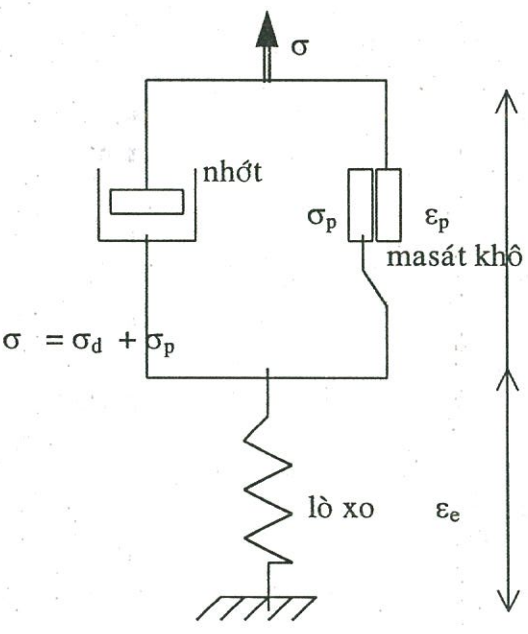
GIẢI SỐ BÀI TOÁN NHỚT DẺO MỘT CHIỀU

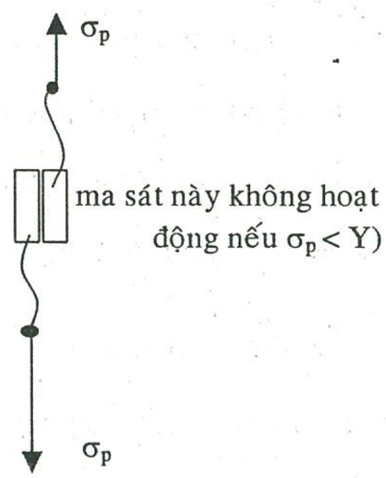
Nguyễn Phú Vinh
Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP. HCM
(Bài nhận ngày 23 tháng 06 năm 2003)

TÓM TẮT: *Trong bài báo này chúng tôi trình bày cơ sở lý thuyết của qui luật ứng xử nhớt dẻo của bài toán một chiều, Lý thuyết nhớt dẻo cho phép ta mô hình thời gian có ảnh hưởng đến qúa trình biến dạng , và sau đó khi đạt ngưỡng dẻo thì thời gian là độc lập. Hiệu ứng này luôn luôn được biểu hiện ở mỗi cấp độ của tất cả các vật liệu. Đầu tiên chúng tôi trình bày thuật toán chung ,sau đó chúng tôi xét một thí dụ bằng số cụ thể cho bài toán kéo thanh đơn giản và chúng được cài đặt bằng ngôn ngữ MATLAB.Kết quả thu được phản ánh phù hợp với cơ sở lý thuyết.*

1. Cơ sở lý thuyết :



Hình 1



Hình 2

Khái niệm luật ứng xử hàm vật liệu nhớt dẻo một chiều trên hình vẽ với mô hình lưu biến, bao gồm bộ ma sát trượt với σ_p là ứng suất chảy, ta có : $\sigma_d = \sigma - \sigma_p$ với σ là ứng suất tổng cộng và Y là ứng suất cho phép, σ_d có được do bộ phận giảm chấn nhớt Viscous dashpot, có ứng xử đàn hồi tức thời do bộ phận Linear Spring Dashpot cho phép ứng suất tức thời vượt qua giá trị chảy dẻo.

Biến dạng tổng cộng trên mô hình là : đàn hồi và nhớt dẻo.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp} \qquad (1.1)$$

Ta có : $\sigma_e = \sigma = E.\,\varepsilon_e$ (1.2)

Ứng suất xuất hiện ở bộ phận ma sát mà giá trị ứng suất Y là ngưỡng cho phép, σ_y là ứng suất ban đầu, ứng suất chảy nhớt dẻo còn phụ thuộc vào biến dạng tái bền.

