

PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG GIẢI BÀI TOÁN BIÊN TRONG VẬT LIỆU COMPOSITE ĐÀN-NHỚT

Ngô Thành Phong

Bộ môn Toán Cơ, Khoa Toán Tin, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 17 tháng 06 năm 2003)

TÓM TẮT: Bài báo trình bày các phương trình xác định, nguyên lý tương ứng cho vật liệu composite đàn-nhớt, hai phương pháp gần đúng biến đổi Laplace ngược và phương pháp tựa đàn hồi. Cả ba phương pháp có thể áp dụng để giải bài toán biên trong vật liệu composite đàn-nhớt bất đẳng hướng.

1. Quy luật ứng xử vật liệu composite đàn-nhớt tuyến tính

Để tiện trình bày, các đại lượng vectơ, tenxơ được mô tả trong hệ tọa độ Descartes vuông góc (x_1, x_2, x_3) với các ký hiệu thông dụng về tenxơ.

Quan hệ tuyến tính tổng quát giữa ứng suất σ_{ij} và biến dạng ε_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) của vật liệu với tính bất đẳng hướng bất kỳ, có thể được viết bằng trị trung bình của tích phân cộng tính Boltzmann [2,3,4]

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\infty} C_{ij}^{kl}(t-\tau, x_i) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (1.1)$$

trong đó giả thiết rằng ứng suất và biến dạng triệt tiêu khi biến thời gian $t < 0$.

Các hàm vật liệu $C_{ij}^{kl}(t, x_i)$ thu được bằng cách áp dụng biến dạng là hàm thử bậc thang đơn vị (thí nghiệm chùng ứng suất)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 H(t) \quad (1.2)$$

trong đó ε_{ij}^0 là hằng và $H(t)$ là hàm Heaviside.

Thế biến dạng (1.2) vào (1.1) và nhớ rằng đạo hàm hàm $H(t)$ theo thời gian là hàm Dirac $\delta(t)$, ta được

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}(t, x_i) \varepsilon_{kl}^0 \quad (1.3)$$

Các hàm $C_{ij}^{kl}(t, x_i)$ là các thành phần của tenxơ hạng 4 và được gọi là môđun chùng ứng suất. Nếu các hàm này đã biết cho vật liệu đang xét thì nghiệm ứng suất đối với lịch sử biến dạng bất kỳ có thể tính được bằng cách áp dụng phương trình (1.1). Cần nhớ rằng, môđun chùng chỉ phụ thuộc vào thời gian tính từ thời điểm ban đầu lúc tác dụng biến dạng, như vậy ở đây không xét hiệu ứng lão hoá.

Tính đối xứng của tenxơ ứng suất, biến dạng kéo theo

$$C_{ij}^{kl}(t, x_i) = C_{ji}^{kl}(t, x_i) = C_{ij}^{lk}(t, x_i) \quad (1.4)$$

Tính chất quan trọng của môđun chùng do Biot đưa ra dựa vào sự ổn định nhiệt động của các hệ không thuận nghịch [1]

$$C_{ij}^{kl}(t, x_i) = C_{kl}^{ij}(t, x_i) \quad (1.5)$$

Tính phụ thuộc vào thời gian của chúng được thể hiện bởi hàm e_mũ [5]

$$C_{ij}^{kl}(t, x_i) = \sum_s C_{ij}^{kl(s)} e^{-t/\rho_s} + C_{ij}^{kl} \quad (1.6)$$

trong đó các ma trận ở vế phải của phương trình (1.6) gồm các hằng số thực và hoàn toàn đối xứng, nửa xác định dương:

$$C_{ij}^{kl(s)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq 0, \quad C_{ij}^{kl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq 0 \quad \text{nếu } \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0 \quad (1.7)$$

Nhưng ma trận tổng trong (1.6) xác định dương

$$\left[\sum_s C_{ij}^{kl(s)} + C_{ij}^{kl} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0, \quad \text{nếu } \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0 \quad (1.8)$$

Các hằng C_{ij}^{kl} là các môđun đàn hồi, chúng gây ra ứng suất lâu dài do biến dạng (1.2) và xác định sự ứng xử trên phần biến dạng rất thấp. Hệ số e_mũ $C_{ij}^{kl(s)}$ và hằng số tương ứng ρ_s (gọi là thời gian chùng) xác định thời gian và phần phụ thuộc thời gian của vật liệu đàn-nhớt.

