XẤP XỈ TUYẾN TÍNH LIÊN KẾT VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN- HÀM PHI TUYẾN

Phạm Hồng Danh[1], **Huỳnh Thị Hoàng Dung**[2]
[1] Khoa Thống Kê -Toán- Tin học, Đại học Kinh Tế Tp.HCM
[2] Khoa Toán- Tin học, Đại học Sư Phạm Tp.HCM

(Bài nhận ngày 04 tháng 8 năm 2003)

TÓM TẮT. Xét hệ các phương trình tích phân- hàm phi tuyến

$$(*)\qquad f_i(x)=\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}\Phi\left(x,\int_0^{X_{ijk}(x)}f_j(t)dt\right)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ijk}f_j(S_{ijk}(x))+g_i(x),$$

$\forall x\in\Omega;\ i=1,\dots,n,$ trong đó ε là một tham số bé, $\Omega=[a,b]$ hoặc Ω là một khoảng không bị chặn của IR, a_{ijk},b_{ijk} là các hằng số thực cho trước, $g_i:\Omega\to IR$, $X_{ijk},S_{ijk}:\Omega\to\Omega$, và $\Phi:\Omega\times IR\to IR$ là các hàm số liên tục cho trước, $f_i:\Omega\to IR$ là các ẩn hàm. Bằng cách dùng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh hệ (*) có nghiệm duy nhất. Nếu $\Phi\in C^2(\Omega\times IR;IR)$ và $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|b_{ijk}|<1$ chúng tôi thu được một thuật giải lặp cấp hai cho hệ (*). Hơn nữa, chúng tôi cũng thu được một số kết quả liên quan sự tồn tại C^1- nghiệm của hệ (*).

1. Mở đầu

Trong bài nầy, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm- tích phân sau

$$(1.1)\qquad f_i(x)=\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}\Phi\left(x,\int_0^{X_{ijk}(x)}f_j(t)dt\right)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ijk}f_j(S_{ijk}(x))+g_i(x),$$

$\forall x\in\Omega;\ i=1,\dots,n,$ trong đó $\Omega=[a,b]$ hoặc Ω là một khoảng không bị chặn của IR, a_{ijk},b_{ijk} là các hằng số thực cho trước; $g_i:\Omega\to IR$, X_{ijk}, $S_{ijk}:\Omega\to\Omega$, và $\Phi:\Omega\times IR\to IR$ là các hàm số liên tục cho trước thoả một số điều kiện nào đó mà ta sẽ đặt sau. Các hàm $f_i:\Omega\to IR$ là các ẩn hàm, ε là một tham số bé.

Trong [3-5] các tác giả đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình hàm

$$(1.2)\qquad f(x)=a(x,f(S(x)))$$

trong không gian hàm $BC[a,b]$. Trong [6], các tác giả Long, Nghĩa, Ruy, Khôi đã nghiên cứu một trường hợp riêng của (1.1) với $\Phi\equiv0$. Trong [14], các tác giả Wu, Xuan, Zhu đã nghiên cứu hệ (1.1) sau đây ứng với $\Omega=[-b,b]$, $m=n=2$, $\Phi\equiv0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất

$$(1.3)\qquad \begin{cases} f_1(x)=a_{11}f_1(b_{11}x+c_{11})+a_{12}f_2(b_{12}x+c_{12})+a_{13}f_1(b_{13}x+c_{13})+g_1(x),\\ f_2(x)=a_{21}f_1(b_{21}x+c_{21})+a_{22}f_2(b_{22}x+c_{22})+a_{23}f_2(b_{23}x+c_{23})+g_2(x),\end{cases}$$

với mọi $x\in\Omega=[-b,b]$, trong đó, các hằng số a_{ij},b_{ij},c_{ij},b cho trước thỏa các điều kiện

$$(1.4)\qquad |b_{ij}|<1,\ b\ge \max_{i,j}\ [\ \frac{|c_{ij}|}{1-|b_{ij}|}\ ],\ \max_{i}\ (\ \sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\ )<1,$$

các hàm số g_1, g_2 liên tục cho trước và f_1, f_2 là các ẩn hàm. Nghiệm của hệ (1.2) lúc này cũng được xấp xỉ bởi một dãy qui nạp hội tụ đều và ổn định đối với các g_i.

Trong [8], Long, Danh, Khôi đã nghiên cứu hệ phương trình tích phân tuyến tính

$$(1.5)\qquad f_i(x)=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}f_j(S_{ij}(x))+\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}\int_0^{X_{ij}(x)}f_j(t)dt+g_i(x),$$

$i=1,2,\ x\in\Omega\subset IR,$ trong đó Ω là một khoảng đóng bị chận hoặc khoảng không bị chận của IR. Các hàm $g_i:\Omega\to IR,\ S_{ij}, X_{ij}:\Omega\to\Omega$ là các hàm số liên tục cho trước, $a_{ij},\alpha_{ij}\in IR$ là các hằng số, và f_1, f_2 là các ẩn hàm.