$$Y = \sigma_y + H'.\,\varepsilon_{vp} \qquad (1.3)$$

Trong đó : H' là hệ số góc tái bền của đường chảy dẻo tái bền, do đó ứng suất σ_p trong bộ phận ma sát được định nghĩa như sau :

$$\sigma_p = \sigma \quad \text{nếu } \sigma_p < Y \tag{1.4}$$
$$\sigma_p = Y \quad \text{nếu } \sigma = \sigma_p \langle Y$$

Lúc đó ta sẽ chứng minh : $\dot{\varepsilon}_{VP} = \gamma\,(\sigma - Y)$; trong đó $\gamma = \dfrac{1}{\mu}$

Ứng suất ở Viscous Dashpot là σ_d liên hệ với biến dạng nhớt dẻo bởi :

$$\sigma_d = \mu \frac{d\varepsilon_{vp}}{dt} = \mu\dot{\varepsilon}_{vp} \quad . \tag{1.5}$$

Với μ là hệ số nhớt chú ý chúng ta có :

$$\sigma = \sigma_d + \sigma_p \tag{1.6}$$

trước khi đạt được trạng thái nhớt dẻo ta có : $\varepsilon_{vp} = 0$ điều này dẫn đến $\sigma_d = 0$ do (1.5) và $\sigma_p = \sigma$ do (1.6). Bây giờ ta thiết lập quan hệ ứng xử cho mô hình cả hai trạng thái: trạng thái đàn hồi và trạng thái nhớt dẻo đàn hồi:

Trước khi có xảy ra trạng thái nhớt dẻo ta có : $\varepsilon_{vp} = 0$ và từ (1.1) và (1.2) ta có $\sigma = E.\varepsilon$ (1.7)

Thay (1.4) và (1.5) trong (1.6) ta thu được

$$= \sigma_p + \sigma_d = (\sigma_y + H'.\varepsilon_{vp}) + \mu\frac{d\varepsilon_{vp}}{dt} \tag{1.8}$$

Thay ε_{vp} từ (1.1) và dùng (1.2), ta nhân (1.8) với E :

$$E\sigma = E\sigma_y + H'.E(\varepsilon - \varepsilon_e) + \mu E\frac{d}{dt}(\varepsilon - \varepsilon_e)$$

$$E\sigma = E\sigma_y + H'.E\varepsilon - H'\sigma + \mu E\frac{d\varepsilon}{dt} - \mu\frac{d\sigma}{dt}$$

Bây giờ viết dưới dạng phương trình vi phân của ™ :

$$H'E\varepsilon + \mu E\frac{d\varepsilon}{dt} = H'\sigma + E(\sigma - \sigma_y) + \mu\frac{d\sigma}{dt} \tag{1.9}$$

Chia tất cả cho μE ,và sau khi rút gọn ta có

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma\left(\sigma - \left(\sigma_y + H'\varepsilon_{vp}\right)\right) \tag{1.11}$$

Trong đó đặt $\gamma = \dfrac{1}{\mu}$ thông số đặt trưng cho trạng thái lỏng.

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

Từ (1.11) ==> $\dot{\varepsilon}_{VP} = \gamma\left(\sigma - \left(\sigma_y + H'\varepsilon_{vp}\right)\right) = \gamma(\sigma - Y)$ (1.14)

Biểu thức (1.14) xác định tốc độ biến dạng nhớt dẻo. Bây giờ coi $\sigma = \sigma_A$ là hằng số và như vậy đạo hàm theo biến t triệt tiêu, trong mô hình lúc đó (1.9) trở thành (cũng chia cho μE)

$$\gamma H'\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\gamma H'}{E}\sigma_A + \gamma(\sigma_A - \sigma_y) + \frac{\mu}{\mu E}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\gamma H'}{E}\sigma_A + \gamma(\sigma_A - \sigma_y)$$

đây là phương trình vi phân thường dạng tuyến tính cấp một. Mục đích của phần này là cho ứng suất không đổi, để khảo sát sự biến dạng thay đổi ra sao trong hiện tượng nhớt dẻo xảy ra.