Trong áp dụng, ta thường dùng luật ứng xử ngược của (1.1):

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t S_{ij}^{kl}(t-\tau, x_i) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (1.9)$$

$S_{ij}^{kl}(t, x_i)$ được gọi là hàm chảy chậm bởi vì khi tác dụng ứng suất hằng σ_{ij}^0 tại thời điểm $t=0$ (thí nghiệm chảy chậm) sinh ra biến dạng tương ứng:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij}^{kl}(t, x_i) \sigma_{kl}^0 \quad (1.10)$$

Luật ứng xử ứng suất – biến dạng tuyến tính của vật liệu được xác định hoàn toàn bởi tenxơ chảy chậm $S_{ij}^{kl}(t, x_i)$ hoặc môđun chùng $C_{ij}^{kl}(t, x_i)$. $S_{ij}^{kl}(t, x_i)$ là tenxơ hoàn toàn đối xứng và phụ thuộc thời gian [5]

$$S_{ij}^{kl}(t, x_i) = \sum_s S_{ij}^{kl(s)} \left(1 - e^{-t/\tau_s} \right) + S_{ij}^{kl} + S_{ij}^{kl} t \quad (1.11)$$

Thời gian trễ τ_s và tất cả các ma trận ở vế phải của (1.11) gồm các hằng số thực, hơn nữa $\tau_s > 0$.

2. Phương pháp biến đổi Laplace

Áp phép biến đổi Laplace (hoặc Fourier) vào tất cả các phương trình ứng xử trên đây, ta được các biểu thức giống như các biểu thức trong môi trường đàn hồi.

Xét trường hợp đẳng nhiệt ($\Delta T = 0$). Biến đổi Laplace của hàm $f(t, x_i)$ có dạng:

$$\bar{f} = \bar{f}(p, x_i) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t, x_i) dt \quad (2.1)$$

Biến đổi phương trình (1.1) và (1.9) ta được:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ij}^{kl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (2.2)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{S}_{ij}^{kl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (2.3)$$

trong đó

$$\bar{C}_{ij}^{kl} \equiv p \bar{C}_{ij}^{kl}, \quad \bar{S}_{ij}^{kl} \equiv p \bar{S}_{ij}^{kl} \quad (2.4)$$

Các đại lượng \tilde{C}_{ij}^{kl} và \tilde{S}_{ij}^{kl} được gọi tương ứng là mô đun chùng tính toán và hàm chảy chậm tính toán. Chúng có quan hệ:

$$[\tilde{S}_{ij}^{kl}] = [\tilde{C}_{ij}^{kl}]^{-1} \quad (2.5)$$

Các hàm tính toán (2.4) có tính xác định dương khi tham số biến đổi p là thực và dương. Điều này có thể thấy bằng cách xét dạng hiển của chúng

$$\tilde{C}_{ij}^{kl} = \sum_s \frac{p C_{ij}^{kl(s)}}{p+1/\rho_s} + C_{ij}^{kl} \quad (2.6a)$$

$$\tilde{S}_{ij}^{kl} = \sum_s \frac{S_{ij}^{kl(s)}}{p\tau_s+1} + S_{ij}^{kl} + \frac{S_{ij}^{kl}}{p} \quad (2.6b)$$

và lưu ý rằng tất cả các ten xơ trong (2.6) có giá trị dương được ấn định trong các phương trình (1.7) và (1.8).

3. Phát biểu bài toán biên đàn-nhớt tuyến tính

Phương trình cơ bản cần thiết để giải bài toán ứng suất biến dạng tựa tĩnh tuyến tính cho vật thể bất đẳng hướng là ba phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (3.1)$$

trong đó F_i là các thành phần của vectơ lực khối, sáu quan hệ chuyển vị – biến dạng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

cùng với sáu quan hệ ứng suất biến dạng (1.1) hoặc (1.9).

Các phương trình này lập thành hệ các phương trình kín đối với 15 biến độc lập $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ và u_i .

Điều kiện biên đàn-nhớt

$$u_i = U_i, \quad x_i \in S_u \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i, \quad x_i \in S_T \quad (3.4)$$

trong đó n_j là cosin chỉ hướng của vectơ pháp đơn vị hướng ra ngoài của mặt biên S .

