DAO ĐỘNG CỦA VẬT RẮN VÀ THANH ĐÀN HỒI VỚI RÀNG BUỘC ĐÀN NHỚT Ở MẶT BÊN

Nguyễn Phú Vinh
Khoa Công Nghệ Thông tin, Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 Tp. HCM
(Bài nhận ngày 05 tháng 5 năm 2003, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 05 tháng 7 năm 2003)

TÓMTẮT: Trong bài báo này chúng tôi khảo sát dao động của vật rắn và thanh đàn hồi, vật rắn khối lượng M chuyển động với vận tốc ban đầu V_0 ,chạm vào một thanh có chiều dài L, qua bộ phận giảm chấn có độ cứng k. Đầu kia của thanh tựa trên một nền cứng đàn hồi, thanh chịu một lực ma sát đàn hồi nhớt chung quanh mặt bên. Đầu tiên chúng tôi thiết lập hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ, sau đó dùng một sơ đồ sai phân theo biến thời gian đưa bài toán về một hệ phương trình elliptic, tiếp theo chúng tôi giải xấp xỉ hệ đó bằng phương pháp phần tử hữu hạn cấp một. Cuối cùng chúng tôi minh họa thuật giải số trên một ví dụ cụ thể và cài đặt thuật giải bằng MATLAB.

1. Mở đầu

Ta xét một vật rắn khối lượng M chuyển động với vận tốc ban đầu V_0 khi va chạm vào thanh có chiều dài L qua bộ phận giảm chấn gắn ở đầu thanh có độ cứng k. Đầu kia của thanh tựa trên một nền cứng. Giả thiết ở mặt bên, thanh chịu lực ma sát đàn nhớt và ngoại lực phụ $f(x,t)$. Lực ma sát đàn hồi nhớt được xấp xỉ như lực khối. Khi đó độ dịch chuyển dọc $u(x,t)$ thỏa phương trình sóng

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{1.1}$$

trong đó $a = \sqrt{E/\rho}$ là vận tốc truyền sóng đàn hồi của thanh; $K = K_1 r/F$, $\lambda = \lambda_1 r/F$, với r và F lần lượt là chu vi và diện tích của thiết diện ngang; K_1, λ_1 lần lượt là các hệ số lực cản đàn hồi và nhớt ở mặt bên.

Ngoài ra còn có các điều kiện biên

$$\sigma_x = Eu_x(0,t) = -P(t), \quad \text{tại đầu thanh } x = 0, \tag{1.2}$$

$$u(L,t) = 0, \quad \text{tại đầu thanh } x = L, \tag{1.3}$$

và các điều kiện đầu

$$u(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad u_t(x,0) = \widetilde{u}_1(x). \tag{1.4}$$

Lực đàn hồi $P(t)$ tác dụng lên đầu thanh $x = 0$ thỏa mãn bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường[1]

$$P''(t) + \frac{k}{M} P(t) = -\frac{k}{F} u_{tt}(0,t), \quad t > 0, \tag{1.5}$$

$$P(0) = \widetilde{P}_0, \; P'(0) = \widetilde{P}_1. \tag{1.6}$$

Từ (1.5), (1.6) ta biểu diễn $P(t)$ theo $k, M, F, \widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1, u_{tt}(0,t)$ và sau khi tích phân từng phần, ta được

$$P(t)=[P(0)+\frac{k}{F}\widetilde{u}_0(0)]\cos(\omega t)+[P^{/}(0)+\frac{k}{F}\widetilde{u}_1(0)]\frac{\sin(\omega t)}{\omega}-\frac{k}{F}u(0,t)$$
$$+\frac{k\omega}{F}\int_0^t\sin[\omega(t-s)]u(0,s)ds,\ \text{với}\ \omega=\sqrt{k/M}. \tag{1.7}$$

Bằng việc khử ẩn hàm $P(t)$, ta thay điều kiện biên (1.2) bởi

$$Eu_x(0,t)=-[\widetilde{P}_0+\frac{k}{F}\widetilde{u}_0(0)]\cos(\omega t)-[\widetilde{P}_1+\frac{k}{F}\widetilde{u}_1(0)]\frac{\sin(\omega t)}{\omega}+$$
$$+\frac{k}{F}u(0,t)-\frac{k\omega}{F}\int_0^t\sin[\omega(t-s)]u(0,s)ds. \tag{1.8}$$

Khi đó, ta đưa bài toán (1.1) -(1.6) về bài toán (1.1), (1.3), (1.4), (1.8).

