

# ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ LỒI TUẦN TỰ CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU CẤU TRÚC COMPOSITE

Ngô Thành Phong, Nguyễn Thời Trung

Khoa Toán Tin, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 17 tháng 05 năm 2003)

**TÓM TẮT:** Bài báo nêu giải thuật và trình bày chi tiết phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu và các ràng buộc là hàm ẩn. Sau đó áp dụng giải số cho bài toán tối ưu hướng sợi của tấm composite nhiều lớp ở trạng thái ứng suất phẳng.

## 1. Giới thiệu

Các bài toán tối ưu trong cơ học thường là các bài toán lớn đòi hỏi quá trình thành lập và tính toán số (nhất là phương pháp phần tử hữu hạn) ở mỗi bước lặp. Hàm mục tiêu và các ràng buộc là các hàm ẩn (liên quan đến độ cứng, biến dạng, ứng suất, chuyển vị hay trọng lượng công trình ..vv). Ta không thể dùng các phương pháp tối ưu hóa truyền thống như phương pháp hàm phạt ngoài, hàm phạt trong, phương pháp nhân tử Lagrange, ... để giải trực tiếp được vì những phương pháp này đòi hỏi hàm mục tiêu và các ràng buộc phải là các hàm hiện theo biến thiết kế. Do đó việc áp dụng các phương pháp mới để có thể giải quyết một lớp các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu và các ràng buộc là các hàm ẩn là một nhu cầu cụ thể. Phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự là một trong các phương pháp mới đó.

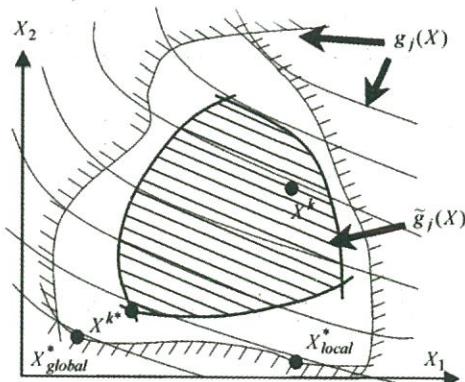
## 2. Phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự

Bài toán tối ưu bao gồm việc cực tiểu hóa một hàm mục tiêu  $g_0(X)$  chịu các ràng buộc ứng xử  $g_j(X)$  [2].

$$\min g_0(X), \quad \begin{cases} g_j(X) \leq g_j^{\max} & j = 1, \dots, m \\ \underline{X}_i \leq X_i \leq \bar{X}_i & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.1)$$

Các hàm  $g_j(X)$ ,  $j=0, \dots, m$  là các ứng xử cấu trúc (ví dụ ứng suất, chuyển vị, độ cứng tổng thể) được biểu diễn dưới dạng các hàm ẩn theo các biến thiết kế  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Các biến thiết kế này có thể là chiều dày của một vài phần tử cấu trúc, các thông số hình học, hay hướng sợi của cấu trúc composite. Các cận trên  $\bar{X}_i$  và dưới  $\underline{X}_i$  định nghĩa các giới hạn kỹ thuật của các biến.

Hình 1 : Một đại diện của bài toán (2.1) và xấp xỉ lồi của nó quanh điểm hiện thời  $X^k$



**I. TÌM KIẾM** Tiếp cận các khái niệm xấp xỉ, ta thay thế bài toán tối ưu hóa ban đầu (2.1) bằng một chuỗi các bài toán con xấp xỉ hiện (hình 1), bằng cách khai triển chuỗi Taylor bậc 1 và 2 các hàm cấu trúc, và biểu diễn các khai triển này theo các biến tuyến tính trung gian cụ thể (các biến trực tiếp hay tương hỗ). Từ thông tin ở điểm thiết kế hiện thời, ta tiến hành xấp xỉ các ràng buộc cấu trúc  $\tilde{g}_j(X)$ . Các xấp xỉ này thường lồi và có thể tách được. Sau đó ta có thể thành lập một bài toán đối ngẫu để giải các bài toán con xấp xỉ hiện này.