Trong [1], Danh, Dung, Long đã khảo sát hệ (1.1) tương ứng với $\Phi(x,z)=z$, $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất, mà cụ thể có dạng như sau

$$(1.6)\qquad f_i(x)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijk}f_j(b_{ijk}x+c_{ijk})+\alpha_{ijk}\int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}}f_j(t)dt\right)+g_i(x),$$

$i=1,2,\ldots,n,\ x\in\Omega=[-b,b]$. Các tác giả trong [1, 10] đã xấp xỉ nghiệm $f=(f_1,\ldots,f_n)$ của hệ (1.5) bằng một dãy các đa thức hội tụ đều, trong đó $g_i:\Omega\to IR$ là các hàm liên tục cho trước, $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}\in IR$ là các hằng số thực cho trước thỏa các điều kiện

$$|b_{ijk}|<1,\ |\beta_{ijk}|<1,\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\max_{1\le j\le n}\left(|a_{ijk}|+b|\alpha_{ijk}|\right)<1,$$

$$(1.7)\qquad \max_{1\le i,j\le n,\ 1\le k\le m}\frac{|c_{ijk}|}{1-|b_{ijk}|}\le b,\quad \max_{1\le i,j\le n,\ 1\le k\le m}\frac{|\gamma_{ijk}|}{1-|\beta_{ijk}|}\le b.$$

Một số tác giả cũng tiến hành tính số hệ (1.1) tương ứng với $\Phi\equiv 0$, chẳng hạn, trong [2, 12], các tác giả Nghĩa, Khôi đã kiểm tra một thuật toán số cho hệ cụ thể sau

$$(1.8)\qquad \begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{100}f_1(\frac{x}{2})+\frac{1}{200}f_1(\frac{x}{3}+\frac{1}{2})+\frac{1}{100}f_2(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})+\frac{1}{100}f_2(\frac{x}{3}+\frac{1}{4})+g_1(x),\\ f_2(x)=\frac{1}{100}f_1(\frac{x}{4})+\frac{1}{200}f_1(\frac{x}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{100}f_2(\frac{x}{2})+\frac{1}{200}f_2(\frac{x}{4}+\frac{3}{4})+g_2(x),\end{cases}$$

với mọi $x\in[-1,1]$, trong đó g_1, g_2 được chọn sao cho hệ (1.8) có nghiệm chính xác biết trước.

Trong trường hợp $\Phi\equiv 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất, $g\in C^r(\Omega;IR^n)$ và $\Omega=[-b,b]$ các tác giả trong [6] đã thu được một khai triển Maclaurin của nghiệm của hệ (1.1) cho đến cấp r. Hơn nữa, nếu g_i là các đa thức bậc r, thì nghiệm của hệ (1.1) cũng là đa thức bậc r. Kế đó, nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f của (1.1) được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Sau đó, các kết quả trên đây đã được nới rộng bởi Long, Nghĩa[7] và Nghĩa[13] cho miền $\Omega\subset IR^p$ nhiều chiều và S_{ijk} là các hàm affine. Hơn nữa, trong [11] cũng cho một điều kiện đủ về hội tụ cấp hai của hệ phương trình hàm.

Trong [11], Long đã nghiên cứu hệ phương trình hàm phi tuyến

(1.9) $\quad f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Psi\big(f_j(R_{ijk}(x))\big) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega$, trong đó Ω là một khoảng đóng bị chặn hoặc khoảng không bị chặn của IR. Các hàm $g_i : \Omega \to IR,\ S_{ijk}, R_{ijk} : \Omega \to \Omega$ và $\Psi : IR \to IR$ là các hàm số liên tục cho trước; a_{ijk}, b_{ijk} là các hằng số, và $f = (f_1,...,f_n)$ là các ẩn hàm. Một số kết quả liên quan đến khai triển tiệm cận của nghiệm cho hệ (1.9) theo một tham số bé ε cũng được xem xét với $\Psi(y) = y^2$ (xem[9]) và tổng quát với $\Psi \in C^1(IR)$ (xem [11]). Một số kết quả liên quan đến khai triển tiệm cận của nghiệm cho hệ (1.9) theo một tham số bé ε cũng được xem xét trong bài báo của Long, Diễm [9] và Long[11].

Trong bài nầy, bằng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh hệ (1.1) tồn tại và duy nhất nghiệm mà nghiệm nầy cũng ổn định đối với các hàm g_i, trong đó, $\Omega = [a,b]$ hoặc Ω là một khoảng không bị chặn của IR. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu một điều kiện đủ để thu được thuật giải hội tụ cấp hai cho hệ (1.1). Sau đó, nếu $S_{ijk}, X_{ijk} \in C^1(\Omega; IR)$ và $g \in C^1(\Omega; IR^n)$ chúng tôi chứng minh rằng nghiệm của hệ (1.1) cũng thuộc $C^1(\Omega; R^n)$. Trường hợp $\Phi(x,z) = z$, và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất và nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f của(1.1) được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Các kết quả thu được trên đây là một sự tổng quát hoá tương đối của các kết quả trong [1-14].