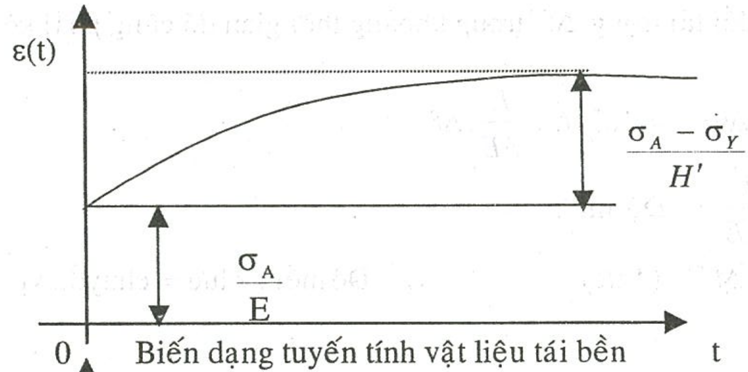
$$\begin{cases} \gamma H'\varepsilon + \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{\gamma H'}{E}\sigma_A + \gamma\left(\sigma_A - \sigma_y\right) \\ \varepsilon(t=0) = \varepsilon = \dfrac{\sigma_A}{E} \end{cases} \qquad (1.15)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0).e^{-pt} + e^{-pt}\int_0^t q(x)e^{px}dx \qquad ; \quad p=\gamma H'$$

$$= \frac{\sigma_A}{E}.e^{-pt} + e^{-pt}\left(\frac{\gamma H'\sigma_A}{E} + \gamma(\sigma_A - \sigma_y)\right)\left(e^{pt} - 1\right)\frac{1}{p}$$

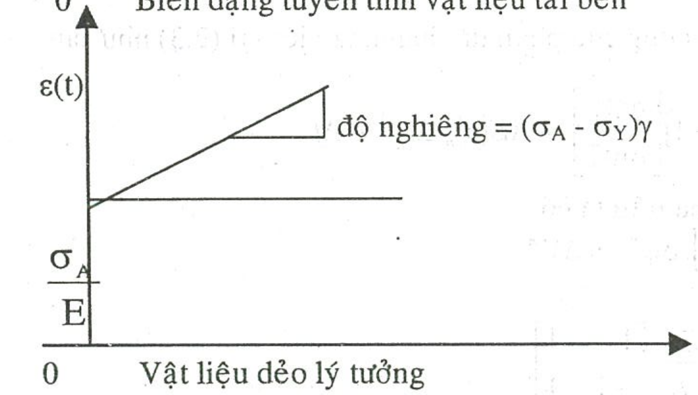
$$= \frac{\sigma_A}{E}.e^{-\gamma H't} + \left(\frac{\sigma_A}{E} + \frac{(\sigma_A - \sigma_y)}{H'}\right)\left(1 - e^{-\gamma H't}\right) \text{ rút gọn ta có}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_A}{E} + \frac{\sigma_A - \sigma_y}{H'}\left(1 - e^{-\gamma H't}\right) \qquad (1.16)$$



Hình 3a

Biến dạng tuyến tính vật liệu tái bền



Hình 3b

Vật liệu dẻo lý tưởng

Ở (1.16) H' ≠ 0 là hình ảnh của biểu đồ (Hình 3a). Khi H' tiến về 0, ta có thể tìm giới hạn của (1.16) bằng phương pháp L'Hopital qua giới hạn ta thu được

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_A}{E} + \left(\sigma_A - \sigma_y\right)\gamma t \qquad (1.17)$$

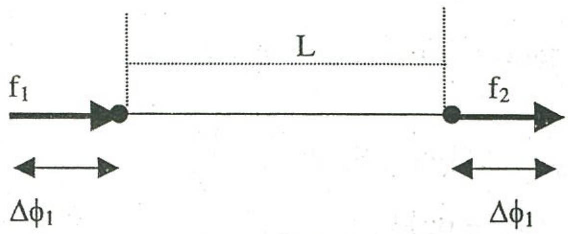
Hình ảnh (1.17) là của biểu đồ (Hình 3b).Thực ra ta có thể thu được biểu thức (1.17) trực tiếp bằng cách tích phân (1.15) khi H'=0.

2. Lời giải số

Nhớt dẻo là một quá trình xảy ra nhanh chóng và do đó, quá trình giải số là xác định độ gia tăng biến dạng và ứng suất trong khoảng thời gian ta đang khảo sát.