4. Nguyên lý tương ứng

Nhiều bài toán kỹ thuật quan trọng đối với vật liệu composite có thể sử dụng phép biến đổi Laplace theo thời gian thực, các phương trình cơ bản được dẫn về các phương trình tương tự về mặt toán học của lý thuyết đàn hồi. Sự tương tự này được gọi là “Nguyên lý tương ứng”. Từ nguyên lý này suy ra rằng, phương pháp tính toán bài toán đàn hồi có thể áp dụng để giải các bài toán đàn-nhớt đã biến đổi Laplace.

Áp phép biến đổi Laplace (2.1) vào phương trình (3.1) và (3.2) ta được:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{F}_i = 0 \quad (4.1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.2)$$

Biến đổi các điều kiện biên (3.3), (3.4) ta được:

$$\bar{u}_i = \bar{U}_i \text{ trên } S_u \quad (4.3a)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{T}_i \text{ trên } S_T \quad (4.3b)$$

trong đó giả thiết rằng các mặt biên S_u, S_T không phụ thuộc thời gian (chuyển vị bé). Phương trình (4.1), (4.2) và (4.3) cùng với quan hệ ứng suất – biến dạng (2.2) hoặc (2.3) là sự tương đương hình thức với bài toán đàn hồi với miền hình học giống nhau chịu tác dụng chuyển vị $\bar{U}_i = \bar{U}_i(x_j, p)$, lực mặt $\bar{T}_i = \bar{T}_i(x_j, p)$ và lực khối $\bar{F}_i = \bar{F}_i(x_j, p)$, gọi là bài toán đàn hồi kết hợp.

Khi biến không gian và biến thời gian có thể biểu diễn bằng hàm phân ly biến:

$$U_i = U_i(x_j)U_i''(t); T_i = T_i(x_j)T_i''(t); F_i = F_i(x_j)F_i''(t) \quad (\text{không lấy tổng theo } i) \quad (4.4)$$

thì sự phân bố không gian của chuyển vị và lực tác dụng trong bài toán đàn hồi kết hợp giống như trong bài toán đàn-nhớt gốc.

5. Phương pháp biến đổi Laplace ngược

Nguyên lý tương ứng cho phép tính toán nghiệm đàn-nhớt từ nghiệm đàn hồi kết hợp. Bước chính trong quá trình này là biến đổi Laplace ngược và trong thực tế có thể gặp biến đổi ngược giải tích chính xác thu được qua việc tra bảng. Trong rất nhiều bài toán nghiệm đàn hồi chỉ thu được dưới dạng số hoặc dạng giải tích phức tạp không thể tra bảng.

Vấn đề cơ bản được đặt ra trong mục này là tìm nghiệm chính xác hoặc gần đúng $f(t, x_i)$ thỏa phương trình tích phân:

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, x_i) dt \quad (5.1)$$

trong đó \bar{f} đã biết ít nhất dưới dạng số đối với tất cả các tham số biến đổi thực $p \geq 0$.

Ta sẽ thấy phương pháp biến đổi ngược là chính xác và dễ áp dụng khi hàm $f(t, x_i)$ là nghiệm trong trường hợp lực đặt và chuyển vị mặt biên có dạng hàm bậc thang (nghĩa là hằng theo thời gian sau thời điểm tác dụng $t = 0$). Điều này không hạn chế tính tổng quát do nguyên lý cộng tính. Thí dụ, nếu $f(t, x_i)$ là nghiệm của hàm bậc thang đơn vị $H(t)$, thì nghiệm $S(t, x_i)$ đối với đầu vào tổng quát $I(t)$ là:

$$S(t, x_i) = \int_0^t f(t - \tau, x_i) \frac{dI}{d\tau} d\tau \quad (5.2)$$

5.1 Phương pháp điểm

Nếu nghiệm đàn-nhớt hữu hạn khi $t \rightarrow \infty$, ta có thể viết nó dưới dạng:

$$f(t, x_i) = \Delta f(t, x_i) + f_e \quad (5.3)$$

trong đó, theo định nghĩa

$$\Delta f(\infty) \equiv 0, \quad f_e \equiv f(\infty) \quad (5.4)$$

Phương pháp điểm giải quyết với biến đổi ngược $\Delta \bar{f}$.