2. Định lý tồn tại, duy nhất và ổn định nghiệm

Ta ký hiệu $\Omega = [a,b]$ hay Ω là khoảng không bị chặn trong IR.

Với $\Omega = [a,b]$, ta ký hiệu $X = C(\Omega; IR^n)$ là không gian Banach của các hàm số $f = (f_1,...,f_n) : \Omega \to IR^n$ liên tục trên Ω đối với chuẩn

(2.1) $$\|f\|_X = \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|.$$

Khi Ω là khoảng không bị chặn, ta ký hiệu $X = C_b(\Omega; IR^n)$ là không gian Banach của các hàm số $f : \Omega \to IR^n$ liên tục, bị chặn trên Ω đối với chuẩn (2.1).

Tương tự, với số nguyên không âm m, ta đặt

$$C^m(\Omega; IR^n) = \{f = (f_1,...,f_n) \in C(\Omega; IR^n) : f_i^{(k)} \in C(\Omega; IR),\ 0 \le k \le m,\ 1 \le i \le n\}.$$

Với Ω là khoảng không bị chặn, ta ký hiệu

$$C_b^m(\Omega; IR^n) = \{f = (f_1,...,f_n) \in C_b(\Omega; IR^n) : f_i^{(k)} \in C_b(\Omega; IR),\ 0 \le k \le m,\ 1 \le i \le n\}.$$

Mặt khác, $C^m(\Omega; IR^n)$ và $C_b^m(\Omega; IR^n)$ cũng là các không gian Banach đối với chuẩn:

(2.2) $$\|f\|_m = \max_{1\le k\le m} \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|f_i^{(k)}(x)\right|.$$

Ta viết hệ (1.1) dưới dạng phương trình toán tử trong $X \equiv C(\Omega; IR^n)$ như sau

(2.3) $$f = \varepsilon Af + Bf + g$$ trong đó

$$f = (f_1,...,f_n),\ Af = ((Af)_1,...,(Af)_n),\ Bf = ((Bf)_1,...,(Bf)_n),$$

với

(2.4) $$(Af)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right),$$

(2.5) $(Bf)_i(x)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x))$, $(1\le i\le n)$ với mọi $x\in\Omega$.

Trong phần nầy, dựa vào định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm của hệ (2.3).

Đặt $\|[b_{ijk}]\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|b_{ijk}|$.

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $S_{ijk}, X_{ijk}:\Omega\to\Omega$ liên tục,

(H_2) $g=(g_1,\ldots,g_n)\in X$,

(H_3) $\|[b_{ijk}]\|<1$,

(H_4) $\Phi:\Omega\times IR\to IR$ thỏa điều kiện

$$\forall M>0, \exists C_1(M)>0: |\Phi(x,z_1)-\Phi(x,z_2)|\le C_1(M)|z_1-z_2|,$$
$$\forall z_1,z_2\in IR,\ |z_i|\le Mb,\ i=1,2.$$

(H_5) $M>\dfrac{2\|g\|_X}{1-\|[b_{ijk}]\|}$ và $0<\varepsilon_0<\dfrac{M(1-\|[b_{ijk}]\|)}{2\left(bMC_1(M)+n\sup_{x\in\Omega}|\Phi(x,0)|\right)\|[a_{ijk}]\|}$.

Với mỗi $M>0$, ta đặt $K_M=\{f\in X:\|f\|_X\le M\}$.

Đầu tiên, ta cần hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Giả sử $\|[b_{ijk}]\|<1$ và $S_{ijk}:\Omega\to\Omega$ liên tục. Khi đó:*

i) $\|Bf\|_X\le\|[b_{ijk}]\|\,\|f\|_X$ $\forall f\in X$.

ii) *Toán tử tuyến tính $I-B:X\to X$ là khả đảo và*

$$\|(I-B)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|[b_{ijk}]\|}.$$

Bổ đề 2. *Giả sử (H_1)-(H_4) đúng. Khi đó, ta có*

i) $\|Af\|_X\le\|[a_{ijk}]\|\left[bC_1(M)\|f\|_X+n\sup_{x\in\Omega}|\Phi(x,0)|\right]$, $\forall f\in K_M$.

ii) $\|Af-A\tilde f\|_X\le bC_1(M)\,\|[a_{ijk}]\|\,\|f-\tilde f\|_X$ $\forall f,\tilde f\in K_M$.

Chứng minh bổ đề nầy không phức tạp và chúng ta bỏ qua chi tiết. ■

Do bổ đề 1, ta viết lại hệ (2.3) như sau:

(2.6) $$f=(I-B)^{-1}(\varepsilon Af+g)\equiv Tf.$$

Khi đó, ta có định lý sau đây.