Với tốc độ biến dạng nhớt dẻo có trong (1.14). ta định nghĩa độ gia tăng biến dạng $\Delta\varepsilon_{vp}^{n}$ xảy ra trong khoảng thời gian $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, theo lược đồ sai phân tiến như sau

$$\varepsilon_{vp}^{n+1} - \varepsilon_{vp}^{n} = \Delta\varepsilon_{vp}^{n} = \dot{\varepsilon}_{VP}^{n}\,\Delta t_n \qquad (2.1)$$



Hình 4

$\Delta\phi_i$ i = 1,2 là các biến chuyển vị nút (i = 1,2) như trên hình vẽ, và ta có sự thay đổi chiều dài của phân tử liên kết với độ gia tăng biến dạng (2.1) là :

$$\Delta\Phi^{n} = \Delta\varepsilon_{vp}^{n} L \qquad (2.2)$$

Hơn nữa sự thay đổi tải trọng Δf^{n} trong khoảng thời gian đó cũng phải kể đến nên ta có:

$$\Delta\Phi_1^{n} - \Delta\Phi_2^{n} = \Delta\Phi^{n} = \Delta\varepsilon_{vp}^{n} L + \frac{L}{AE}.\Delta f^{n}$$

Trong đó: $\frac{L}{AE}$ Độ mềm (2.3)

Δf^{n} (Lực) $\Rightarrow$ Độ mềm × lực = chuyển vị

Nhớ rằng $\frac{EA}{L}$ là độ cứng của phần tử thanh, ta viết lại (2.3) như sau

$$\frac{AE}{L}[1-1]\begin{bmatrix}\Delta\Phi_1^{n}\\ \Delta\Phi_2^{n}\end{bmatrix} = AE\left(\dot{\varepsilon}_{vp}^{n}\,\Delta t_n\right) + \Delta f^{n}$$

Nếu viết dưới dạng ma trận ta có :

$$\left[K^{(c)}\right].\Delta\varphi^{n} = \Delta V^{n} \qquad (2.4a)$$

trong đó

$$K^{e} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad (2.4b)$$

$$\Delta\varphi^{n} = \begin{bmatrix}\Delta\Phi_1^{n}\\ \Delta\Phi_2^{n}\end{bmatrix} \quad \textit{(độ gia chuyển vị nút)} \qquad (2.4c)$$

$$\Delta V^{n} = AE\,\dot{\varepsilon}_{vp}^{n}\,\Delta t_n \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta f_1^{n}\\ \Delta f_2^{n}\end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

trong đó

$$\Delta f^{n} \doteq \begin{bmatrix}\Delta f_1^{n}\\ \Delta f_2^{n}\end{bmatrix}$$

và đại lượng ΔV^n được gọi là giả lực, $\Delta\varphi^n$ độ thay đổi chuyển vị nút ; Δf^n lực của phần tử. Ta cũng có : các đại lượng ở thời điểm t_{n+1} và t_n có quan hệ như sau.

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta\varphi^n. \tag{2.6}$$

$$\Delta\sigma^n = E\Delta\varepsilon_e^n = E\left(\Delta\varepsilon^n - \Delta\varepsilon_{vp}^n\right) \tag{2.7}$$

$$\Delta\sigma^n = E\left(\frac{\Delta\Phi_1^n - \Delta\Phi_2^n}{L} - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n\right) \tag{2.8}$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta\sigma^n \tag{2.9}$$

$$\sigma_{vp}^{n+1} = \varepsilon_{vp}^n + \Delta\varepsilon_{vp}^n \tag{2.10}$$

Và cuối cùng tốc độ biến dạng dẻo nhớt tại t_{n+1} cho bởi (1.14)

$$\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma\left[\sigma^{n+1} - \left(\sigma_y + H'\varepsilon_{vp}^{n+1}\right)\right] \tag{2.11}$$

