MÔ HÌNH DAO ĐỘNG DÂY MỀM ỨNG XỬ PHI TUYẾN HÌNH HỌC TRÊN PHƯƠNG DIỆN ĐỘNG LỰC HỌC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Nguyễn Văn Hiển[1], **Lê Văn Nam**[2]
[1] Chương trình Cao học Châu Âu về Cơ học Xây dựng-EMMC
[2] Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 18 tháng 8 năm 2003)

TÓM TẮT: *Bài báo sẽ trình bày phương pháp xây dựng mô hình dao động phần tử dây ứng xử phi tuyến hình học bậc bốn có xét đến đặc tính không nén được theo phương pháp phần tử hữu hạn. Việc xây dựng mô hình đặt trên nền tảng các nguyên lý biến phân trong đó biến dạng được tính thông qua phương pháp Green.*

Tại từng thời điểm dao động, các chuyển vị, biến dạng và nội lực tại cơ cấu cân bằng sẽ được tính toán theo phương pháp lặp Newton- Raphson thông qua các ma trận cứng tiếp tuyến. Thêm vào đó do đặc tính mất độ cứng khi chùng của phần tử dây cùng các ảnh hưởng của nó lên sự thay đổi mô hình và phân bố lại độ cứng trong toàn bộ kết cấu nên quá trình lặp sẽ khá phức tạp và được thực hiện qua nhiều giai đoạn.

GIỚI THIỆU

Kết cấu dây do có các đặc tính nổi bật về tỷ số khả năng chịu lực trên trọng lượng đơn vị nên đạt hiệu quả rất cao về mặt mỹ thuật cũng như về mặt chịu lực, đặc biệt khi sử dụng cho các kết cấu có yêu cầu cao về mặt mỹ thuật và khả năng vượt khẩu độ lớn như cầu dây văng, mái vòm treo, cầu treo dây võng, cầu Extrados và các hệ thống tải điện.

Hiện nay các phần mềm thương mại tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn thường không xây dựng phần tử dây mềm và do vậy khi tính toán, các dây sẽ được thay thế bằng phần tử thanh có môđun đàn hồi tương đương hoặc bằng các phần tử dầm, dầm dự ứng lực bỏ qua moment kháng uốn. Tuy nhiên do dây là kết cấu rất mềm và có ứng xử khác biệt các phần tử trên do vậy kết quả phân tích bài toán dây dựa trên các mô hình thay thế chỉ có thể được chấp nhận trong những điều kiện áp dụng nhất định về tải trọng áp dụng, mô hình kết cấu và trong trường hợp tính toán tổng quát dây mềm đã xuất hiện sai số khá lớn do các ảnh hưởng:

- Ứng xử phi tuyến hình học khi xuất hiện chuyển vị và biến dạng lớn.
- Mất độ cứng khi bị chùng của dây và các ảnh hưởng của nó lên sự thay đổi mô hình và phân bố lại độ cứng trong toàn bộ kết cấu trong quá trình làm việc.
- Rất nhạy cảm với các yếu tố gây dao động.

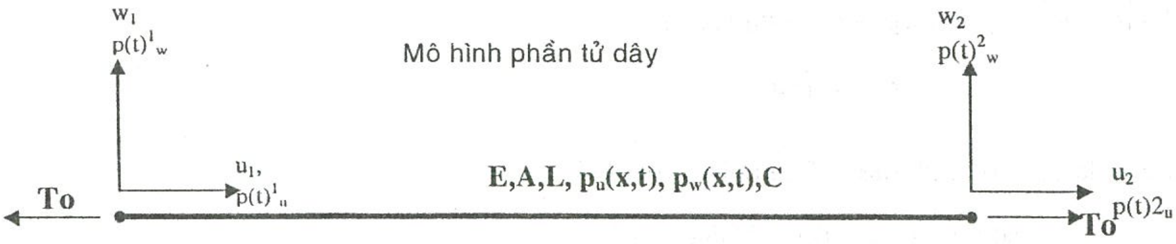
Vì những lý do như vậy, khi phân tích, tính toán kết cấu sử dụng dây mềm theo phương pháp phần tử hữu hạn cần phải xây dựng mô hình riêng biệt với các tính chất đặc thù nhằm thể hiện một cách đúng đắn ứng xử của nó khi làm việc.