Định lý 1. *Giả sử (H_1)-(H_5) đúng. Khi đó, với mỗi ε, với $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$, hệ (2.6) có một nghiệm duy nhất $f\in K_M$. Hơn nữa nghiệm của hệ (2.6) cũng ổn định đối với g trong K_M.*

Chứng minh. Do giả thiết (H_5) và từ các bổ đề 1 và 2, ta dễ dàng nghiệm lại rằng $Tf\in K_M$ với mọi $f\in K_M$ và $\|Tf-T\tilde f\|_X\le\sigma\|f-\tilde f\|_X$ với mọi $f,\tilde f\in K_M$, trong đó $\dfrac{\varepsilon_0 bC_1(M)\|[a_{ijk}]\|}{1-\|[b_{ijk}]\|}<1$. Khi đó, sử dụng định lý điểm bất động Banach, ta có duy nhất một hàm $f\in K_M$ sao cho $f=Tf$. Gọi $f,\tilde f\in K_M$ là hai nghiệm của (2.6) tương ứng với g và

$\widetilde{g} \in K_M$, lần lượt. Từ đánh giá $\left\|f-\widetilde{f}\right\|_X \leq \frac{1}{1-\sigma}\left\|g-\widetilde{g}\right\|_X$ ta suy ra f ổn định đối với g trong K_M. ■

Chú thích 1. Nhờ định lý điểm bất động Banach, nghiệm f của hệ (2.6) được xấp xỉ bởi thuật giải sau:

(2.7) $$f^{(\nu)} = Tf^{(\nu-1)} \equiv (I-B)^{-1}(\varepsilon Af^{(\nu-1)} + g), \quad \text{với } f^{(0)} \in K_M \text{ cho trước.}$$

Khi đó $f^{(\nu)} \to f$ trong X khi $\nu \to +\infty$, và

(2.8) $$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \leq \left\|f^{(0)} - Tf^{(0)}\right\|_X \frac{\sigma^\nu}{1-\sigma}, \quad \forall \nu = 1,2,\ldots,$$

với $\dfrac{\varepsilon_0 bC_1(M)\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|} < 1.$

Chú thích 2. Trường hợp $\Phi(x,z) = z$, và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất

(2.9) $$S_{ijk}(x) = \alpha_{ijk}x + \delta_{ijk}, \quad X_{ijk}(x) = \beta_{ijk}x + \gamma_{ijk}$$

và $\Omega = [-b,b]$. Giả sử rằng các số thực $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ thỏa các điều kiện sau

$$(H_1^{/}) \qquad \begin{aligned} &\left|\alpha_{ijk}\right| < 1, \ \left|\beta_{ijk}\right| < 1, \ i,j = 1,2,\ldots,n, k = 1,2,\ldots,m, \\ &\max_{1\leq i,j\leq n, 1\leq k\leq m} \frac{\left|\delta_{ijk}\right|}{1-\left|\alpha_{ijk}\right|} \leq b, \quad \max_{1\leq i,j\leq n, 1\leq k\leq m} \frac{\left|\gamma_{ijk}\right|}{1-\left|\beta_{ijk}\right|} \leq b. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

Định lý 2: *Giả sử rằng $\Omega = [-b,b]$, các số thực $a_{ijk}, b_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ thỏa $(H_1^{/})$, (H_3) và $S_{ijk}(x), X_{ijk}(x)$ có dạng (2.9). Khi đó, với mỗi $g \in X$, tồn tại duy nhất một hàm $f = (f_1,\ldots,f_n) \in X$ là nghiệm của hệ*

(2.10) $$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ikj} \int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}} f_j(t)dt + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(\alpha_{ijk}x + \delta_{ijk}) + g_i(x),$$

$i = 1,2,\ldots,n$, $x \in \Omega = [-b,b]$. Hơn nữa, nghiệm nầy cũng ổn định đối với g trong X.

Chú thích 3.

(i) Kết quả trong [14] là một trường hợp riêng của định lý 2 với $\Omega = [-b,b]$, $m = n = 2$, $a_{ijk} = 0$.

(ii) Định lý 2 vẫn đúng với $\Omega = IR$ và các hằng số $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}, \delta_{ijk}$ trong trường hợp nầy không cần thỏa $(H_1^{/})$.

Liên quan đến hệ (2.10) ta có một số kết quả sau.

Định lý 3: (xem[1]). *Dưới các giả thiết của định lý 2, nếu $a_{ijk} = 0$ và $g_1,\ldots,g_n$ là các đa thức có bậc $\leq r-1$, thì nghiệm f của hệ (2.10) tương ứng với $a_{ijk} = 0$ cũng là đa thức có bậc $\leq r-1$.*

Chú thích 4. Mệnh đề 3 không đúng nếu ít nhất một hệ số $a_{ijk} \neq 0$. Thật vậy, xét hệ

$$f_1(x)=\frac{1}{15}f_2(\frac{x-1}{2})+\frac{1}{4}\int_0^x f_1(t)dt+g_1(x),$$

(2.11)

$$f_2(x)=\frac{1}{10}\int_0^x f_2(t)dt+g_2(x),\quad x\in[-1,1],$$

với $g_1(x)=x,\ g_2(x)=1$. Dễ nghiệm lại rằng nghiệm chính xác của hệ (2.11) không là đa thức là và được cho bởi $f_1(x)=-4+(4+\frac{e^{-1/200}}{12})e^{x/4}-\frac{e^{-1/200}}{60}e^{x/20},\ f_2(x)=e^{x/10}$.