Nếu ta dùng lược đồ sai phân tiến Eucler theo bước thời gian, và vì bị ảnh hưởng tính chất tuyến tính sẽ làm vượt quá sự gia tăng của các biến, do đó tổng ứng suất σ^{n+1} thu được bởi sự tích luỹ do gia tăng ứng suất có thể không còn thoả phương trình cân bằng. Vậy ta cần thiết giới thiệu khái niệm "điều chỉnh cân bằng" trong thuật giải số. Phương pháp đó là: đánh giá thêm lực nút ngoài cân bằng tại mỗi thời điểm và được coi như là lực nút được cộng thêm vào trong bước kế tiếp tính toán. Sự mất cân bằng chính là lực thặng dư Ψ cho mỗi phần tử tổng quát là tổng đại số của tải trọng nút (số hạng thứ nhất) và lực nút tương đương (số hạng thứ hai) như sau

$$\Psi^{n+1} = A\sigma^{n+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + f^{n+1} \tag{2.12}$$

trong đó A tiết diện thanh , σ^{n+1} là ứng suất phần tử và f^{n+1} lực tổng cộng tại thời điểm t_{n+1}
Những lực thặng dư này được cộng vào giả lực vế phải của (2.5) cho bước tính toán kế tiếp.

$$\Delta V^{n+1} = AE\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}\Delta t_{n+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \Delta f^{n+1} + \Psi^{n+1} \tag{2.13}$$

$$\Delta V^{n+1} = A(E\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}.\Delta t_{n+1} + \sigma^{n+1})\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + f^{n+1} + \Delta f^{n+1} \tag{2.13a}$$

Bước này được lặp lại cho mỗi bước thời gian cho đến khi lời giải sẽ dừng trong hai trường hợp:
Hoặc là đã đạt đến hết khoảng thời gian khảo sát.
Hoặc là điều kiện đạt ngưỡng đã xảy ra, nghĩa là khi tốc độ biến dạng đàn hồi nhớt $\dot{\varepsilon}_{vp}^n$ ở bước thứ n đủ nhỏ cho phép, mà ý nghĩa của nó được trình bày tiếp dưới đây .

3. Giới hạn độ dài thời gian

Khoảng bước thời gian tiêu chuẩn cho lời giải dùng lược đồ sai phân tiến Eucler đã được Cormean đề nghị cho bài toán một chiều là:

$$\Delta t \le \frac{\sigma_y}{\gamma E} \tag{3.1}$$

Tuy nhiên theo kinh nghiệm cho những bài toán liên tục tổng quát có giá trị lý thuyết về khoảng bước khoảng thời gian không biết trước, thì phần lớn những thủ tục xử lý vấn đề này là giới hạn sư gia tăng biến dạng dẻo nhớt bởi một hệ số r.

$$\Delta\varepsilon_{vp}^n = \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n = r\,\varepsilon^n \tag{3.2}$$

Vì tổng quát mỗi phần tử có mức độ biến dạng khác nhau, nên biểu thức (3.2) sẽ cho các giới hạn khác nhau. Do đó ta thường lấy chung là:

$$\Delta t \leq r\left[\frac{\varepsilon^n}{\dot{\varepsilon}^n_{vp}}\right]_{mim} \tag{3.3}$$

.Trong đó lấy min cho tất cả các phần tử. Độ ổn định của quá trình lời giải thì cũng phụ thuộc vào giới hạn chiều dài của mỗi bước thời gian liên tiếp với nhau như :

$$\Delta t_{n+1} \leq K\,\Delta t_n \tag{3.4}$$

Trong đó K là hằng số lấy theo kinh nghiệm trong khoảng [1,5 ; 2,0]

4. Thuật toán

Lời giải của bài toán nhớt dẻo được bắt đầu từ các điều kiện ban đầu cho trước tại thời điểm $t=t_0=0$ (n=0) tương ứng với trạng thái ứng xử đàn hồi. Nghĩa là tại trạng thái ban đầu này ta biết được chuyển vị φ^0 , lực nút f^0, biến dạng ε^0, ứng suất σ^0 qua cách giải của phương pháp phần tử hữu hạn thường lệ ta đã biết và biến dạng nhớt dẻo nhớt ban đầu $\varepsilon^0_{vp} = 0$. Sau đó chuyển sang trạng thái dẻo nhớt , thủ tục tìm các thám số đặc trưng này từ bước thời gian t_n đến t_{n+1} như sau:

Bước 1 :

Tại thời điểm $t = t_n$ $(n \neq 0)$ các giá trị σ^n, ε^n, ε^n_{vp} , f^n được tính cho mỗi phần tử và chuyển vị nút đã được xác định. Tốc độ dẻo nhớt cho mỗi phần tử được tính bằng biểu thức (1.14) là :

$$\dot{\varepsilon}^n_{vp} = \gamma\left(\sigma^n - \left(\sigma_y + H'\varepsilon^n_{vp}\right)\right) \tag{4.1}$$

Bước 2 :

a) Tính độ gia tăng chuyển vị : $\Delta\varphi^n$

$$\Delta\varphi^n = K^{-1}.\Delta V^n$$

$$\textit{Trong đó}:\ \Delta V^n = AE\,\dot{\varepsilon}^n_{vp}\,\Delta t_n\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \Delta f^n$$

$$\textit{Ma trận độ cứng}: K^{(c)} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Tính độ gia tăng ứng suất $\Delta\sigma^n$ và độ gia tăng biến dạng dẻo nhớt $\Delta\varepsilon^n_{vp}$ cho mỗi phần tử.

$$\Delta\sigma^n = E\left(\frac{\Delta\Phi^n_1 - \Delta\Phi^n_2}{L} - \dot{\varepsilon}^n_{vp}.\Delta t_n\right)$$

$$\Delta\varepsilon^n_{vp} = \dot{\varepsilon}^n_{vp}.\Delta t_n$$

Bước 3 :

Xác định tổng chuyển vị, ứng suất và biến dạng dẻo nhớt cho mỗi phần tử.

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta\varphi^n$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta\sigma^n$$

$$\varepsilon^{n+1}_{vp} = \varepsilon^n_{vp} + \Delta\varepsilon^n_{vp}$$

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f^{n1}$$

Bước 4 :

Tính tốc độ biến dạng dẻo nhớt cho mỗi phần tử :

$$\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma\left[\sigma^{n+1} - \left(\sigma_y + H'\varepsilon_{vp}^{n+1}\right)\right]$$

Bước 5 :

Áp dụng phương pháp điều chỉnh lực cân bằng. Đánh giá lực thặng dư cho mỗi phần tử bằng công thức :

$$\Psi^{n+1} = A\sigma^{n+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + f^{n+1}$$

Cộng véctơ này vào véctơ tải trọng gia tăng của từng phần tử để dùng vào bước kế tiếp.

$$\Delta V^{n+1} = AE\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}.\Delta t_{n+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \Delta f^{n+1} + \Psi^{n+1}$$

$$\Delta V^{n+1} = A(E\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}.\Delta t_{n+1} + \sigma^{n+1})\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + f^{n+1} + \Delta f^{n+1}$$

Bước 6 :

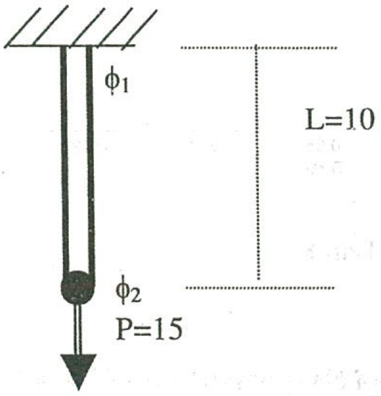
Kiểm tra tốc độ biến dạng dẻo $\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}$ cho mỗi phần tử để xem đủ nhỏ cho phép chưa?

Nếu đặt ngưỡng cho phép thì quá trình dừng lại tại đây hoặc gia tăng tải tiếp tục và quá trình lặp lại quay về bước 1.

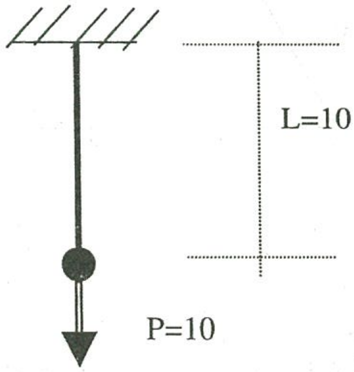
Nếu chưa đạt ngưỡng cho phép thì quá trình bắt đầu lại bước 1 cho bước thời gian kế tiếp.