XÂY DỰNG MÔ HÌNH

Việc xây dựng mô hình sẽ đặt trên trên nền tảng các nguyên lý biến phân trong đó sử dụng phương pháp Green để tính biến dạng. Dây sẽ được chia thành n phần tư, mỗi phần tử sẽ được xem xét với các thông số:

- Gồm bốn bậc tự do u1, w1, u2, w2 (Xem hình vẽ).

- Modun đàn hồi vật liệu làm dây E, diện tích mặt cắt ngang A, chiều dài L, hệ số nhớt C.
- Lực căng dây ban đầu To.
- Tải trọng phân bố theo tọa độ và thời gian theo phương dọc trục và vuông góc lần lượt $p_u(x,t)$, $p_w(x,t)$.



Trường chuyển vị trong các phần tử sẽ được nội suy theo công thức.

$$u(x,t) = u_1(t)\phi_1^u(x) + u_2(t)\phi_2^u(x) \tag{1}$$

$$w(x,t) = w_1(t)\phi_1^w(x) + w_2(t)\phi_2^w(x) \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_1(t) \qquad w(0,t) = w_1(t)$$

$$u(l,t) = u_2(t) \qquad w(l,t) = w_2(t)$$

$$\phi_1^u(x) = \phi_1^w(x) = 1 - \frac{x}{l} \qquad \phi_2^u(x) = \phi_2^w(x) = \frac{x}{l}$$

Hệ gồm hai phương trình chuyển vị có thể được viết dưới dạng ma trận

$$\{q(x,t)\} = [N(x)]\{q_n(t)\} \tag{3}$$

Trong đó $\{q(x,t)\} = \begin{Bmatrix} u(x,t) \\ w(x,t) \end{Bmatrix}$ $\qquad [N(x)] = \begin{bmatrix} \phi_1^u(x) & 0 & \phi_2^u(x) & 0 \\ 0 & \phi_1^w(x) & 0 & \phi_2^w(x) \end{bmatrix}$ (4)

$$\{q_n(t)\}^T = [u_1(t) \quad w_1(t) \quad u_2(t) \quad w_2(t)] \tag{5}$$

$$[N_u(x)] = [\phi_1^u(x) \quad 0 \quad \phi_2^u(x) \quad 0] \tag{6}$$

$$[N_w(x)] = [0 \quad \phi_1^w(x) \quad 0 \quad \phi_2^w(x)] \tag{7}$$

Biểu thức động năng[2]

$$\tau = \frac{1}{2}\int_V \rho_0 \{\dot{q}_n(t)\}^T \{\dot{q}_n(t)\} dV = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_0 A \{\dot{q}_n(t)\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}_n(t)\} dx = \frac{1}{2}\{\dot{q}_n(t)\}^T \left[\int_0^L \rho_0 A [N]^T [N] dx\right] \{\dot{q}_n(t)\}$$

Đặt $M = \left[\int_0^L \rho_0 A [N]^T [N] dx\right]$ (8)

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2}\{\dot{q}_n(t)\}^T [M] \{\dot{q}_n(t)\}} \tag{9}$$

Biểu thức năng lượng tiêu tán do nhớt[2]

$$V_{damp} = \frac{1}{2}\int_0^L c \{\dot{q}_n(t)\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}_n(t)\} dx = \frac{1}{2}\dot{q}_n(t)^T \left[\int_0^L c [N]^T [N] dx\right] \{\dot{q}_n(t)\} \tag{10}$$

Đặt $C = \left[\int_0^L c[N]^T[N]dx\right]$

$$\boxed{V_{damp} = \frac{1}{2}\{\dot{q}_n(t)\}^T [C]\{\dot{q}_n(t)\}} \quad (11)$$

Biểu thức năng lượng biến dạng [1][3]

$$V'_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon_x\varepsilon_x dV = \frac{1}{2}\int_0^L EA\varepsilon_x^2 dx$$