Hằng f_e là nghiệm cân bằng hoặc nghiệm lâu dài khi giả thiết nó hữu hạn. Nó có thể được tính toán trực tiếp từ nghiệm đàn hồi kết hợp \bar{f} . Ta có:

$$p\bar{f} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t, x_i) dt = \int_0^{\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}, x_i\right) du \quad (5.5)$$

Từ đây ta thu được kết quả đã biết:

$$[p\bar{f}]_{p=0} = f(\infty) \equiv f_e \quad (5.6)$$

Nếu $f(t, x_i)$ là chuyển vị hoặc biến dạng, nó có thể chứa số hạng tỉ lệ với t (chảy ổn định). Hệ số f' có thể tính toán được bằng cách dùng quan hệ tương tự:

$$[p^2 \bar{f}]_{p=0} = \left[\frac{f}{t} \right]_{t=\infty} \equiv f' \quad (5.7)$$

Và bài toán đã nêu là tính toán:

$$\Delta f \equiv f - f' t - f_e$$

Để tìm biến đổi ngược của $\Delta \bar{f}$, ta giả thiết rằng nghiệm có thể xấp xỉ bằng chuỗi Dirichlet hữu hạn:

$$\Delta f_D = \sum_{i=1}^N S_i e^{-\lambda_i t} \quad (5.8)$$

trong đó λ_i và S_i là các hằng số thực.

Mặc dù phương pháp này là phương pháp gần đúng đối với $N < \infty$, nhưng ta có thể làm cho sai số bé tùy ý. Điều này được suy ra từ nhận xét rằng hàm bình phương khả tích bất kỳ, nghĩa là:

$$\int_0^{\infty} (\Delta f)^2 dt < \infty \quad (5.9)$$

có thể xấp xỉ bởi chuỗi Dirichlet nếu

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i / (1 + \lambda_i^2) \text{ hội tụ khi } N \rightarrow \infty \text{ [5]}$$

Biến đổi ngược chính xác cho các bài toán tựa tĩnh cũng thường có dạng e-mũ như Δf_D . Bây giờ ta tính toán các hệ số S_i bằng cách cực tiểu hóa bình phương sai số giữa Δf và Δf_D

$$E^2 \equiv \int_0^{\infty} (\Delta f - \Delta f_D)^2 dt \quad (5.10a)$$

Cực tiểu hóa thu được từ điều kiện

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial S_i} = 0 = \int_0^{\infty} (\Delta f - \Delta f_D) e^{-\lambda_i t} dt \quad (5.10b)$$

N quan hệ giữa các biến đổi Laplace có thể thu được bằng cách tính toán tại số thực λ_i

$$\Delta \bar{f}_D(\lambda_i) = \Delta \bar{f}(\lambda_i) \quad (5.11)$$

Để thuận tiện khi áp dụng, ta nhân cả hai vế với p và thu được dạng hiển hệ N phương trình tuyến tính đủ để tính toán N hằng S_i

$$\sum_{j=1}^N \left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)^{-1} S_j = [p \Delta \bar{f}]_{p=\lambda_i} \quad (5.12)$$

Như vậy, bình phương sai số theo thời gian được cực tiểu hóa bằng cách biến đổi Laplace chuỗi Dirichlet và nghiệm đàn hồi kết hợp tại N điểm $p = \lambda_i$.

Với một nghiệm đàn hồi thu được dưới dạng số hoặc đồ thị đối với $p \geq 0$, các giá trị thích hợp của λ_i có thể xem xét kỹ để lựa chọn.

5.2 Phương pháp trực tiếp

Phương pháp trực tiếp là một kỹ thuật biến đổi ngược gần đúng. Phương pháp này dễ áp dụng hơn phương pháp điểm nhưng ngược lại nó không cho sai số giảm. Một nét đặc trưng quan trọng là nó cho ta mối quan hệ trực tiếp giữa nghiệm phụ thuộc thời gian và nghiệm biến đổi Laplace.

R.A.Schapery [5] đã chỉ rằng nếu đồ thị của nghiệm $f(t, x_i)$ có độ cong bé khi vẽ $\log t (= \log_{10} t)$, thì:

$$p\bar{f} \approx [f(t, x_i)]_{t=\frac{\beta}{p}} \quad (5.13)$$

trong đó $\beta = e^{-C} \cong \frac{1}{2}$ (C là hằng số Euler)

Phương trình này trở thành chính xác nếu f tỉ lệ với $\log t$. Một sự thay đổi cho nhân tử β thu được khi $\log f$ có độ cong bé đối với $\log t$, nếu $\log\text{-}\log$ có độ nghiêng L có giá trị trong khoảng $-0.3 \leq L \leq 0,1$ thì $\beta \cong \frac{1}{2}$.