Ý nghĩa vật lý của bài toán là mô hình một một búa máy đóng cọc bê tông, trên đầu cọc có bộ phận giảm chấn, chung quanh cọc chịu ma sát đàn hồi nhớt, tổng quát hơn nó chịu thêm một lực phụ. Đầu cọc kia khi đóng cọc gặp phải nền đá cứng chẳng hạn.

Trong [3, 4, 5-10] các tác giả đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.1), (1.4) với điều kiện biên và số hạng phi tuyến $F=F(u,u_t)$ có những dạng khác nhau.

Trong [5-7] Long, Định đã xét bài toán với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t)=g(t)+hu(0,t),\ u(1,t)=0, \tag{1.9}$$

trong đó $h>0$ là hằng số cho trước và trong [8] với điều kiện biên sau đây tổng quát hơn:

$$u_x(x,0)=g(t)+hu(0,t)-\int_0^t k(t-s)u(0,s)\,ds,\ u(1,t)=0. \tag{1.10}$$

Với số hạng phi tuyến tổng quát $F=-F(x,t,u,u_x,u_t)$, các tác giả Long, Diễm [3, 4, 9, 10], đã dùng kỹ thuật xấp xỉ tuyến tính để thiết lập một định lý tồn tại, duy nhất một nghiệm địa phương cho bài toán (1.1), (1.4) với $f(x,t)=0$ và với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất

$$u_x(0,t)-h_0\,u(0,t)=u_x(1,t)+h_1\,u(1,t)=0, \tag{1.11}$$

trong đó $h_0>0,\ h_1\geq 0$ là các hằng số.

Trong [2] Bergounioux, Long và Định đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.1), (1.4) với điều kiện biên

$$u_x(x,0)=g(t)+hu(0,t)-\int_0^t k(t-s)u(0,s)\,ds,\ u_x(1,t)=-K_1u(1,t)-\lambda_1u_t(1,t)=0, \tag{1.12}$$ trong

đó $K_1\geq 0,\ \lambda_1>0$ là các hằng số.

Bài nầy trình bày thuật giải số cho bài toán (1.1) -(1.6). Đầu tiên chúng tôi dùng một sơ đồ sai phân theo biến thời gian đưa bài toán về một hệ phương trình elliptic, sau đó chúng tôi giải xấp xỉ hệ đó bằng phương pháp phần tử hữu hạn cấp một. Cuối cùng chúng tôi minh họa thuật giải trên một ví dụ cụ thể.

2. Xấp xỉ sai phân theo biến thời gian

Đặt: $t_i=i\Delta t,\ i=0,1,\ldots,N,\ \Delta t=T/N,\ P_i=P(t_i),\ u_i(x)=u(x,t_i)$.

Ta xấp xỉ các đạo hàm theo biến thời gian

$$P'(t_i) \cong \frac{P(t_i) - P(t_{i-1})}{\Delta t} = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t},\ u_t(x,t_i) \cong \frac{u(x,t_i) - u(x,t_{i-1})}{\Delta t} = \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{\Delta t},$$

$$u_{tt}(x,t_i) \cong \frac{u_i(x) - 2u_{i-1}(x) + u_{i-2}(x)}{(\Delta t)^2},\ P''(t_i) \cong \frac{P_i - 2P_{i-1} + P_{i-2}}{(\Delta t)^2}.$$

Xấp xỉ sai phân cho hệ (1.1)- (1.6)

$$\frac{u_i(x) - 2u_{i-1}(x) + u_{i-2}(x)}{(\Delta t)^2} - a^2 u_i''(x) + K u_i(x) + \lambda.\frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{\Delta t}$$

$$= f_i(x) \equiv f(x,t_i),\ 2 \le i \le N, \tag{2.1}$$

$$u_0(x) = \widetilde{u}_0(x),\ \frac{u_1(x) - u_0(x)}{\Delta t} = \widetilde{u}_1(x), \tag{2.2}$$

$$u_i(L) = 0,\ 0 \le i \le N, \tag{2.3}$$

$$\frac{P_i - 2P_{i-1} + P_{i-2}}{(\Delta t)^2} + \frac{k}{M} P_i = -\frac{k}{F} \frac{u_i(0) - 2u_{i-1}(0) + u_{i-2}(0)}{(\Delta t)^2},\ 2 \le i \le N, \tag{2.4}$$

$$P_0 = \widetilde{P}_0,\ \frac{P_1 - P_0}{\Delta t} = \widetilde{P}_1. \tag{2.5}$$