Biến dạng được tính theo công thức Green[2]

$$\varepsilon_x = \left[\frac{du(x,t)}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du(x,t)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw(x,t)}{dx}\right)^2\right] \quad (12)$$

$$\frac{du(x,t)}{dx} = \frac{d}{dx}\left([N_u(x)]\{q_n(t)\}\right) = \frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\} \quad (13)$$

$$\frac{dw(x,t)}{dx} = \frac{d}{dx}\left([N_w(x)]\{q_n(t)\}\right) = \frac{d[N_w(x)]}{dx}\{q_n(t)\} \quad (14)$$

$$\varepsilon_x = \frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\} + \frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d[N_w(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2 \quad (15)$$

$$\boxed{V'_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_0^L EA\varepsilon_x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left[\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\} + \frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d[N_w(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2\right]^2 dx} \quad (16)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi xét trên kết cấu hình học ban đầu do ảnh hưởng của dự ứng lực[2]

$$V_{prestress} = \frac{1}{2}\int_0^l T_0\varepsilon_x dx \quad (17)$$

Do điều kiện cân bằng tĩnh trên cơ cấu ban đầu[2]

$$\int_V \sigma_0\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dV + \delta v_{ext}^0 = 0 \quad (18)$$

$$\boxed{V_{prestress} = \frac{1}{2}T_0\int_0^l\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d[N_w(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2\right]dx} \quad (19)$$

Biểu thức công của ngoại lực[1][2]

$$V_{ext,n} = -\{g_n(t)\}q_n(t)^T \quad (20)$$

$$\boxed{\{g_n(t)\} = \int_0^L [N(x)]^T p(x,t)dx} \quad (21)$$

Áp dụng nguyên lý Hamilton $\delta\int_{t_1}^{t_2}(\tau - \nu)dt = 0$ (22)

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}\{\dot{q}_n(t)\}^T[M]\{\dot{q}_n(t)\}-\left[\begin{array}{l}\int_0^L EA\left[\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}+\frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2\right]^2 dx+\\ +\frac{1}{2}T_0\left[\int_0^l\frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n(t)\}\right)^2\right]-\left[\int_0^L[N(x)]^T p(t)dx\right]\\ -\frac{1}{2}\{\dot{q}_n(t)\}^T[C]\{\dot{q}_n(t)\}\end{array}\right]\right\}=0 \tag{23}$$

Để thuận lợi, các chuyển vị sẽ được viết dưới các dạng sau

$u_1(t), u_2(t)$ .... Q_1, Q_3

$w_1(t), w_2(t)$ .... Q_2, Q_4

q_n .... Q

Đặt $Q=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\ w_1(t)\\ u_2(t)\\ w_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\end{Bmatrix}$

$$\frac{d[N_u(x)]}{dx}\{q_n^u(t)\}=\frac{-Q_1+Q_3}{L} \tag{24}$$

$$\frac{d[N_w(x)]}{dx}\{q_n^w(t)\}=\frac{-Q_2+Q}{L} \tag{25}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}\dot{Q}^T[M]\dot{Q}-\left[\int_0^L EA\left[\frac{-Q_1+Q_3}{L}+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_1+Q_3}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_2+Q_4}{L}\right)^2\right]^2 dx+\frac{1}{2}T_0\left[\int_0^l\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_1+Q_3}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_2+Q_4}{L}\right)^2\right)\right]dx-\left[\int_0^L[N(x)]p(t)dx\right]\right]\right\}=0 \tag{26}$$

Triển khai biểu thức (26) sẽ dẫn đến hệ bốn phương trình bậc ba. Ma trận độ cứng không thể có được ngay như trong trường hợp tuyến tính. Vì vậy, để có thể sử dụng các thuận lợi của các phương pháp tính toán như trong bài toán ứng xử tuyến tính, các hệ phương trình trên phải được viết dưới dạng ma trận.