Phương pháp biến đổi Laplace ngược thu được bằng cách viết phương trình (5.13) dưới dạng tương đương:

$$f(t, x_i) \approx [p\bar{f}]_{p=\gamma_{2t}} \quad (5.14)$$

Phương trình (5.14) nhận được từ việc sử dụng giả thiết về biến đổi Laplace ngược chính xác $f(t, x_i)$, đúng hơn là $p\bar{f}$. Bởi vì trong thực tế hàm chính xác $f(t, x_i)$ chưa biết, nên có thể giả thiết rằng phương trình (5.14) có nghĩa nếu $p\bar{f}$ thỏa điều kiện độ cong bé.

Xấp xỉ (5.14) là hoàn toàn chính xác trong nhiều bài toán. Khi mô đun chùng thực tế được sử dụng và tất cả điều kiện cho trước (lực đặt và chuyển vị trên mặt) là các hàm bậc thang theo thời gian đặt tại thời điểm $t = 0$. Sự chính xác này có thể giải thích bởi sự đúng đắn của nguyên lý tương ứng.

Giả sử f là nghiệm của bài toán khi cho trước $I(t) = C_1 H(t)$ và C_1 là hằng theo thời gian. Khi đó \bar{f} có thể viết:

$$\bar{f} = f_e \bar{I} = f_e \frac{C_1}{p} \quad (5.15)$$

$$\text{trong đó } C_1 f_e = C_1 f_e(\tilde{C}_{ij}^{kl}) \quad (5.16)$$

là lời giải của vật thể đàn hồi với mô đun \tilde{C}_{ij}^{kl} và đầu vào C_1 .

Như vậy

$$p\bar{f} = C_1 f_e(\tilde{C}_{ij}^{kl}) \quad (5.17)$$

phụ thuộc p chỉ qua mô đun chùng tính toán \tilde{C}_{ij}^{kl}

6. Phương pháp tựa đàn hồi

Phương pháp tựa đàn hồi phát sinh từ phương pháp biến đổi Laplace ngược trực tiếp và việc xác định mô đun chùng tính toán \tilde{C}_{ij}^{kl} . Ta có:

$$\tilde{C}_{ij}^{kl} \equiv p\bar{C}_{ij}^{kl} \quad (6.1)$$

Từ phương trình (5.13) ta có:

$$\tilde{C}_{ij}^{kl} \equiv [C_{ij}^{kl}(t, x_i)]_{t=\frac{\beta}{2p}} \quad (6.2)$$

Lần lượt, áp dụng phương trình (5.14) cho nghiệm đã biến đổi Laplace (5.17) và thu được:

$$f(t, x_i) \cong C_1 f_e [C_{ij}^{kl}(t, x_i)] \quad (6.3)$$

Biểu thức này là nghiệm giản đơn cho vật thể đàn hồi có phương trình ứng suất - biến dạng