Viết lại hệ (2.1)-(2.5)

$$-u_i''(x) + \alpha u_i(x) = F_i(x),\ 0 < x < L, \tag{2.6}$$

$$u_i'(0) - \beta u_i(0) = G_i,\ u_i(L) = 0,\ 2 \le i \le N, \tag{2.7}$$

$$\alpha = \frac{1}{a^2}\left(K + \frac{\lambda}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2}\right),\ \beta = \frac{k}{EF} \frac{1}{1 + \frac{k}{M}(\Delta t)^2}, \tag{2.8}$$

$$F_i(x) = \frac{(2 + \lambda \Delta t) u_{i-1} - u_{i-2}}{(a\Delta t)^2} + \frac{1}{a^2} f_i(x),\quad 2 \le i \le N, \tag{2.9}$$

$$G_i = \beta[-2u_{i-1}(0) + u_{i-2}(0) - \frac{F}{k}(2P_{i-1} - P_{i-2})],\ 2 \le i \le N, \tag{2.10}$$

$$u_0(x) = \widetilde{u}_0(x),\ u_1(x) = \widetilde{u}_0(x) + \Delta t\, \widetilde{u}_1(x),\ \ P_0 = \widetilde{P}_0,\ P_1 = \widetilde{P}_0 + \Delta t\, \widetilde{P}_1. \tag{2.11}$$

$$P_i = -E(\beta u_i(0) + G_i),\ 0 \le i \le N. \tag{2.12}$$

Thuật giải:

Bước 1: Cho trước $u_0(x) = \widetilde{u}_0(x),\ u_1(x) = \widetilde{u}_0(x) + \Delta t\, \widetilde{u}_1(x),\ P_0 = \widetilde{P}_0,\ P_1 = \widetilde{P}_0 + \Delta t\, \widetilde{P}_1$.

Tìm $u_2(x)$, P_2 là nghiệm của bài toán:

$$-u_2''(x) + \alpha u_2(x) = F_2(x),\ 0 < x < L, \tag{2.13}$$

$$u_2'(0) - \beta u_2(0) = G_2,\ u_2(L) = 0, \tag{2.14}$$

$$F_2(x) = \frac{(2 + \lambda\Delta t) u_1(x) + u_0(x)}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{a^2} f_2(x), \tag{2.15}$$

$$G_2 = \beta[-2u_1(0) + u_0(0) - \frac{F}{k}(2P_1 - P_0)], \tag{2.16}$$

$$P_2 = -E(\beta u_2(0) + G_2). \tag{2.17}$$

Bước 2: Giả sử $u_{i-1}(x)$, P_{i-1}, $i \ge 3$ được xác định. Ta tìm $F_i(x), G_i$ theo các công thức (2.9), (2.10).

Bước 3: Sau đó giải bài toán (2.6)-(2.8), (2.12) để tìm $u_i(x)$, P_i.

3. Khảo sát bài toán (2.6)-(2.8)

Đặt $\Omega = (0, L)$. Chúng ta sử dụng các không gian hàm thông dụng: $C^k(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^k(\Omega)$. Để cho gọn ta ký hiệu lại như sau: $W^{k,p} = H^k = H^k(\Omega)$, $H^0 = L^2$, $k = 0,1,...$

Ký hiệu $\|.\|$ là chuẩn trong L^2 và để phân biệt nó với một chuẩn khác, ta dùng ký hiệu $\|.\|_X$ để chỉ chuẩn trong không gian định chuẩn X.

Đặt $V = \{v \in H^1(0,L) : v(L) = 0\}$, khi đó ta có các kết quả sau đây (xem [11]):

Bổ đề 2: (i) *V là không gian Banach phản xạ, tách được đối với chuẩn* $\|v\|_V = \|v'\|$.

(ii) Phép nhúng $V \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ là compact và

$$\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V, \text{ trong đó } C_0 = \sqrt{L}.$$

Mặt khác, $V \hookrightarrow L^2$ với phép nhúng liên tục và nằm trù mật. Ký hiệu V' là không gian đối ngẫu của V, ta đồng nhất L^2 với đối ngẫu của nó, do đó ta đồng nhất L^2 như là một không gian con của V'. Khi đó ta có $V \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow V'$ với các phép nhúng liên tục và nằm trù mật. Ta cũng ký hiệu $\langle f, v\rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của $f \in V'$ và $v \in V$.