5. Thí dụ bằng số

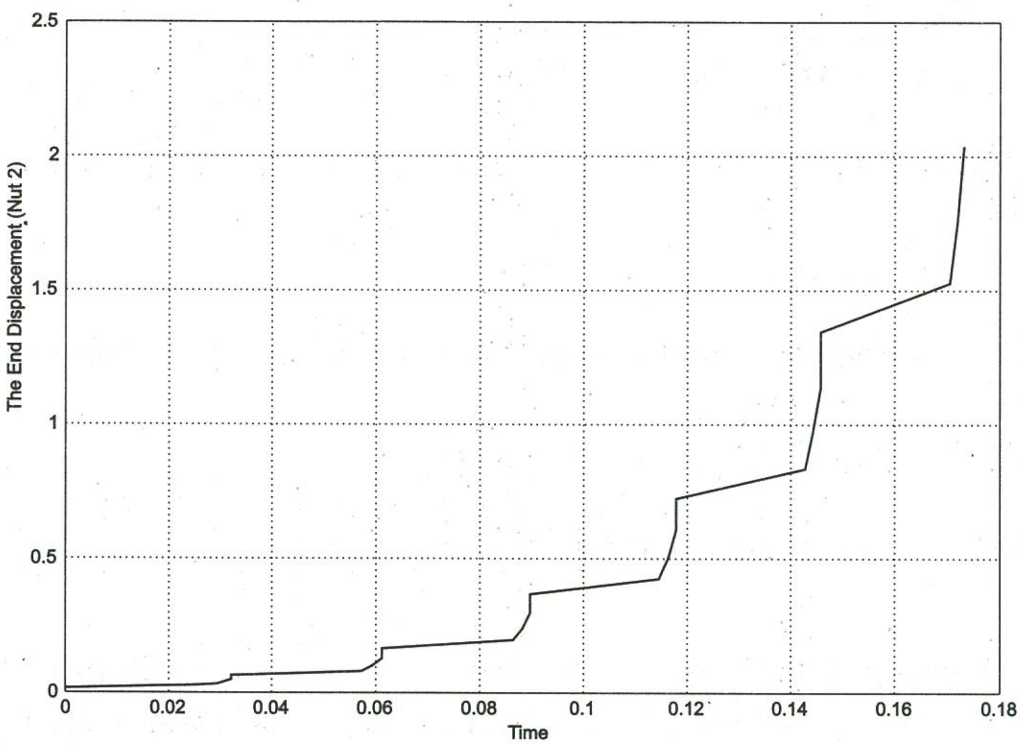
Bài 1: bài toán về sự biến dạng dẻo nhớt của một thanh đơn giản (Hình 6) chịu tải trọng kéo không đổi, chiều dài thanh L = 10 đơn vị , có các tham số là :$\sigma_y = 10$, tải trọng P = 10 đơn vị, E = 10.000, tiết diện thanh A = 1 đơn vị diện tích, hệ số nhớt $\gamma = 0.001$. Kết quả là Hình 8 phù hợp với hình vẽ 4. Sau đây ta xét **Bài 2:** bài toán về sự biến dạng dẻo nhớt của hai thanh đơn giản nối song song (Hình 5), chịu tải trọng kéo không đổi, chiều dài hai thanh bằng nhau L = 10 đơn vị, tải trọng P = 15 đơn vị, trong đó tính chất vật liệu có các tham số module đàn hồi E = 10.000, tiết diện thanh A = 1 đơn vị diện tích , giới hạn ứng suất cho phép của 2 thanh là $\sigma_y = 20$, $\sigma_y = 10$, liên quan tới hệ số nhớt $\gamma = 0.001$ (thông số đặc trưng cho trạng thái lỏng), hệ số giới hạn sự gia tăng biến dạng dẻo nhớt r = 0.1. Chú ý thông số tái bền biến dạng H' = 5000. Kết quả sự biến dạng dẻo nhớt thể hiện trên hình vẽ Hình 7.