Để xấp xỉ nghiệm của hệ (2.10) bằng một dãy các đa thức, ta giả sử rằng các số thực $a_{ijk},b_{ijk},\alpha_{ijk},\beta_{ijk},\gamma_{ijk},\delta_{ijk}$ thỏa các điều kiện như trong định lý 2. Giả sử $f\in C(\Omega;IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (2.10) tương ứng với $g\in C(\Omega;IR^n)$.

Trước hết, do định lý Weierstrass mỗi hàm liên tục g_i được xấp xỉ bằng một dãy các đa thức hội tụ đều $P_i^{[q]}$ khi bậc $q\to+\infty$. Do đó, $P^{[q]}=(P_1^{[q]},...,P_n^{[q]})$ hội tụ trong $C(\Omega;IR^n)$ về g khi $q\to+\infty$.

Ta đặt

(2.12) $$(Af)_i(x)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ikj}\int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}} f_j(t)dt,\ (Bf)_i(x)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n b_{ijk}f_j(\alpha_{ijk}x+\delta_{ijk}),$$

$i=1,2,...,n,\ x\in\Omega=[-b,b]$.

Ta xét dãy $\{f^{[q]}\}$ được định nghĩa như sau:

(2.13) $$f^{[0]}\equiv 0,$$
$$f^{[q]}=Bf^{[q]}+Af^{[q-1]}+P^{[q]},q=1,2,...$$

Ta chú ý rằng $Af^{[q-1]}+P^{[q]}$ là đa thức có bậc $\le q$, do Định lý 3, nghiệm $f^{[q]}$ cũng là đa thức có bậc $\le q$. Do đó ta có.

Định lý 4: (xem[1]). *Ta có* $\lim\limits_{q\to+\infty}\left\|f^{[q]}-f\right\|_X=0$.

Hơn nữa, nếu chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{-j}\left\|P^{[j]}-g\right\|_X$ *hội tụ, ta có đánh giá sai số*

(2.14) $$\left\|f^{[q]}-f\right\|_X\le\left(\left\|f\right\|_X+\frac{1}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|}\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{-j}\left\|P^{[j]}-g\right\|_X\right)\theta^q,\ \forall q\in IN,$$

trong đó $\theta=\dfrac{b\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|}<1$.

3. Thuật giải lặp cấp hai

Thuật giải xấp xỉ liên tiếp (2.7) được cho bởi cách làm của định lý ánh xạ co, đó cũng là một thuật giải hội tụ cấp 1. Để làm gia tăng tốc độ hội tụ, trong phần này chúng tôi nghiên cứu một thuật giải cấp hai cho hệ phương trình hàm- tích phân (1.1).

Giả sử rằng $\Phi\in C^1(\Omega\times IR;IR)$ và sử dụng xấp xỉ sau

(3.1) $$\Phi(x,z_j^{(\nu)})\cong\Phi(x,z_j^{(\nu-1)})+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,z_j^{(\nu-1)})(z_j^{(\nu)}-z_j^{(\nu-1)}),$$

trong đó $z_j^{(\nu)} = \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu)}(t)dt$. Ta thu được giải thuật sau đây cho hệ (1.1)

i) Cho trước $f^{(0)} = (f_1^{(0)},...,f_n^{(0)}) \in X$.

ii) Giả sử biết $f^{(\nu-1)} = (f_1^{(\nu-1)},...,f_n^{(\nu-1)}) \in X$, ta xác định $f^{(\nu)} = (f_1^{(\nu)},...,f_n^{(\nu)}) \in X$ bởi

$$(3.2) \qquad f_i^{(\nu)}(x) = (Bf^{(\nu)})_i(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu)}(t)dt + g_i^{(\nu)}(x),$$

$$x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,...$$

trong đó $\beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x)$, $g_i^{(\nu)}$ phụ thuộc vào $f^{(\nu-1)}$ như sau:

$$(3.3) \qquad \beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) = \varepsilon a_{ijk} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(W_{ijk}^{(\nu)}(x)),$$

$$(3.4) \qquad g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk} \Phi(W_{ijk}^{(\nu)}((x)) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x) \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu-1)}(t)dt,$$

với $W_{ijk}^{(\nu)}(x) = (x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j^{(\nu-1)}(t)dt)$, $x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,...$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 5. *Giả sử $(H_1)-(H_3)$ là đúng. Nếu $f^{(\nu-1)} \in X$ thỏa*

$$(3.5) \qquad b \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\beta_{ijk}^{(\nu)}(\varepsilon, x)\right| + \left\|[b_{ijk}]\right\| < 1.$$

Khi đó tồn tại duy nhất $f^{(\nu)} \in X$ là nghiệm của (3.2)–(3.4).

Chứng minh. Sử dụng định lý điểm bất động Banach, định lý 4.1 được chứng minh. ■

Định lý sau đây cho một điều kiện đủ để thuật giải (3.2)–(3.4) hội tụ cấp 2. Chứng minh định lý nầy khá dài mà chi tiết của nó sẽ công bố đầy đủ ở nơi khác.