#### \* Thuật toán của phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự (hình 2)

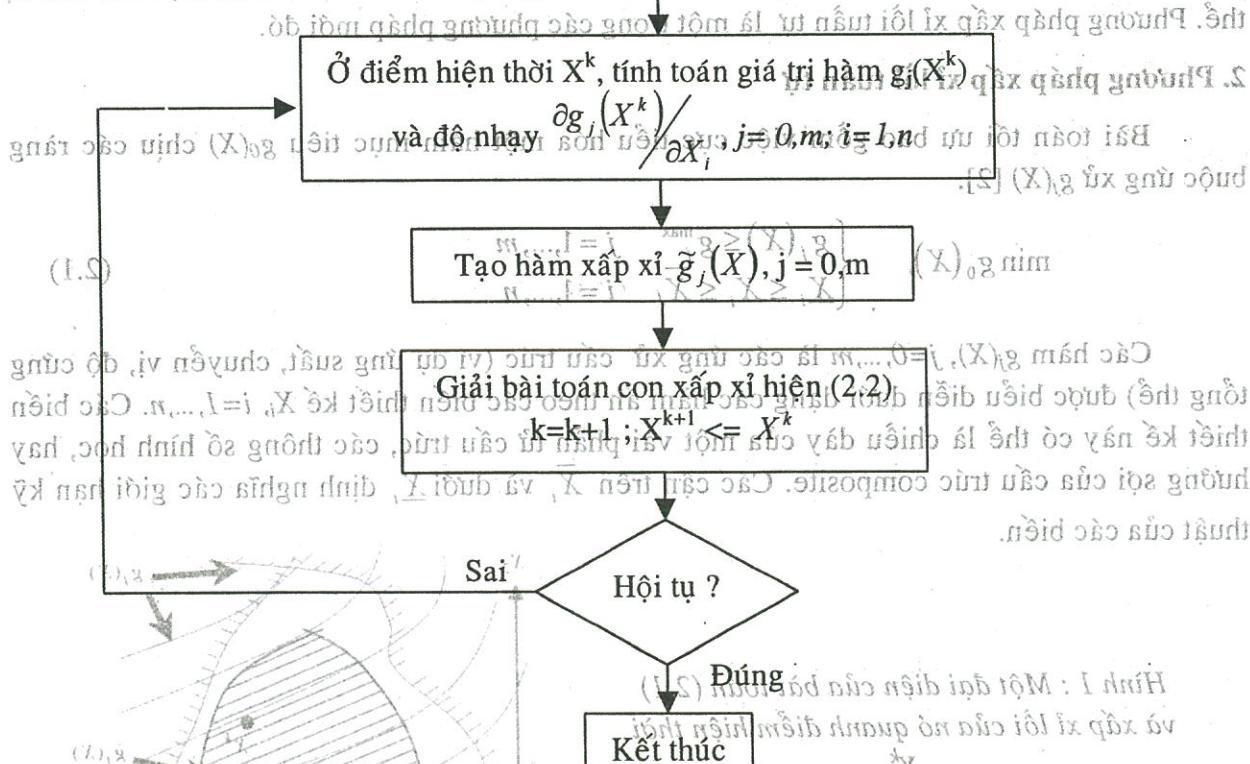
Cách tiếp cận các khái niệm xấp xỉ gồm các bước sau:

- Cho biến thiết kế giá trị ban đầu  $X = X^0$  tại bước lặp  $k=0$ ,
- Tiến hành phân tích PTHH tại giá trị biến thiết kế đầu tiên  $X^0$ , gồm tính toán ứng xử cấu trúc và phân tích độ nhạy.
- Từ kết quả phân tích cấu trúc hiện thời, ta tiến hành xấp xỉ một bài toán con tối ưu hóa dưới dạng sau:

$$\min \tilde{g}_0(X), \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_j(X) \leq g_j^{\max} \quad j = 1, \dots, m \\ X_i \leq \bar{X}_i \leq \underline{X}_i \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (2.2)$$

trong đó  $\tilde{g}_j(X)$  là các ứng xử cấu trúc xấp xỉ. Nghiệm  $X^k$  của bài toán con xấp xỉ sẽ được cập nhật như là một điểm bắt đầu mới trong không gian thiết kế và quá trình tối ưu tiếp tục cho đến khi đạt được hội tụ.