Nghiệm yếu của bài toán (2.6)-(2.8) được thành lập từ bài toán biến phân sau:

Bài toán (P_i): Tìm $u_i \in V = \{v \in H^1(0,L) : v(L) = 0\}$ sao cho:

$$a(u_i, v) = \langle L_i, v\rangle, \ \forall v \in V, \tag{3.1}$$

trong đó

$$a(u_i, v) = \int_0^L [u_i'(x)v'(x) + \alpha u_i(x)v(x)]dx + \beta u_i(0)v(0), \tag{3.2}$$

$$\langle L_i, v\rangle = \int_0^L F_i(x)v(x)dx - G_i v(0). \tag{3.3}$$

Bổ đề 1: Dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot)$ là đối xứng, liên tục và cưỡng bức trên V, tức là:

(i) $|a(u,v)| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$,

(ii) $a(v,v) \ge \|v\|_V^2$, $\forall v \in V$,

trong đó, $M_1 = 1 + (\alpha + \beta)L$.

Nhờ định lý Lax-Milgram ta có:

Định lý 1: *Nghiệm $u_i \in V$ của bài toán (P_i) tồn tại và duy nhất.*

4. Xấp xỉ bài toán (P_i) bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Trước hết ta giới thiệu họ các không gian hữu hạn chiều để xây dựng thuật giải xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Ta chia đoạn $\overline{\Omega} = [0, L]$ thành m đoạn con $\overline{\Omega}_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le m$, bởi các điểm nút nội suy $x_j = jh$, $0 \le j \le m$ với $h = L/m$.

Gọi $P_1(\overline{\Omega}_j)$ là tập các nhị thức bậc nhất xác định trên $\overline{\Omega}_j$.

Đặt $V_m = \{v_m \in C^0(\overline{\Omega}) \cap V : v_m|_{\overline{\Omega}_j} \in P_1(\overline{\Omega}_j), \forall j = 1,2,...,m\}$. (4.1)

Khi đó V_m là một không gian con hữu hạn chiều của V sinh bởi m hàm cơ sở w_j, $0 \le j \le m-1$ như sau:

- với $1 \le j \le m-1$: $$w_j(x) = \begin{cases} (x-x_j)/h, & \text{nếu } x_{j-1} \le x \le x_j, \\ (x_{j+1}-x)/h, & \text{nếu } x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{nếu } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

- với $j=0$: $$w_0(x) = \begin{cases} (x_1 - x)/h, & \text{nếu } 0 \le x \le x_1, \\ 0, & \text{nếu } x_1 \le x \le L. \end{cases}$$

Hơn nữa, các hàm w_j còn thỏa tính chất $w_j(x_i) = \delta_{ij}$, $0 \le j \le m-1, 0 \le i \le m$.

(δ_{ij} là ký hiệu Kronecker).

Ta xác định một toán tử nội suy $r_m : V \to V_m$ mà hạn chế của nó trên tập con trù mật $V \cap C^2(\overline{\Omega})$ của V cho bởi

$$(r_m v)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} v(x_j) w_j(x), \qquad v \in V \cap C^2(\overline{\Omega}). \tag{4.2}$$

Khi đó ta có bổ đề sau mà chứng minh không khó khăn.

Bổ đề 3. $\|v - r_m v\|_{H^1} \le \dfrac{C}{m}$, $\forall v \in V \cap H^2$, trong đó $C = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\|v'\|^2 + \|v''\|^2\right]^{1/2}$.

Bây giờ ta xấp xỉ bài toán (P_i) bởi họ các bài toán hữu hạn chiều $(P_i^{(m)})$ như sau

Bài toán $(P_i^{(m)})$: Tìm $u_i^{(m)} \in V_m$ sao cho

$$a(u_i^{(m)}, w_j) = \langle L_i, w_j \rangle, \ \forall j, 0 \le j \le m-1. \tag{4.3}$$

Nhờ định lý Lax-Milgram áp dụng cho dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot)$ và dạng tuyến tính L_i trên không gian hữu hạn chiều V_m, ta có:

Định lý 2: *Nghiệm* $u_i^{(m)} \in V_m$ *của bài toán* $(P_i^{(m)})$ *tồn tại và duy nhất.*

Định lý 3: (i) $\lim_{m \to +\infty} \left\|u_i^{(m)} - u_i\right\|_V = 0.$

(ii) *Nếu nghiệm* $u_i \in V \cap H^2$, *thì ta có sự đánh giá sai số*

$$\left\|u_i^{(m)} - u_i\right\|_V \le (2 + (\alpha+\beta)L)\frac{C_i}{m},$$

trong đó, $C_i = C(u_i', u_i'') = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\|u_i'\|^2 + \|u_i''\|^2\right]^{1/2}$.

Chứng minh: Chứng minh Định lý 3 không khó khăn, ta bỏ qua chi tiết.