Định lý 6. *Giả sử $\Phi \in C^2(\Omega \times IR; IR)$ và $(H_1)-(H_3)$ đúng. Cho $a_{ijk} \in IR$. Khi đó, tồn tại hai hằng số $M > 0$ và ε, sao cho:*

(i) Với $f^{(0)} \in K_M$ cho trước, hệ (3.2)–(3.4) tồn tại duy nhất nghiệm $f^{(\nu)}$ sao cho

$$(3.6) \qquad f^{(\nu)} \in K_M, \ \forall \nu = 0,1,2,...$$

(ii) Với $f^{(0)} \in K_M$ cho trước, dãy $\{f^{(\nu)}\}$ xác định bởi hệ (3.2)–(3.4) là dãy lặp cấp hai. Chính xác hơn, ta có

$$(3.7) \qquad \left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \le \beta_M \left\|f^{(\nu-1)} - f\right\|_X^2, \ \forall \nu = 1,2,...$$

trong đó $\beta_M = \dfrac{\frac{|\varepsilon|}{2} b^2 M_2 \left\|[a_{ijk}]\right\|^2}{1 - \left\|[b_{ijk}]\right\| - |\varepsilon| b M_1 \left\|[a_{ijk}]\right\|} > 0$ *và f là nghiệm của hệ (1.1).*

(iii) *Nếu* $f^{(0)}$ *được chọn đủ gần* f *sao cho* $\beta_M \left\| f^{(0)} - f \right\|_X < 1$, *thì dãy* $\{f^{(\nu)}\}$ *hội tụ về* f *đến cấp 2 và thỏa một đánh giá sai số*

(3.8) $$\left\| f^{(\nu)} - f \right\|_X \leq \frac{1}{\beta_M} \left(\beta_M \left\| f^{(0)} - f \right\|_X \right)^{2^\nu}, \forall \nu = 1,2,...$$

Chú thích 5: Trong định lý 6 chúng ta chọn ε, M thỏa

(3.9) $$\|g\|_X + |\varepsilon| \, \|[a_{ijk}]\| \left[n \sup_{x\in\Omega} |\Phi(x,0)| + \frac{M_2}{2} b^2 M^2 \right] \leq M\left(1 - \|[b_{ijk}]\| - |\varepsilon| \, bM_1 \|[a_{ijk}]\| \right),$$

trong đó

$$M_1 = \sup\{ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,z) \right| : x \in \Omega, |z| \leq bM\},\ M_2 = \sup\{ \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(x,z) \right| : x \in \Omega, |z| \leq bM\}.$$

Chú thích 6: Về việc chọn bước lặp ban đầu $f^{(0)} \in K_M$ thỏa $\beta_M \left\| f^{(0)} - f \right\|_X < 1$, ta tiến hành như sau: Trước hết ta lấy $Z^{(0)} \in X$, ta xây dựng dãy lặp đơn $\{Z^{(\eta)}\}$ liên kết với ánh xạ co $T : K_M \to K_M$ (định lý 1)

(3.10) $$Z^{(\eta)} = TZ^{(\eta-1)} \equiv (I - B)^{-1}(\varepsilon AZ^{(\eta-1)} + g),\ \eta = 1,2,....$$

Khi đó dãy $\{Z^{(\eta)}\}$ hội tụ trong X về nghiệm f của (1.1) và ta có một đánh giá sai số

$$\left\| f - Z^{(\eta)} \right\|_X \leq \left\| Z^{(0)} - TZ^{(0)} \right\|_X \times \frac{\sigma^\eta}{1-\sigma}, \forall \eta = 1,2,...,\ \text{với}\ \sigma = \frac{\varepsilon_0 C_1(M) \|[a_{ijk}]\|}{1 - \|[b_{ijk}]\| - b\|[c_{ijk}]\|} < 1.$$ Từ đây, ta chọn $\eta_0 \in IN$ đủ lớn sao cho $\beta_M \left\| f - Z^{(\eta_0)} \right\|_X \leq \beta_M \left\| Z^{(0)} - TZ^{(0)} \right\|_X \times \frac{\sigma^{\eta_0}}{1-\sigma} < 1.$

Vậy ta chọn $f^{(0)} = Z^{(\eta_0)}$. ∎

4. Tính khả vi của nghiệm

Trong phần nầy, dựa vào định lý điểm bất động Banach và kết quả của phần trên, chúng tôi chứng minh tính khả vi của nghiệm hệ (1.1) tùy thuộc vào tính khả vi của $g, \Phi, S_{ijk}, X_{ijk}$. Trước hết, ta bổ sung thêm giả thiết sau:

Giả thiết $(H^{(1)})$: $g \in C^1(\Omega; IR^n)$, $S_{ijk}, X_{ijk} \in C^1(\Omega : \Omega)$, và $\Phi \in C^1(\Omega \times IR; IR)$.

