XÁC ĐỊNH DỊ THƯỜNG TỈ TRỌNG TỪ DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC ĐO TRÊN MẶT: TUYẾN TÍNH HÓA VÀ CHỈNH HÓA BẰNG PHƯƠNG PHÁP MOMEN*

Đặng Đình Áng[(1)], Võ Thị Thanh Nhiều[(2)], Đinh Ngọc Thanh[(1)]
[(1)]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM, [(2)]Trường Cao đẳng Tây Ninh
(Bài nhận ngày 27 tháng 11 năm 2002)

TÓM TẮT: *Bài toán xác định hình thù của một vật thể mà tỉ trọng khác với tỉ trọng của môi trường xung quanh là một bài toán cơ bản trong Địa Vật Lý Ứng Dụng và nhiều phương pháp đã được triển khai để xử lý. Trong bài này, phương pháp tuyến tính hóa trong xấp xỉ cho trường hợp 2 chiều được triển khai trong trường hợp đo lường gradien tỉ trọng trên mặt. Bài toán là không chỉnh và được chỉnh hóa bằng phương pháp momen.*

Bài toán xác định hình thù của một vật thể Ω trong lòng trái đất có tỉ trọng khác với tỉ trọng của môi trường xung quanh là một bài toán cơ sở trong Địa Vật Lý Ứng Dụng. Phương pháp được dùng thường là phương pháp trọng lực. Trong phương pháp này, người ta thường đo dị thường trọng lực tạo nên bởi sự khác biệt giữa tỉ trọng của vật thể so với tỉ trọng của môi trường xung quanh. Một phương pháp nữa dựa trên đo lường gradien trọng lực (thay vì dị thường tỉ trọng). Trong bài này, chúng tôi xét trường hợp 2 chiều không gian. Tính duy nhất của bài toán đã được chứng minh trong [1]. Bài toán tuyến tính hóa đã được chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov trong [1]. Trong bài này, chúng tôi sẽ chỉnh hóa bằng phương pháp momen [2].

Sau đây, chúng tôi mô hình trái đất bằng nửa mặt phẳng $(x,z): z \le H$, với $H > 0$. Gọi ρ là tỉ trọng tương đối của Ω, nghĩa là hiệu giữa tỉ trọng của Ω và tỉ trọng của môi trường xung quanh. Giả định $\rho = \rho(x)$ với mọi $(x,z) \in \Omega$.

Đặt $U = U(x,z)$ là thế vị trọng lực sinh ra trong Ω:

$$U(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \rho(\xi)\ln\left[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2\right]dv$$

Dị thường trọng lực sinh ra trong Ω là:

$$-\frac{\delta U}{\delta z} = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{\rho(\xi)(z-\zeta)}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}dv \tag{1}$$

và gradien sinh ra trên mặt $z = H$:

$$-\frac{\delta^2 U}{\delta z^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \rho(\xi)\frac{\delta}{\delta\xi}\left(\frac{H-\zeta}{(x-\xi)^2 + (H-\zeta)^2}\right)dv \tag{2}$$

Để giản dị vấn đề, chúng ta giả định:

$$\Omega = \{(x,z): 0 < x < 1, 0 < z < \sigma(x)\}$$

với $\sigma: [0,1] \to R, \sigma(0) = \sigma(1) = 0$ và σ là C^1.

Gọi $f_0 = f_0(x)$ là gradien trọng lực trên mặt $z = H$. Thì:

$$\int_0^1 \frac{\rho(\xi)(H-\sigma(\xi))}{(x-\xi)^2+(H-\sigma(\xi))^2}d\xi = -2\pi f(x) = f(x) \tag{3}$$

Nay, với M lớn và $n \geq 1$, ta có khai triển:

$$\frac{\rho(\xi)(H-\sigma(\xi))}{(M+n+\xi)^2+(H-\sigma(\xi))^2} = \frac{\rho(\xi)(H-\sigma(\xi))}{(M+n+\xi)^2\left[1+\left(\frac{H-\sigma(\xi)}{M+n+\xi}\right)^2\right]}$$

$$= \rho(\xi)\frac{(H-\sigma(\xi))}{(M+n+\xi)^2} - \frac{\rho(\xi)(H-\sigma(\xi))^2}{(M+n+\xi)^4} + \ldots$$

$$\approx \frac{\rho(\xi)(H-\sigma(\xi))}{(M+n+\xi)^2} \tag{4}$$

Chúng ta xét bài toán momen sau đây:

$$\int_0^1 g_n(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \mu_n \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

trong đó:

$$\varphi(\xi) = \rho(\xi)(H-\sigma(\xi)) \tag{6}$$

và

$$g_n(\xi) = \frac{1}{(x_n+\xi)^2} \tag{7}$$

với $x_n > M$, (x_n) bị chặn và $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.