Thiết lập ma trận cứng phần tử dây trong trường hợp ứng xử phi tuyến[3]

Đặt (27)

$$\Pi=\left[\frac{1}{2}EA\int_0^L\left[\frac{-Q_1+Q_3}{L}+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_1+Q_3}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_2+Q_4}{L}\right)^2\right]^2 dx+\left[\frac{1}{2}T_0\int_0^l\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_1+Q_3}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{-Q_2+Q_4}{L}\right)^2\right)\right]dx\right]$$

$$\delta\Pi=0\Leftrightarrow\frac{\partial\Pi}{\partial Q_i}=f_i(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)=0 \quad i\subset[1,4] \tag{28}$$

Các quá trình biến đổi để thiết lập ma trận độ cứng sẽ được thực hiện bằng phần mềm Mathcad và các biểu thức (28) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$[K(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)]\{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4\}^T$

$[K(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)]$Ma trận các biểu thức bậc hai của chuyển vị có thể được viết dưới dạng

$$K=(K_0+K_1+K_2)$$

Trong đó

K: Ma trận độ cứng khi xét đến ứng xử phi tuyến hình học.

K_0: Ma trận độ cứng gồm các hằng số như lực căng ban đầu, modun đàn hồi vật liệu, diện tích tiết diện, chiều dài phần tử.

K_1: Ma trận độ cứng gồm các các biểu thức bậc 1 của chuyển vị.

K_2: Ma trận độ cứng gồm các các biểu thức bậc 2 của chuyển vị.

$$K_0 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1+\frac{T_0}{2EA} & 0 & -1-\frac{T_0}{2EA} & 0 \\ & \frac{T_0}{2EA} & 0 & -\frac{T_0}{2EA} \\ & & 1+\frac{T_0}{2EA} & 0 \\ SYM. & & & \frac{T_0}{2EA} \end{bmatrix} \qquad K_1 = \frac{EA}{2L^2}\begin{bmatrix} 3(-Q_1+Q_3) & (-Q_2+Q_4) & -3(-Q_1+Q_3) & (Q_2-Q_4) \\ & (-Q_1+Q_3) & (Q_2-Q_4) & (Q_1-Q_3) \\ & & 3(-Q_1+Q_3) & (-Q_2+Q_4) \\ SYM & & & (-Q_1+Q_3) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EA}{2L^3}\begin{bmatrix} (Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2 & 0 & -[(Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2] & 0 \\ & (Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2 & 0 & -[(Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2 \\ & & (Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2 & 0 \\ SYM. & & & (Q_1-Q_3)^2+(Q_2-Q_4)^2 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

Trong trường hợp

$$\left(\frac{du(x,t)}{dx}\right)^2 << 1$$

Các ma trận độ cứng sẽ được rút gọn như sau

$$K_0 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \frac{T_0}{2EA} & 0 & -\frac{T_0}{2EA} \\ & & 1 & 0 \\ SYM. & & & \frac{T_0}{2EA} \end{bmatrix} \qquad K_1 = \frac{EA}{2L^2}\begin{bmatrix} 0 & (-Q_2+Q_4) & 0 & (Q_2-Q_4) \\ & 0 & (Q_2-Q_4) & 0 \\ & & 0 & (-Q_2+Q_4) \\ SYM. & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EA}{2L^3}\begin{bmatrix} (Q_2-Q_4)^2 & 0 & -(Q_2-Q_4)^2 & 0 \\ & (Q_2-Q_4)^2 & 0 & -(Q_2-Q_4)^2 \\ & & (Q_2-Q_4)^2 & 0 \\ SYM. & & & (Q_2-Q_4)^2 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Các phép biến đổi sẽ dẫn đến phương trình dao động quen thuộc được viết dưới dạng ma trận.

$$M\ddot{Q} + C\dot{Q} + KQ = P(x,t) \qquad (31)$$

Kể từ đây, các bước tính toán của phương pháp PTHH như lắp ráp và ghép nối các ma trận, ma trận chuyển trục Jacobi... có thể được sử dụng. Tuy nhiên cần lưu ý rằng ma trận cứng lại là hàm của các biến nên không thể giải bằng các phương pháp quen thuộc như trong bài toán tuyến tính mà phải sử dụng phương pháp giải lặp Newton- Raphson.