5. Giải bài toán $(P_i^{(m)})$:

Đặt $u_i^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{(m)} w_j$, bài toán $(P_i^{(m)})$ chính là hệ phương trình tuyến tính:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a(w_s, w_j) c_{ij}^{(m)} = \langle L_i, w_s \rangle, \ 0 \le s \le m-1. \tag{5.1}$$

hay $\qquad A^{(m)} \vec{c}_i^{(m)} = \vec{b}_i$, với

$\vec{c}_i^{(m)} = (c_{i0}^{(m)}, c_{i1}^{(m)}, ..., c_{i\,m-1}^{(m)})^T$, $\vec{b}_i = (b_{i0}, b_{i1}, ..., b_{i\,m-1})^T$, $b_{is} = \langle L_i, w_s \rangle$, $0 \le s \le m-1$,

$A^{(m)} = (a_{sj}^{(m)})_{0 \le s, j \le m-1}$, $a_{sj}^{(m)} = a(w_s, w_j), 0 \le s, j \le m-1$.

Chú ý rằng $A^{(m)} = (a_{sj}^{(m)})_{0 \le s, j \le m-1}$ là ma trận cấp m, 3 đường chéo như sau:

$$A^{(m)} = (a_{sj}^{(m)}) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

trong đó: $\gamma_0 = \dfrac{1}{h} + \dfrac{1}{3}\alpha h + \beta$, $\gamma_1 = \dfrac{-1}{h} + \dfrac{1}{6}\alpha h$, $\gamma_2 = \dfrac{2}{h} + \dfrac{2}{3}\alpha h$.

6. Áp dụng bằng số

Xét bài toán (1.1) -(1.6) tương ứng với $L = 1, a = 1, K = 1, \lambda = 1, E = 1, M = 1$,

$k = M = 2F, \widetilde{P}_0 = -1, \widetilde{P}_1 = 1$, $f(x,t) = [(1 + \dfrac{\pi^2}{4})\cos(\dfrac{\pi x}{2}) + \pi \sin(\dfrac{\pi x}{2})]e^{x-t}$,

$\widetilde{u}_0(x) = e^x \cos(\dfrac{\pi x}{2})$, $\widetilde{u}_1(x) = -e^x \cos(\dfrac{\pi x}{2})$ như sau

$$u_{tt} - u_{xx} + u + u_t = f(x,t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \tag{6.1}$$

$$\sigma_x = u_x(0,t) = -P(t), \; u(1,t) = 0, \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = \widetilde{u}_0(x) = e^x \cos(\frac{\pi x}{2}), \; u_t(x,0) = \widetilde{u}_1(x) = -e^x \cos(\frac{\pi x}{2}), \tag{6.3}$$

$$P^{//}(t) + P(t) = -\frac{1}{2}u_{tt}(0,t), \; t > 0, \quad t > 0, \tag{6.4}$$

$$P(0) = \widetilde{P}_0 = -1, \; P^{/}(0) = \widetilde{P}_1 = 1. \tag{6.5}$$

Nghiệm chính xác của bài toán (6.1) -(6.5) là

$$u^{ex}(x,t) = e^{x-t}\cos(\frac{\pi x}{2}), \; P^{ex}(t) = -e^{-t}. \tag{6.6}$$

Thuật giải: Xét $T = 1$. Cho trước $N \ge 3$. Đặt: $t_i = i\Delta t$, $i = 0,1,...,N$, $\Delta t = T/N = 1/N$.

Cho trước $u_0(x) = \widetilde{u}_0(x)$, $u_1(x) = \widetilde{u}_0(x) + \Delta t\, \widetilde{u}_1(x)$, $P_0 = \widetilde{P}_0$, $P_1 = \widetilde{P}_0 + \Delta t\, \widetilde{P}_1$.

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta t)^2} = 1 + N + N^2, \; \beta = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + (\Delta t)^2} = \frac{N^2}{2(1 + N^2)}, \tag{6.7}$$

$$a(u,v) = \int_0^1 [u^{/}(x)v^{/}(x) + \alpha u(x)v(x)]dx + \beta u(0)v(0), \tag{6.8}$$

Đặt: $$u_0^{(m)}(x) \equiv u_0(x) = \widetilde{u}_0(x), \quad u_1^{(m)}(x) \equiv u_1(x) = \widetilde{u}_0(x) + \Delta t\, \widetilde{u}_1(x), \tag{6.9}$$

$$P_0^{(m)} \equiv P_0 = \widetilde{P}_0, \quad P_1^{(m)} \equiv P_1 = \widetilde{P}_0 + \Delta t\, \widetilde{P}_1. \tag{6.10}$$

$$F_2^{(m)}(x) = \frac{(2 + \Delta t)u_1^{(m)}(x) - u_0^{(m)}(x)}{(\Delta t)^2} + f_2(x), \tag{6.11}$$

$$G_2^{(m)} = \beta[-2u_1^{(m)}(0) + u_0^{(m)}(0) - \frac{1}{2}(2P_1^{(m)} - P_0^{(m)})], \tag{6.12}$$