Chú ý là hàm số

$$h(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(x+\xi)^2}d\xi \tag{8}$$

là hàm giải tích theo x với $x > M$.

Nếu $h(x_n) = 0 \ \forall n = 1, 2, \ldots$ thì $h(x) = 0 \ \forall x > M$

Từ đó ta suy ra là $\varphi(\xi) = 0$, và bài toán momen có nhiều nhất một nghiệm.

Tiếp theo chúng ta xét vấn đề xấp xỉ bài toán momen (5). Trước hết, bài toán là không chỉnh. Chúng tôi sẽ áp dụng phương pháp chỉnh hóa bằng cách khai triển hữu hạn như đã trình bày trong [2] và [3]. Trước hết, họ (g_n) được trực chuẩn (theo chuẩn $L_2(0,1)$) theo phương pháp Gram-Schmidt, việc này có thể thực hiện được vì họ (g_n) độc lập tuyến tính (theo nghĩa đại số).

Quả vậy, giả sử tồn tại $x_1, \ldots, x_k$ sao cho:

$$\frac{\alpha_1}{(x_{n_1}+\xi)^2} = \frac{\alpha_2}{(x_{n_2}+\xi)^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{(x_{n_k}+\xi)^2} \qquad 0 < \xi < 1 \tag{9}$$

Chúng ta chứng minh $\alpha_1 = 0$. Do thác triển giải tích, ta có:

$$\frac{\alpha_1}{(x_{n_1}+z)^2} = \frac{\alpha_2}{(x_{n_2}+z)^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{(x_{n_k}+z)^2} \qquad \forall z \in C \setminus \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\} \tag{10}$$

Từ đó suy ra:

$$\alpha_1 = 0 \tag{11}$$

Tương tự ta có $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$: mâu thuẫn.

Vậy họ (g_n) là độc lập tuyến tính, điều phải chứng minh.

Gọi (φ_n) là dãy trực chuẩn xây dựng theo phương pháp Gram-Schmidt đề cập trên đây. Chúng ta triển khai φ theo (φ_n). Nếu bài toán momen (5) có nghiệm thì khai triển này hội tụ tới nghiệm. Song thường là bài toán vô nghiệm. Giả định là sai số giữa vế thứ hai $\mu = (\mu_n)$ (là dữ kiện đo được) và vế thứ hai chính xác $\mu^0 = (\mu_n^0)$ nhỏ hơn $\varepsilon > 0$ (theo nghĩa nào đó, ví dụ theo chuẩn l_∞) thì khai triển sẽ được ngừng lại ở một số $N(\varepsilon)$ thích hợp:

$$\sum_{1}^{N(\varepsilon)} (\varphi, \varphi_n) \tag{12}$$

và sai số giữa khai triển (12) và nghiệm chính xác sẽ nhỏ hơn $\eta(\varepsilon) > 0$ mà $\eta(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$. Chi tiết chứng minh độc giả có thể tham khảo [4]

IDENTIFICATION OF MASS ONHOMOGENEITY FROM GRAVITY ANOMALIES & LINEARIZATION AND REGULARIZATION BY MOMENT PROBLEMS

Dang Dinh Ang, Vo Thi Thanh Nhieu, Dinh Ngoc Thanh

ABSTRACT: The problem of identifying an object inside of the earth by gravimetric method is a fundamental problem in Applied Geophysics and is considered by many different methods. In this paper, by using the gravity gradient data measured on the surface of the earth, a two – dimensional problem is approximated by a linear one. The latter problem is ill – posed and is regularized via moment problems.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D.D.Ang, D.N.Thanh and V.V.Thanh. *Identification of mass inhomogeneity from surface gravity anomalies* Geophysical Journal International 143 n0 2 2000

[2] D. D. Ang, R. Gorenflo, V. K. Le and D. D. Trong. *Moment Theory and some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction.* Springer Lecture Notes in Mathematics, Heidelberg n0 1792 (2002)

[3] D.D.Ang, V.K.Le and D.D.Trong. *Reconstruction of an analytic function from a sequence of values: existence and regularization* selected papers from Proceedings, 9th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Kluver Academic Publisher, to appear 2002-2003

[4] D. D. Ang, L. K. Vy and R. Gorenflo. A regularization method for the moment problem in *Inverse Problems. Principles and Applications in Geophysics technology and Medicine*, Math. Research 14, Akademic Verlag (1993)