Giả sử $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1.1). Đạo hàm hai vế của hệ (1.1), ta thu được:

(4.1) $$f_i'(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} S_{ijk}'(x) f_j'(S_{ijk}(x)) + G_i^{[1]}(x),$$

trong đó

(4.2) $$G_i^{[1]}(x) = g_i'(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \left[\Phi_x'\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) + \Phi_z'\left(x, \int_0^{X_{ijk}(x)} f_j(t)dt\right) X_{ijk}'(x) f_j(X_{ijk}(x)) \right].$$

Vậy nếu $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm của hệ (1.1) thì $F = (F_1, ..., F_n) = (f_1^{\prime}, ..., f_n^{\prime})$ là nghiệm của hệ:

(4.3) $$F_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} S_{ijk}^{\prime}(x) F_j(S_{ijk}(x)) + G_i^{[1]}(x),$$

$\forall x \in [-b, b]$; $i = 1, ..., n$, trong đó $G_i^{[1]}(x)$ cho bởi (4.2).

Với $A_{ijk} \in C(\Omega; IR)$, đặt $\left\|[A_{ijk}]\right\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega} \left| A_{ijk}(x) \right|$.

Giả sử rằng:

(4.4) $$\left\|[b_{ijk} S_{ijk}^{\prime}]\right\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega} \left| b_{ijk} S_{ijk}^{\prime}(x) \right| < 1.$$

Khi đó, ta có.

***Bổ đề 3**. Giả sử $(H^{(1)})$ đúng. Cho $f \in X = C(\Omega; IR^n)$ và $G_i^{[1]}(x)$ cho bởi (4.2) thoả (4.4). Khi đó, có hệ (4.3) có duy nhất một nghiệm $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X$.*

Chứng minh bổ đề 3. Ta viết hệ (4.4) theo dạng của một phương trình toán tử

(4.5) $$F = V^{[1]} F \text{ trong } X \equiv C(\Omega; IR^n)$$

trong đó $V^{[1]}F$ có các thành phần $(V^{[1]}F)_i(x)$ xác định bởi vế phải của (4.3).

Dễ nghiệm lại rằng $V^{[1]} : X \to X$ thỏa

(4.6) $$\left\| V^{[1]}F - V^{[1]}\widetilde{F} \right\|_X \le \left\|[b_{ijk} S_{ijk}^{\prime}]\right\| \left\| F - \widetilde{F} \right\|_X, \text{ với mọi } F, \widetilde{F} \in X.$$

Khi đó, sử dụng định lý điểm bất động Banach, ta có duy nhất một hàm $F^{[1]} \in X$ là nghiệm của hệ (4.3).■

Vậy với giả thiết $(H^{(1)})$ và (4.4), nếu $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ là nghiệm của hệ (1.1), thì $F = (f_1^{\prime}, ..., f_n^{\prime})$ là nghiệm của hệ (4.3). Theo bổ đề 3, hệ (4.3) có một nghiệm duy nhất $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X$. Vậy $F^{[1]} = f^{\prime} = (f_1^{\prime}, ..., f_n^{\prime})$.

Đảo lại, với giả thiết $(H^{(1)})$ và (4.4). Gọi $f \in X = C(\Omega; IR^n)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1.1). Khi đó $G_i^{[1]}(x)$ cho bởi (4.2) hoàn toàn xác định. Ta cũng chú ý rằng hệ (4.3) có một nghiệm duy nhất $F^{[1]} = (F_1^{[1]}, ..., F_n^{[1]}) \in X$. Ta sẽ chứng minh rằng $f \in C^1(\Omega; IR^n)$ và $F^{[1]} = f^{\prime} = (f_1^{\prime}, ..., f_n^{\prime})$.

Ta viết hệ (1.1) theo dạng của một phương trình toán tử

(4.7) $$f = Vf \text{ trong } X_1 \equiv C^1(\Omega; IR^n)$$

trong đó $Vf = \varepsilon Af + Bf + g$. Dễ thấy rằng $V : X_1 \to X_1$.

Giả sử $\Phi \in C^2(\Omega \times IR; IR)$, và với mỗi $M > 0$, ta đặt

$$C_0(M) = \sup\{|\Phi(x,z)| : x \in \Omega, |z| \le bM\},$$

$$C_1(M) = \sup\{|\Phi_x^{\prime}(x,z)| + |\Phi_y^{\prime}(x,z)| : x \in \Omega, |z| \le bM\},$$

$$C_2(M) = \sup\{|\Phi_{xz}^{\prime\prime}(x,y)| + |\Phi_{zz}^{\prime\prime}(x,y)| : x \in \Omega, |z| \le bM\},$$

$$K_M^1 = \{f \in C^1(\Omega; IR) : \|f\|_1 \le M\}, \text{ với } \|f\|_1 = \|f\|_X + \|f^{\prime}\|_X.$$

Giả sử rằng:

$$|\varepsilon|\left[\frac{1}{M}(C_0(M)+C_1(M))\|[a_{ijk}]\|+C_1(M)\|[a_{ijk}X'_{ijk}]\|\right] \tag{4.8}$$
$$+\left(\|[b_{ijk}]\|+\|[b_{ijk}S'_{ijk}]\|\right)\leq 1-\frac{\|g\|_1}{M}$$

và

$$\rho=|\varepsilon|\left[b(C_1(M)+C_2(M))\|[a_{ijk}]\|+\|[b_{ijk}]\|\right] \tag{4.9}$$
$$+|\varepsilon|\left[(bMC_2(M)+C_1(M))\|[a_{ijk}X'_{ijk}]\|\right]+\|[b_{ijk}S'_{ijk}]\|<1$$

với việc chọn $M>0, \varepsilon>0$ thích hợp. Khi đó, ta có.