Bước 1: Tìm $u_2^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{2j}^{(m)} w_j(x)$ và $P_2^{(m)} = -\beta u_2^{(m)}(0) - G_2^{(m)}$ với các hệ số $c_{2j}^{(m)}$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a(w_s, w_j) c_{2j}^{(m)} = \langle L_2^{(m)}, w_s \rangle, \ 0 \le s \le m-1. \tag{6.13}$$

$$\langle L_2^{(m)}, v \rangle = \int_0^1 F_2^{(m)}(x) v(x) dx - G_2^{(m)} v(0). \tag{6.14}$$

Bước 2: Giả sử ta xác định được $u_{i-1}^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{i-1j}^{(m)} w_j(x)$ và $P_{i-1}^{(m)} = -\beta u_{i-1}^{(m)}(0) - G_{i-1}^{(m)}$. Ta tìm $F_i^{(m)}(x), G_i^{(m)}$ theo các công thức:

$$F_i^{(m)}(x) = \frac{(2+\Delta t)u_{i-1}^{(m)} - u_{i-2}^{(m)}}{(\Delta t)^2} + f(x, t_i), \qquad 3 \le i \le N, \tag{6.15}$$

$$G_i^{(m)} = \beta[-2u_{i-1}^{(m)}(0) + u_{i-2}^{(m)}(0) - \frac{1}{2}(2P_{i-1}^{(m)} - P_{i-2}^{(m)})], \ 3 \le i \le N, \tag{6.16}$$

Ta xác định $u_i^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{(m)} w_j(x)$ và $P_i^{(m)} = -\beta u_i^{(m)}(0) - G_i^{(m)}$, trong đó các hệ số $c_{ij}^{(m)}$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a(w_s, w_j) c_{ij}^{(m)} = \langle L_i^{(m)}, w_s \rangle, \ 0 \le s \le m-1. \tag{6.17}$$

$$\langle L_i^{(m)}, v \rangle = \int_0^1 F_i^{(m)}(x) v(x) dx - G_i^{(m)} v(0). \tag{6.18}$$

Tiến hành cho đến $i = N$. Quan sát các sai số sau đây khi cho N, m tăng dần.

$$E(N,m) = \max_{2 \le i \le N} \max_{0 \le j \le m-1} \left| c_{ij}^{(m)} - u^{ex}(x_j, t_i) \right|, \ \widetilde{E}(N) = \max_{2 \le i \le N} \left| P_i^{(m)} - P^{ex}(t_i) \right|$$

7. Thuật giải cụ thể

$$\widetilde{u}_0(x) = e^x \cos(\frac{\pi x}{2}), \ \widetilde{u}_1(x) = -e^x \cos(\frac{\pi x}{2}), \ \widetilde{P}_0 = -1, \widetilde{P}_1 = 1, \tag{7.1}$$

$$f(x,t) = [(1 + \frac{\pi^2}{4})\cos(\frac{\pi x}{2}) + \pi \sin(\frac{\pi x}{2})] e^{x-t}. \tag{7.2}$$

Cho trước $N \ge 3$, $m \ge 3$.

Đặt: $$\alpha = 1 + N + N^2, \ \beta = \frac{N^2}{2(1+N^2)}, \ h = 1/m, \tag{7.3}$$

$$\gamma_0 = m + \frac{\alpha}{3m} + \beta, \ \gamma_1 = -m + \frac{\alpha}{6m}, \ \gamma_2 = 2m + \frac{2\alpha}{3m}. \tag{7.4}$$

$$u_0(x) = \widetilde{u}_0(x), \ u_1(x) = \widetilde{u}_0(x) + \frac{1}{N}\widetilde{u}_1(x), \ P_0 = \widetilde{P}_0, \ P_1 = \widetilde{P}_0 + \frac{1}{N}\widetilde{P}_1. \tag{7.5}$$

Ta tìm $u_i^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_{ij}^{(m)}w_j(x)$ và $P_i^{(m)}$, $2\le i\le N$ theo sơ đồ sau:

Bước 1: Tìm $u_2^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_{2j}^{(m)}w_j(x)$ và $P_2^{(m)}$:

1.1. Tính

$$F_2^{(m)}(x)=N(2N+1)u_1^{(m)}(x)-N^2u_0^{(m)}(x)+f(x,2/N), \tag{7.6}$$

$$G_2^{(m)}=\beta[-2u_1^{(m)}(0)+u_0^{(m)}(0)-P_1^{(m)}+\frac{1}{2}P_0^{(m)})], \tag{7.7}$$

trong đó

$$u_0^{(m)}(x)=u_0(x),\ u_1^{(m)}(x)=u_1(x),\ P_0^{(m)}=P_0,\ P_1^{(m)}=P_1. \tag{7.8}$$

1.2. Tìm $\vec{c}_2^{(m)}=(c_{20}^{(m)},c_{21}^{(m)},...,c_{2m-1}^{(m)})^T\in IR^m$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$A^{(m)}\vec{c}_2^{(m)}=\vec{b}_2^{(m)}, \tag{7.9}$$

trong đó

* $A^{(m)}=(a_{sj}^{(m)})$ là ma trận ba đường chéo (5.2) với $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ cụ thể như sau:

$$\gamma_0=m+\frac{\alpha}{3m}+\beta,\ \gamma_1=-m+\frac{\alpha}{6m},\ \gamma_2=2m+\frac{2\alpha}{3m}. \tag{7.10}$$

* $\vec{b}_2^{(m)}=(b_{20}^{(m)},b_{12}^{(m)},...,b_{2m-1}^{(m)})^T$, $b_{2s}^{(m)}=\int_0^1F_2^{(m)}(x)w_s(x)dx-G_2^{(m)}\delta_{0s},0\le s\le m-1.$ (7.11)

1.3. Tính $P_2^{(m)}=-\beta c_{20}^{(m)}-G_2^{(m)}$. (7.12)

Bước 2: Giả sử ta xác định được $u_{i-1}^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_{i-1j}^{(m)}w_j(x)$ và $P_{i-1}^{(m)}$.

Ta tìm $u_i^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_{ij}^{(m)}w_j(x)$ và $P_i^{(m)}$ như sau:

2.1. Tính $F_i^{(m)}(x),G_i^{(m)}$ theo các công thức:

$$F_i^{(m)}(x)=N(2N+1)u_{i-1}^{(m)}(x)-N^2u_{i-2}^{(m)}(x)+f(x,i/N), \tag{7.13}$$

$$G_i^{(m)}=\beta[-2u_{i-1}^{(m)}(0)+u_{i-2}^{(m)}(0)-P_{i-1}^{(m)}+\frac{1}{2}P_{i-2}^{(m)}]. \tag{7.14}$$

2.2. Tìm $\vec{c}_i^{(m)}=(c_{i0}^{(m)},c_{i1}^{(m)},...,c_{im-1}^{(m)})^T\in IR^m$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$A^{(m)}\vec{c}_i^{(m)}=\vec{b}_i^{(m)}, \tag{7.15}$$

với $\vec{b}_i^{(m)}=(b_{i0}^{(m)},b_{i2}^{(m)},...,b_{im-1}^{(m)})^T$, $b_{is}^{(m)}=\int_0^1F_i^{(m)}(x)w_s(x)dx-G_i^{(m)}\delta_{0s},\ 0\le s\le m-1.$(7.16)

2.3. Tính $P_i^{(m)}=-\beta c_{i0}^{(m)}-G_i^{(m)}$. (7.17)

Tiến hành qui trình nầy cho đến $i=N$. Lập bảng theo dõi các sai số sau đây khi cho N,m tăng dần.

$$E(N,m)=\max_{2\le i\le N}\max_{0\le j\le m-1}\left|c_{ij}^{(m)}-u^{ex}(x_j,t_i)\right|,\ \widetilde{E}(N)=\max_{2\le i\le N}\left|P_i^{(m)}-P^{ex}(t_i)\right| \tag{7.18}$$

trong đó $u^{ex}(x_j,t_i)=e^{-i/N}e^{j/m}\cos(\frac{j\pi}{2m}),\ P^{ex}(t_i)=-e^{-i/N},\ 0\le j\le m-1,\ 2\le i\le N.$

8. Kết luận phân tích lời giải số: Thuật toán này được cài đặt bằng ngôn ngữ Matlab, mỗi bước thời gian $\Delta t = T / N$ cho trước ta chia số phần tử thanh $m=$ 10, 20, 30, 80, 100, 120, 150. Các kết quả tính toán lần lượt cho các trường hợp $m=$ 10, 20, 30, 80, 100, 120, 150; $N=$ 5, 6, 7, 8, 10 được thống kê lại theo 5 bảng sau:

m	$E(5,m)$	$\widetilde{E}(5)$	$E(6,m)$	$\widetilde{E}(6)$	$E(7,m)$	$\widetilde{E}(7)$
10	0.2615	2.7454	0.3043	2.7107	0.3394	2.7058
20	0.2588	2.7440	0.3022	2.7102	0.3377	2.7058
30	0.2581	2.7436	0.3017	2.7101	0.3374	2.7059
80	0.2575	2.7432	0.3012	2.7100	0.3370	2.7060
100	0.2575	2.7432	0.3012	2.7100	0.3370	2.7060
120	0.2574	2.7432	0.30123	2.7100	0.3370	2.7060
150	0.2574	2.7432	0.3011	2.7100	0.3370	2.7060

m	$E(8,m)$	$\widetilde{E}(8)$	$E(10,m)$	$\widetilde{E}(10)$
10	0.3699	2.7129	0.4194	2.7192
20	0.3686	2.7129	0.4183	2.7192
30	0.3683	2.7130	0.4181	2.7193
80	0.3680	2.7130	0.4180	2.7193
100	0.3680	2.7130	0.4180	2.7193
120	0.3680	2.7130	0.4180	2.7193
150	0.3680	2.7130	0.4179	2.7193

Quan sát kết quả trong các bảng trên, khi cố định N các sai số thu được giảm dần theo bước chia mịn số phần tử trên thanh, chẳng hạn như quan sát ở bảng $N=5$ trên cột $E(5,m)$ cho thấy $E(5,m)$ giảm dần khi cho m tăng lên lần lượt với các giá trị $m=$ 10, 20, 30, 80, 100, 120, 150. Quan sát tương tự cho các bảng còn lại với $N=$ 6, 7, 8, 10.

Từ (7.3) ta suy ra từ Định lý 3 một đánh giá sai số:

$$\max_{0\le i\le N}\left\|u_i^{(m)}-u_i\right\|_V \le C\left(3+N+N^2+\frac{N^2}{2(1+N^2)}\right)\frac{1}{m}, \tag{7.19}$$

với $C=\max_{0\le i\le N} C_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\max_{0\le i\le N}\left[\left\|u_i'\right\|^2+\left\|u_i''\right\|^2\right]^{1/2}$.

Với đánh giá sai số thu được như (7.19) cho thấy rằng khi tăng cho m lên, đồng thời vẫn cho N tăng lên (tương ứng $\Delta t = 1/N$ bé) "không hợp lý" thì kết quả thu được không tốt. Kết quả tính toán trong các bảng trên đây cũng phù hợp với công thức (7.19). Chẳng hạn như quan sát ở hai bảng ứng với $N=$ 5, 6 trên cùng giá trị $m=150$, ta thấy: $E(5,150)=0.2574 < E(6,150)=0.3011$.

SHOCK BETWEEN ABSOLUTELY SOLID BODY AND ELASTIC BAR WITH THE ELASTIC VISCOUS FRICTIONAL RESISTANCE AT THE SIDE

Nguyen Phu Vinh
Department of Information Technology, College of Industry 4, HoChiMinh City

ABSTRACT: *In this paper we investigate The shock between absolutely solid body and elastic bar, the solid body of mass M moved with at first speed V_0, it knocks elastic bar on the*

damper having the stiffness factor k. The another end of bar rely on the elastic solid pedestal. The bar is loaded by the visco-elastic friction force on surrounding face. The frist we constitute the equilibrium equation systems, after that we used the finite difference for time variable to change this equation to elliptic-equation, next by using finite element method with one level to solve approximative system. Finally we show the numerical example with the angorithm installed by MATLAB.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]***N.T. An, N.D. Trieu***, *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side, J. Mech. NCSR. Vietnam* Tom **XIII** (2) (1991), 1-7.

[2]***M. Bergounioux, N.T. Long, A.P.N. Dinh***, *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar, Nonlinear Anal.* **43** (2001), 547-561.

[3]***N.T. Long, A.P.N. Dinh***, *On the quasilinear wave equation with a mixed nonhomoge-neous condition, SEA. Bull. Math.* **19** (1995), 127-130.

[4]***N.T. Long, A.P.N. Dinh***, *The semilinear wave equation associated with a nonlinear boundary, Demonstratio Math.* **30** (1997), 557-572.

[5]***N.T. Long, A.P.N. Dinh***, *On the quasilinear wave equation:* $u_{tt} - \Delta u + f(u,u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition, Nonlinear Anal.* **19** (1992), 613-623.

[6]***N.T. Long, A.P.N. Dinh, T.N. Diem***, *Asymptotic expan-sion of the solution for nonlinear wave equation with mixed nonhomogeneous conditions*, ***Demonstratio Math***. Vol. **36**, (2003), 683-695.

[7]***J.L. Lions***, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, Dunod-Gauthier-Villars, Paris.* 1969.