**Bước lặp thứ k=0**  
**Điểm thiết kế ban đầu  $X^k$**



Hình 2 : Giải thuật của phương pháp tối ưu hóa sử dụng phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự

### 3. Các phương pháp xấp xỉ của họ MMA (Method of Moving Asymptotes)

#### 3.1 Các xấp xỉ đơn điệu

Phương pháp Conlin là một xấp xỉ lồi dựa trên khai triển chuỗi Taylor bậc nhất theo các biến trực tiếp và tương hỗ [3]. Xấp xỉ của hàm thiết kế  $g(X)$  dựa trên giá trị hàm và đạo hàm bậc nhất ở điểm thiết kế hiện thời  $X^{(k)}$ .

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^{(k)}) + \sum_{+i} \frac{\partial g_j(X^{(k)})}{\partial X_i} (X_i - X_i^{(k)}) - \sum_{-i} (X_i^{(k)})^2 \frac{\partial^2 g_j(X^{(k)})}{\partial X_i^2} \quad (3.1)$$

ký hiệu  $\sum_{+i}$  và  $\sum_{-i}$  chỉ tổng trên các hệ số có đạo hàm bậc nhất âm hoặc dương.

Svanberg (1987) đã tổng quát hóa phương pháp Conlin bằng việc giới thiệu hai tập hợp các hệ số mới, các tiệm cận dưới và tiệm cận trên,  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$ , để điều chỉnh tính lồi của xấp xỉ theo bài toán được xem xét.

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^{(k)}) + \sum_{+i} p_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{U_i^{(k)} - X_i} - \frac{1}{U_i^{(k)} - X_i^{(k)}} \right) + \sum_{-i} q_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{X_i - L_i^{(k)}} - \frac{1}{X_i - L_i^{(k)} - X_i^{(k)}} \right) \quad (3.2)$$

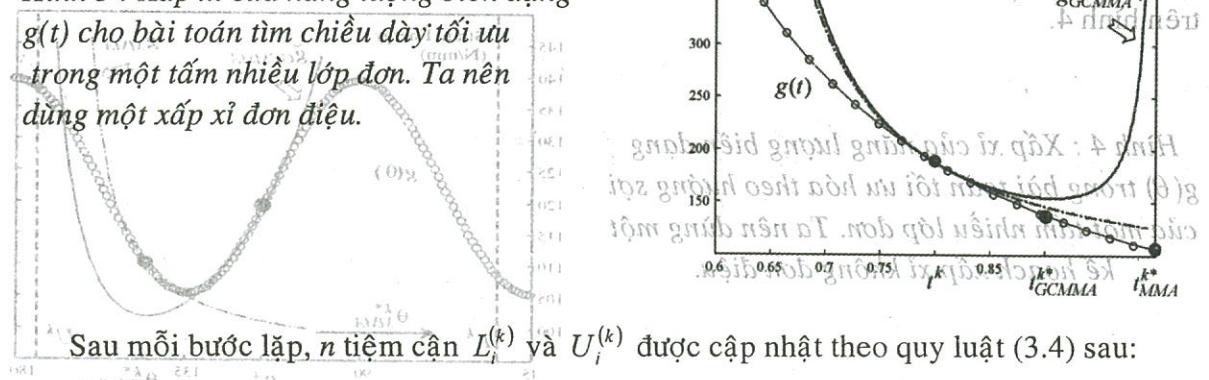
Trong (3.2) chỉ có 1 trong 2 hệ số  $p_{ij}^{(k)}$  hoặc  $q_{ij}^{(k)}$  là khác 0 tại cùng một thời điểm cho một biến thiết kế.

$$p_{ij}^{(k)} = \max \left\{ 0, \left( U_i^{(k)} - X_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial g_j(X^{(k)})}{\partial X_i} \right\} \quad (3.3)$$