Định lý 7. *Giả sử $(H^{(1)})$ và (4.8), (4.9) đúng. Khi đó, $V: K_M^1 \to K_M^1$ thoả*

$$\|Vf-V\tilde{f}\|_1 \leq \rho\|f-\tilde{f}\|_1 \quad \forall f,\tilde{f}\in K_M^1,$$

trong đó $0\leq\rho<1$ như (4.9). Từ đó, hệ (4.7) có duy nhất một nghiệm $f\in K_M^1$.

Lời cảm ơn. Các tác giả chân thành cảm ơn người phản biện đã cho nhận xét tốt về bài báo đồng thời đóng góp cho chúng tôi một số ý kiến bổ ích.

LINEAR APPROXIMATION ASSOCIATED WITH THE SYSTEM OF NONLINEAR FUNCTIONAL- INTEGRAL

Pham Hong Danh, Huynh Thi Hoang Dung

ABSTRACT: We consider the following system of nonlinear functional- integral equations

$$(*) \qquad f_i(x)=\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}\Phi\left(x,\int_0^{X_{ijk}(x)}f_j(t)dt\right)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ijk}f_j(S_{ijk}(x))+g_i(x),$$

$\forall x\in\Omega$; $i=1,\ldots,n$, where ε is a small parameter, $\Omega=[a,b]$ or Ω is a non-compact interval of IR, a_{ijk}, b_{ijk} are the given real constants; $g_i:\Omega\to IR$, $X_{ijk}, S_{ijk}:\Omega\to\Omega$, và $\Phi:\Omega\times IR\to IR$ are the given continuous functions and $f_i:\Omega\to IR$ are unknown functions. By using the Banach fixed point theorem, we prove the system (*) has a unique solution. If $\Phi\in C^2(\Omega\times IR;IR)$ and $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\leq j\leq n}|b_{ijk}|<1$ we obtain the quadratic convergence of the system (*). Moreover, we also obtain some results concerning the existence of C^1-solutions of a system(*).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Hồng Danh, Huỳnh Thị Hoàng Dung, Nguyễn Thành Long, *Xấp xỉ đa thức của nghiệm một hệ tuyến tính các phương trình tích phân-hàm*, Kỷ yếu Hội Nghị Khoa học, Khoa Toán-Tin học, Đại học Sư Phạm Tp. HCM, 21/12/2002, (sắp ra).

[2] Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Hội Nghĩa, *Giải số của hệ phương trình hàm*, Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, **3** (2000), No. 7&8, 25-31.
[3] T. Kostrzewski, *Existence and uniqueness of BC[a,b] solutions of nonlinear functional equation*, Demonstratio Math. **26** (1993), 61-74.
[4] T. Kostrzewski, *BC-solutions of nonlinear functional equation. A nonuniqueness case*, Demonstratio Math. **26** (1993), 275-285.
[5] M. Lupa, On solutions of a functional equation in a special class of functions, Demonstratio Math. **26** (1993), 137-147.
[6] Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Đinh Văn Ruy, *On a system of functional equations*, Demonstratio Math. **31** (1998), 313-324.
[7] Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, *On a system of functional equations in a multi-dimensional domain*, Z. Anal . Anw. **19** (2000), No.4, 1017- 1034.
[8] Nguyễn Thành Long, Phạm Hồng Danh, Nguyễn Kim Khôi, *Xấp xỉ nghiệm của một hệ phương trình tích phân bởi một dãy các đa thức hội tụ đều*, Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, tập **30** (2002), No.2, 36-43.
[9] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, *Khai triển tiệm cận nghiệm của hệ phương trình hàm*, Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, tập **26** (2001), No.2, 39-46.
[10] Nguyễn Thành Long, *Solution approximation of a system of integral equations by a uniformly convergent polynomials sequence*, Demonstratio Math. **37**, (2004) (to appear).
[11] Nguyễn Thành Long, *Linear approximation and asymptotic expansion associated with the system of functional equations*, Demonstratio Math. **37**, (2004) (to appear).
[12] Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, *Về một hệ phương trình hàm tuyến tính*, Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Vol. **3** (2000), No. 7&8, 18-24.
[13] Nguyễn Hội Nghĩa, *Xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình hàm trong miền hai chiều*, Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Vol. **5** (2002), No. 1&2, 56-65.
[14] C.Q. Wu, Q.W. Xuan, D.Y. Zhu, *The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system*, SEA. Bull. Math. **15** (1991), 109 -115.