$	$62639,79.10^3\ m^2s^{-2}$	$62637,03.10^3\ m^2s^{-2}$

3. NHẬN XÉT, KẾT LUẬN

Việc bổ sung cho các công thức trọng lực bình thường cổ điển, công thức thế bình thường tương ứng (cho không gian ngoài và trên bề mặt spheroid) có ý nghĩa thực tiễn, vì các quốc gia và liên quốc gia hiện vẫn còn sử dụng công thức trọng lực bình thường cổ điển, ví dụ như nước ta sử dụng công thức của Helmert, chứ không sử dụng công thức quốc tế. Dị thường thế sử dụng để tính độ lệch dây dọi ở Việt Nam và một số nước phải là dị thường thế Helmert. Công thức thế bình thường là một bổ sung cho trường trọng lực bình thường cổ điển, giúp cho việc lập dị thường thế để xác định độ lệch dây dọi hay độ cao geoid cùng một hệ thống. Trong bài báo sau, chúng tôi sẽ trình bày ứng dụng của dị thường thế vào việc tính độ cao geoid cho toàn thế giới (quasigeoid) bằng công thúc Bruns, mà không sử dụng dị thường trọng lực và chuỗi Stokes.

DETERMINATION OF THE NORMAL GRAVITY POTENTIAL FROM A NORMAL GRAVITY FORMULA FOR ESTABLISHING THE ANOMALY OF POTENTIAL

Huynh Huu Nghia, Tran Van Nhạc

ABSTRACT: The normal gravity potential is easily determined by satellites, but it has no relation with some classical normal gravity formulae, such as Cassini's or Helmert's formulae, which are using in some countries. This paper presents a formula for determining the normal gravity potential and it's parameters from a classical normal gravity formula with given flatenning α and angular velocity ω of the Earth. Parameters fM and equatorial radius R are to be determined. The normal potential is used for establishing the anomaly of gravity potential (perturbating potential), which is necessary for determining the deflections of the vertical, the heights of the geoid by Bruns' formula, instead of using gravity anomaly in Stokes' formula or Stokes' exspansion. In the next paper, we shall present the application of our formula for determining the geoid heights.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Caputo. M. *The Gravity Field Of The Earth.* Academic Press. New York. London. 1967.

[2] Cheng M.K., Shum C.K., Tapley. "Determination of long term changes in Earth's gravity field from satellite laser ranging observation ". *JGR vol 102, No B10, October 10, 1997. pp. 22,377 –22,390.*

[3] Cheng M.K., Bryon D. Tabley. *" Seasonal variations in low degree zonal harmonics of Earth's gravity field from satellite laser ranging observation ". JGR vol 104, No B2, Feb 10, 1999. pp. 2667 –2681.*

[4] Dương Thủy Vỹ. *Phương Pháp Tính*, Nxb. Khoa Học Kỹ Thuật. Hà Nội. 1999

[5] Groushinsky N.P., Tran Van Nhac " The new in investigation of Earth gravity field, satellite altimetry, geoid and sea topographic surface." *MGP. Geoinformmark Moskva. 1992 (in Russian) pp . 6-26*

[6] Heiskanen W.A., Vening Meinesz F.A. *The Earth and it's gravity field*, Mc Graw – Hill Book Company, INC New York. 1958 . pp. 279-294

[7] Nerem R,S., Jekell C., Kaula W.M., "Gravity field determination and characteristics: Retrospective and prospective". *JGR vol 100, No B8, August 10, 1995. pp. 15053- 15074*

[8] Tôn Tích Ái, *Trọng lực và thăm dò trọng lực*, Đại học Quốc gia Hà Nội, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội. 1998. tr.14-22

[9] Trần Văn Nhạc, Nguyễn Thành Vấn. *Lý Thuyết Thế và Trường Trong Địa Vật Lý* (tập 1). Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên TP.Hồ Chí Minh. 1997. tr. 87-112

[10] Trần Văn Nhạc. *Trường trọng lực.* NXB Đại học Quốc gia TPHCM. 2002. tr.11-27

[11] БУРША М. *ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.* Часть II Динамическая космическая геодезия. изд "Недра". Москва, 1975.250-260 с

[12] ГРУШИНСКИЙ Н. П. *ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ* , Москва, "Наука" 1976.222-238 с

[13] ШИМБИРЬЕВ Б. Л., *ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ*, МОСКВА, "Недра" 1975.114-122 с