Vì thế cho mỗi biến thiết kế  $X_i$ , chỉ có một tiệm cận, hoặc  $L_i^{(k)}$  hoặc  $U_i^{(k)}$ , được sử dụng trong bài toán xấp xỉ tùy theo dấu của đạo hàm bậc nhất  $\partial g_j(X^{(k)}) / \partial X_i$ . Vì vậy, xấp xỉ là đơn điệu, bất kể ứng xử của hàm thật là đơn điệu hay không. Xấp xỉ MMA được minh họa như trong hình 3.

**Hình 3 : Xấp xỉ của năng lượng biên dạng**

g(t) cho bài toán tìm chiều dày tối ưu trong một tấm nhiều lớp đơn. Ta nên dùng một xấp xỉ đơn điệu.



Sau mỗi bước lặp,  $n$  tiệm cận  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$  được cập nhật theo quy luật (3.4) sau:

$$L_i^{(k)} = X_i^{(k)} - s_i (X_i^{(k-1)} - L_i^{(k-1)}) ; \quad U_i^{(k)} = X_i^{(k)} + s_i (U_i^{(k-1)} - X_i^{(k-1)}) \quad (3.4)$$

do Svanberg đề nghị (1987), trong đó các hệ số  $s_i$  được tính toán dựa trên sự thay đổi các giá trị của biến thiết kế tương ứng  $X_i$  trong vòng 3 bước lặp liên tiếp [4].

Cho hai bước lặp đầu tiên:  $s_i = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} L_i^k = x_i^k - 0.5(x_i^{\max} - x_i^{\min}) \\ U_i^k = x_i^k + 0.5(x_i^{\max} - x_i^{\min}) \end{cases} \quad (3.5)$

từ bước lặp thứ 3 trở đi:

$$s_i = \begin{cases} 0.7 & \text{khi } (x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0 \\ 1.2 & \text{khi } (x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) > 0 \\ 1 & \text{khi } (x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Xấp xỉ MMA sử dụng các tiệm cận giống nhau cho tất cả  $m+1$  hàm thiết kế  $g_j(X)$  của bài toán tối ưu. Định nghĩa này không thể hiện tính uyển chuyển trong việc điều chỉnh xấp xỉ của mỗi đáp ứng cấu trúc theo các đặc tính riêng của nó. Từ đó các nhà nghiên cứu đã giới thiệu phương pháp tiệm cận di chuyển tổng quát (GMMA) (Generalized Method of Moving Asymptotes) bằng cách gắn thêm một tiệm cận di chuyển riêng trong mỗi hàm thiết kế, đó là  $L_{ij}^{(k)}$  và  $U_{ij}^{(k)}$  được sử dụng thay thế  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$ :

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^{(k)}) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{U_{ij}^{(k)} - X_i} - \frac{1}{U_{ij}^{(k)} - X_i^{(k)}} \right) + \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{X_i - L_{ij}^{(k)}} - \frac{1}{X_i^{(k)} - L_{ij}^{(k)}} \right) \quad (3.7)$$

trong đó các tiệm cận cho mỗi ràng buộc được tính toán bởi:

$$L_{ij}^{(k)} = X_i^{(k)} - s_j(X_i^{(k-1)} - L_{ij}^{(k-1)}) \quad ; \quad U_{ij}^{(k)} = X_i^{(k-1)} + s_j(U_{ij}^{(k-1)} - X_i^{(k-1)})$$

với hệ số  $s_j$  được điều chỉnh sao cho phù hợp với giá trị của hàm ở điểm thiết kế trước.