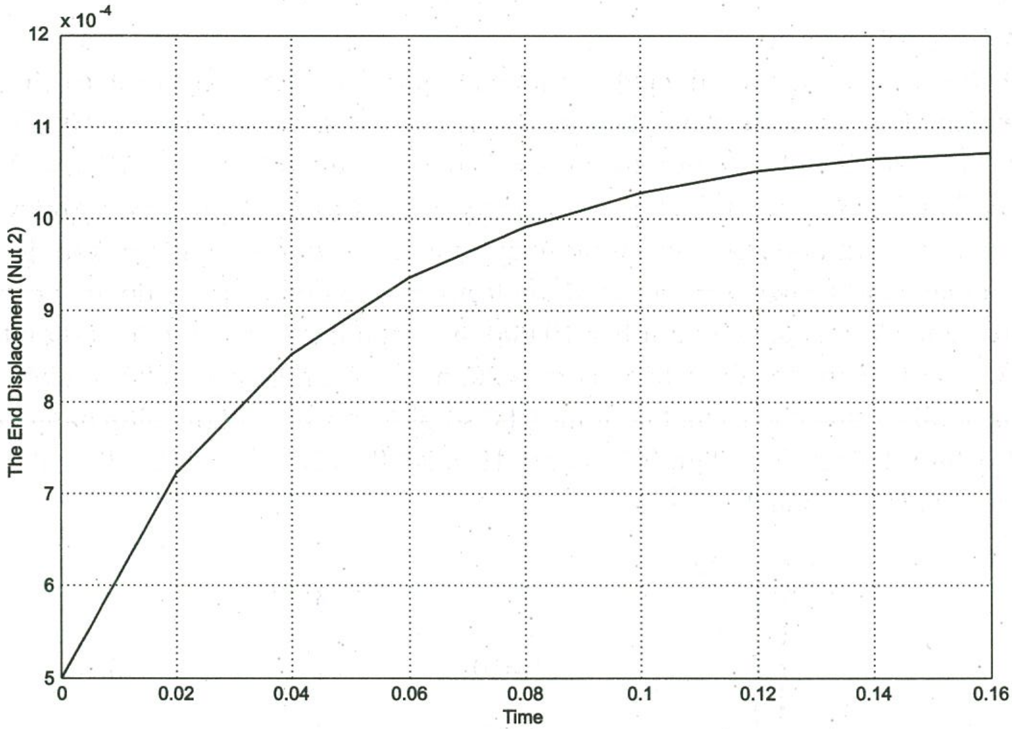
Hình 5



Hình 6



Hình 7



Hình 8

6. Kết Luận

Hình 8 là chuyển vị của nút cuối với thời gian cho phần tử có xét đến nhớt dẽo chịu tải trọng kéo không đổi. Kết quả là Hình 8 phù hợp với hình vẽ 4.

Hình 7 là chuyển vị của nút cuối với thời gian cho hai phần tử nối song song cóxét đến nhớt dẽo chịu tải trọng kéo không đổi, do thành phần σ_y ở hai thanh có khác nhau ,nên kết quả thể hiện trên Hình 7, giống mô hình ba trạng thái đàn-nhớt- dẻo.

VISCOPLASTIC PROBLEMS IN ONE DIMENSION

Nguyen Phu Vinh

ABSTRACT: *In this paper, the basic concepts of viscoplasticity are introduced by the consideration of one-dimension situation, viscoplasticity theory allows the modelling of time rate effects in the plastic deformation process .Thus after initial yielding of material the plastic flow, and the resulting stresses and strains, are time dependent.Such effects are always present to some degree in all material. All the essential features of viscoplasticity can be demonstrated. Finally the solution process is coded in MATLAB.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S. S. Rao, *The finite element method in engineering*, USA, 1988.
[2] J. Owen, E. Hinton, *The finite element method in plasticity*, UK, 1980.
[3] J.C. Simo, T.J. R Hughes, *Computational inelasticity*, Stanford 1998.
[4] L.M. Khachanốp, *Cơ sở lý thuyết dẻo*, Nhà xuất bản Đại học & Trung học chuyên nghiệp, 1987.
[5] Young W. Hwon, Hyochoong Bang, *The finite element method using MATLAB*, CRC 1997.