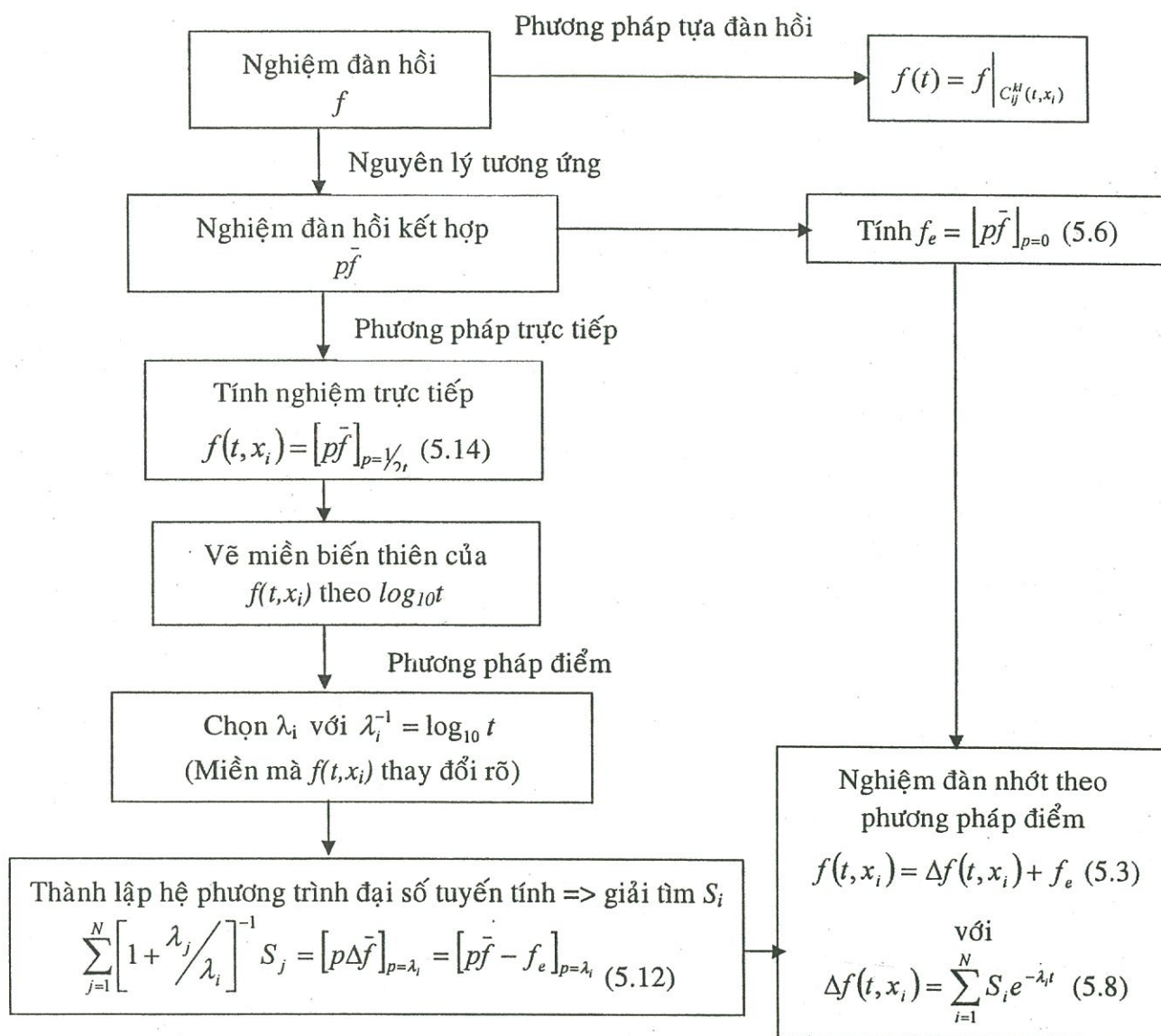
$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}(t, x_i) \varepsilon_{kl} \quad (6.4)$$

Áp dụng xấp xỉ (6.2) cho tenxơ chảy chậm dẫn đến quan hệ tựa đàn hồi khác:

$$[S_{ij}^{kl}(t, x_i)] \cong [C_{ij}^{kl}(t, x_i)]^{-1} \quad (6.5)$$

Theo phương pháp tựa đàn hồi, nghiệm đàn-nhớt được xấp xỉ bởi nghiệm đàn hồi, trong đó tất cả các hằng số đàn hồi được thay bởi mô đun chùng phụ thuộc thời gian.

7. Sơ đồ khối giải bài toán biên composite đàn-nhớt bằng phương pháp biến đổi laplace ngược



APPROXIMATE METHODS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN VISCO-ELASTIC COMPOSITE MATERIALS

Ngo Thanh Phong

Department of Mathematics & Informatics, University of Natural Sciences – VNU-HCM

ABSTRACT: *This paper presents the constitutive equations, the correspondence principle of linear visco-elastic composite materials, two approximate methods of Laplace transform inversion and the quasi-elastic method. All three method can be applied to stress analysis of anisotropic visco-elastic composite materials.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M.A. Biot, *Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids*, Proceedings 3rd U.S Nath. Congr. Appl. Mech, ASME (1958), p.1
- [2] R.M Christensen, *Mechanics of composite Materials*, A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, New York. Chichester. Brisbane. Toronto, 1979.
- [3] R.M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York and London, 1971.
- [4] Yu. N. Rabotnov, *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [5] R.A. Schapery, *Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials, Mechanics of Composite Materials*. Volume 2, Edited by G.P.Sendeckyj, Academic Press, New York and London, 1974.