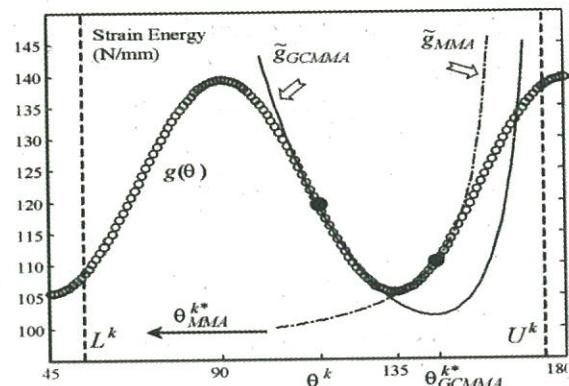
### 3.2 Các xấp xỉ không đơn điệu

Svanberg (1995) đã đưa ra một phiên bản hội tụ tổng thể của phương pháp tiệm cận di chuyển (GCMMA) (Global Convergent version of the Method of Moving Asymptotes):

$$\tilde{g}_j(X) = g_j(X^{(k)}) + \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{U_i^{(k)} - X_i} - \frac{1}{U_i^{(k)} - X_i^{(k)}} \right) + \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(k)} \left( \frac{1}{X_i - L_i^{(k)}} - \frac{1}{X_i^{(k)} - L_i^{(k)}} \right) \quad (3.8)$$

Đây là sự mở rộng của phương pháp MMA (3.2), khi mà cả hai  $p_{ij}^{(k)}$  và  $q_{ij}^{(k)}$  đồng thời khác không. Điều đó có nghĩa rằng bây giờ cả hai  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$  được sử dụng cùng lúc để phát sinh xấp xỉ (3.8). Điều này dẫn đến đặc tính không đơn điệu của xấp xỉ được minh họa trên hình 4.

Hình 4 : Xấp xỉ của năng lượng biến dạng  $g(\theta)$  trong bài toán tối ưu hóa theo hướng sợi của một tấm nhiều lớp đơn. Ta nên dùng một kế hoạch xấp xỉ không đơn điệu.



Ở bước  $k$  của quá trình xấp xỉ, GCMMA được biểu diễn bởi giá trị hàm  $g_j(X^{(k)})$ , các hệ số  $p_{ij}^{(k)}$  và  $q_{ij}^{(k)}$  được tính toán dựa trên đạo hàm bậc nhất, các hệ số không đơn điệu  $\rho_j^{(k)}$ , và  $n$  cặp tiệm cận  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$ . Cụ thể như sau:

$$\text{Nếu } \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} < 0 \Rightarrow \begin{cases} p_{ij}^k = (U_i^k - X_i^k)^2 \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \\ q_{ij}^k = (X_i^k - L_i^k)^2 \left( -\frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{Nếu } \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} > 0 \Rightarrow \begin{cases} p_{ij}^k = (U_i^k - X_i^k)^2 \left( \frac{\partial g_j(X^k)}{\partial X_i} + \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \\ q_{ij}^k = (X_i^k - L_i^k)^2 \frac{\rho_j^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \end{cases} \quad (3.10)$$

Svanberg (1987) đã tính toán các hệ số không đơn điệu và các tiệm cận theo quy luật sao cho đảm bảo tính hội tụ tổng thể của kế hoạch xấp xỉ. Cụ thể:

$\rho_j^k$  phải  $> 0$

$$\text{Cho bước lặp thứ nhất: } \rho^0 = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} \left| \frac{\partial g(x^0)}{\partial X_i} \right| \quad (3.11)$$

$$\text{Cho bước lặp } k, \quad \begin{cases} \rho^k = 2\rho^{k-1} & \text{khi } \tilde{g}^{k-1}(x^k) < g(x^k) \\ \rho^k = \rho^{k-1} & \text{khi } \tilde{g}^{k-1}(x^k) \geq g(x^k) \end{cases} \quad (3.12)$$

Khi  $\rho_j^{(k)} = 0$  ta lại có xấp xỉ MMA đơn điệu.

Svanberg (1995) đã cải tiến độ cong của xấp xỉ GCMMA bằng cách thay thế đạo hàm bậc hai (không phải đạo hàm hỗn hợp) cho hệ số không đơn điệu:

$$p_{ij}^{(k)} = \frac{(U_i^{(k)} - X_i^{(k)})^3}{2(U_i^{(k)} - L_i^{(k)})} \times \left( 2 \frac{\partial g_j(X^{(k)})}{\partial X_i} + (X_i^{(k)} - L_i^{(k)}) \frac{\partial^2 g_j(X^{(k)})}{\partial X_i^2} \right) \quad (3.13)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \frac{(X_i^{(k)} - L_i^{(k)})^3}{2(U_i^{(k)} - L_i^{(k)})} \times \left( -2 \frac{\partial g_j(X^{(k)})}{\partial X_i} + (U_i^{(k)} - X_i^{(k)}) \frac{\partial^2 g_j(X^{(k)})}{\partial X_i^2} \right) \quad (3.14)$$

Ta gọi xấp xỉ này là **GCMMA2**.

Để tránh việc sử dụng các hệ số không đơn điệu  $\rho_j^{(k)}$  trong định nghĩa của GCMMA hay phải tính toán đạo hàm bậc hai trong GCMMA2, M.Bruyneel và C.Fleury (2000) đã phát triển một kế hoạch xấp xỉ MMA dựa trên gradient GBMMA (Gradient Base version of the Method of Moving Asymptotes) bằng cách sử dụng giá trị gradient ở hai bước lặp liên tiếp.

Trong xấp xỉ đầu tiên có tên là **GBMMA1**, các tiệm cận  $L_i^{(k)}$  và  $U_i^{(k)}$  vẫn được tính toán theo công thức cổ điển (3.4). Sau đó các hệ số  $p_{ij}^{(k)}$  và  $q_{ij}^{(k)}$  của xấp xỉ GCMMA (3.8) sẽ được tính toán bằng cách giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_j(X^{(k)})}{\partial X_i} = \frac{p_{ij}^{(k)}}{(U_i^{(k)} - X_i^{(k)})^2} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{(X_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2} \\ \frac{\partial g_j(X^{(k-1)})}{\partial X_i} = \frac{p_{ij}^{(k)}}{(U_i^{(k)} - X_i^{(k-1)})^2} - \frac{q_{ij}^{(k)}}{(X_i^{(k-1)} - L_i^{(k)})^2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Ở đây ta thấy phương pháp GBMMA1 sử dụng giá trị đạo hàm bậc nhất ở hai bước lặp liên tiếp, ở điểm thiết kế hiện thời  $X^{(k)}$  và điểm thiết kế trước đó  $X^{(k-1)}$ .

#### 4. Kết quả số [5]

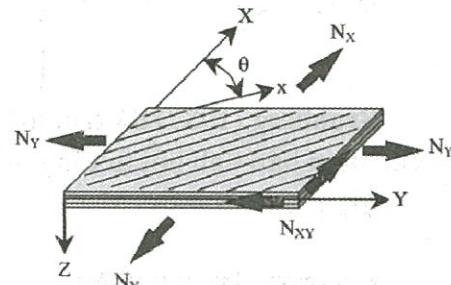
##### \* Đặt bài toán

Hàm mục tiêu cần cực tiểu hóa là năng lượng biến dạng của một tấm composite nhiều lớp đối xứng thuần nhất gồm 6 lớp. Hướng sợi của một lớp sẽ là biến thiết kế, (hai lớp còn lại đã biết hướng sợi, cụ thể lớp 1 có hướng sợi  $\theta_1 = 90^\circ$ , lớp 2 có hướng sợi  $\theta_2 = 0^\circ$ , và hướng sợi lớp 3  $\theta_3$  là biến thiết kế). Chiều dày của mỗi lớp được biết trước  $t = 1 \text{ mm}$ . Tấm nhiều lớp composite chỉ chịu tác dụng của các lực trạng thái ứng suất phẳng [1] (Hình 5). Bài toán tối ưu hóa được trình bày như sau:

$$\min_{\theta} \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon \quad (\text{N/mm}) \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

##### \* Dữ liệu bài toán được trình bày chi tiết như sau:

$E_x = 1.8E5 \text{ (N/mm}^2)$	: Mô đun đàn hồi trục x
$E_y = 0.8E4 \text{ (N/mm}^2)$	: Mô đun đàn hồi trục y
$\nu_{xy} = 0.3$	: Hệ số Poisson
$G_{12} = 0.6E4 \text{ (N/mm}^2)$	: Mô đun trượt
$N_x = 3750 \text{ (N)}$	: Lực pháp theo phương X
$N_y = 2500 \text{ (N)}$	: Lực pháp theo phương Y
$N_{xy} = 5000 \text{ (N)}$	: Lực tiếp theo phương XY
$\theta_h = [90, 0, \theta_3, 0, 90]$	: Hướng sợi của các lớp so với phương X.

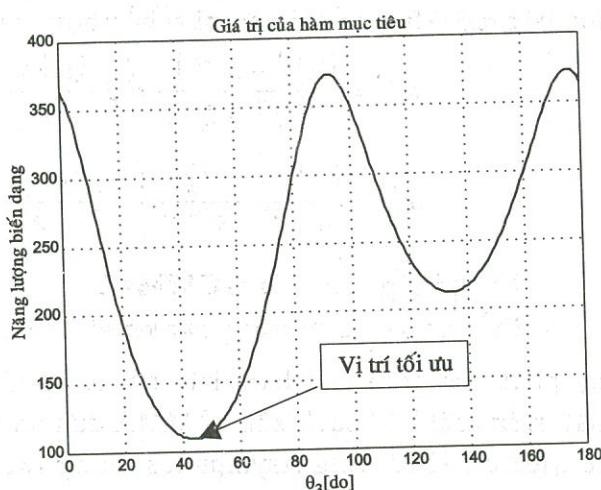


Hình 5: Trạng thái ứng suất phẳng

##### \* Năng lượng biến dạng (N/mm) với biến thiết kế là hướng sợi lớp thứ 3 :

Hình 6 : Năng lượng biến dạng của bài toán với biến thiết kế là hướng sợi của lớp thứ 3

(Kết quả này có được bằng cách tính năng lượng biến dạng tại 181 điểm  $\theta_3 = 0, 1, 2, \dots, 180^\circ$  và sau đó vẽ thành đồ thị). Kết quả này dùng để kiểm tra kết quả của các phương pháp xấp xỉ



##### \* Kết quả của phương pháp GCMMA1

Giá trị hàm mục tiêu = 109.3203 (N/mm)

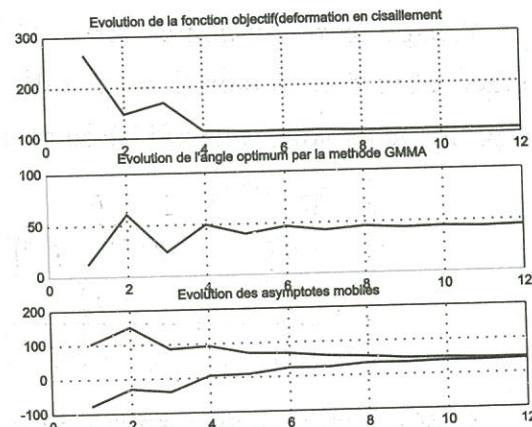
Góc ban đầu  $\theta_3 = 12^\circ$

Góc tối ưu  $\theta_3 = 43.9320^\circ$

Số lần lặp = 11

Số đánh giá hàm mục tiêu = 22

Hình 7: Kết quả của phương pháp GCMMA1



### \* Kết quả của phương pháp GCMMA2

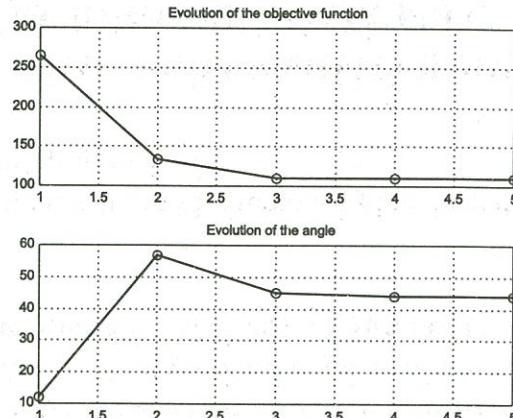
Giá trị hàm mục tiêu = 109.3279 (N/mm)

Góc ban đầu  $\theta_3 = 12$

Góc tối ưu  $\theta_3 = 44.0$

Số lần lặp = 5

Số đánh giá hàm mục tiêu = 15



Hình 8 : Kết quả của phương pháp GCMMA2

### \* Kết quả của phương pháp GBMMA1

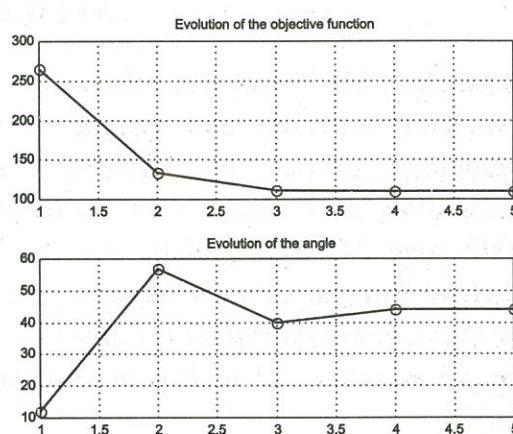
Giá trị hàm mục tiêu = 109.3172 (N/mm)

Góc ban đầu  $\theta_3 = 12$

Góc tối ưu  $\theta_3 = 43.90$

Số lần lặp = 5

Số đánh giá hàm mục tiêu = 15



Hình 9: Kết quả của phương pháp GBMMA1

## 5. Kết luận

Kết quả của góc tối ưu và giá trị hàm mục tiêu của các phương pháp xấp xỉ là chính xác so với kết quả của hình 6 (năng lượng biến dạng của bài toán).

Ta thấy ưu điểm của phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự là cho kết quả tối ưu rất nhanh. Số lần lặp (GCMMA1 : 11 lần; GCMMA2 : 5 lần ; GBMMA1 : 5 lần) và số đánh giá hàm mục tiêu (GCMMA1 : 22 lần ; GCMMA2 : 15 lần ; GBMMA1 : 15 lần) là rất ít.

Phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự thật sự là một công cụ mạnh và hiệu quả để giải một lớp các dạng bài toán tối ưu với hàm mục tiêu và các ràng buộc là hàm ẩn theo biến thiết kế.

(Bài báo này được hoàn thành dưới sự tài trợ của đề tài trọng điểm Đại học Quốc gia Tp HCM “Qui luật ứng xử của vật liệu composite”)

## APPLYING THE SEQUENTIAL CONVEX APPROXIMATION PROGRAMMING FOR COMPOSITE STRUCTURES OPTIMIZATION

Ngo Thanh Phong, Nguyen Thoi Trung

Department of Mathematics & Informatics, University of Natural Sciences – VNU-HCM

**ABSTRACT:** *The paper presents the algorithm and steps in detail of the sequential convex approximation programming for a optimization problem of which the objective function and constrains are implicit functions. Then applying this method for the optimization problem of the fiber orientation of the composite laminate which is in a state of plane stress.*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Berthelot J.M, "Matériaux composites". Ed. Masson, (1992).
- [2] Michael Bruyneel and Claude Fleury. "Composite structures Optimization using Sequential Convex Programming", in "Computational Techniques for Laminates, Composites on Computational Structures Technology, Leuven, Belgium, 6-8 September 2000, page. 243-254" (2000).
- [3] Michael Bruyneel, Pierre Duysinx, and Claude Fleury, "A family of MMA approximations for structural optimization ", (2001).
- [4] Muriel Beckers, "Optimisation de structures en variables discrètes", thèse de doctorat, (1997).
- [5] Nguyễn Thời Trung, Tối ưu hóa hướng sợi của vật liệu composite bằng giải thuật di truyền và phương pháp xấp xỉ lồi tuần tự, Luận văn thạc sĩ cơ học ứng dụng, ĐH Khoa học Tự nhiên Tp HCM, 2003