Tại một thời điểm dao động nào đó, biến dạng của từng phần tử dây sẽ được xác định thông qua các chuyển vị của nó và khi các giá trị biến dạng nhỏ hơn hay bằng không dây sẽ ở trạng thái bị chùng, độ cứng bị triệt tiêu và do đó các phần tử này sẽ không tham gia vào quá trình chịu lực và dẫn đến việc phải tính toán lại kết cấu với sơ đồ mới do sự biến đổi mô hình và phân bố lại độ cứng toàn bộ kết cấu trong quá trình dao động.

Do vậy, để giải bài toán dao động dây phi tuyến, tại từng bước thời gian việc tính toán phải được thực hiện qua các bước lặp:

Bước 1:Gán các giá trị tải trọng, chuyển vị ban đầu, vận tốc ban đầu, gia tốc ban đầu tại thời điểm t=0 .Việc tính toán lặp theo phương pháp Newton Raphson sẽ được thực hiện thông qua việc tính toán ma trận cứng tiếp tuyến nhằm xác định giá trị chuyển vị các phần tử dây ứng xử phi tuyến.

Bước 2: Từ các chuyển vị có ở bước lặp thứ hai. Tất cả các phần tử dây mềm trong kết cấu sẽ được tính toán biến dạng nhằm đánh giá lại trạng thái làm việc với mục đích loại bỏ tất cả các dây bị chùng. Tính lại kết cấu với sơ đồ mới không có sự tham gia của các phần tử này. Thực hiện phép giải lặp theo phương pháp Newton-Raphson cho đến khi kết quả hội tụ về trạng thái cân bằng và tất cả các dây có biến dạng dương.

Bước 3: Kết quả tại bước thứ ba sẽ được dùng như thông số đầu vào để tính toán cho bước thời gian kế tiếp.

KẾT LUẬN

- Độ cứng của phần tử dây không chỉ hình thành do các đặc trưng hình học, vật liệu, lực căng ban đầu của phần tử dây mà còn phụ thuộc vào chính chuyển vị và biến dạng của nó. Sự gia tăng của chuyển vị sẽ làm gia tăng độ cứng của phần tử dây và do đó chuyển vị của dây sẽ có khuynh hướng bị giảm so với trường hợp ứng xử tuyến tính.
- Với cùng các đặc trưng hình học, vật liệu và chịu cùng tải trọng. Khi xét bài toán ứng xử phi tuyến, dây có thể chịu được tải trọng lớn hơn và do vậy có thể sẽ tiết kiệm vật liệu hơn.
- Tần số dao động riêng của dây khi xét đến các ứng xử phi tuyến sẽ lớn hơn do có sự gia tăng giá trị định thức ma trận độ cứng phần tử.
- Do xét đến ứng xử phi tuyến hình học nên ngay cả khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không tuyến tính. Dường như đã xuất hiện sự mất mát năng lượng do biến dạng hình học phi tuyến tương tự như sự tiêu tán năng lượng do biến dạng dẻo khi vật liệu làm việc trong giai đoạn dẻo.
- Phương pháp lặp có thể dẫn đến các trường hợp bài toán không hội tụ do kết cấu suy biến, do đó ngay trong giai đoạn chọn mô hình, kết cấu phải đảm bảo kết cấu luôn ổn định ngay cả trong trường hợp bất lợi nhất do độ cứng triệt tiêu.

THE FEM MODEL OF GEOMETRIC NONLINEAR BEHAVIOR CABLE IN THE ASPECT OF DYNAMICS

Le Van Nam, Nguyen Van Hien

ABSTRACT: The paper concerns to the modeling of dynamic of cable element which exhibits nonlinear geometric nonlinear behavior in terms of fourth order effect and in aspect of non-compressible characteristic utilizes Finite Element Method. The derivation bases on variational principles in which strain be evaluated by Green's tensor.

At point of time, displacement, deformation, stress at equilibrium configuration have been obtained by iteration method's Newton- Raphson via tangent stiffness matrices. Moreover, a vanishing of stiffness of slack cable and their effectiveness on distribution of structure stiffness, so lead to iterations be more complex and procedure.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lectures notes on Finite Element Methods (Dépôt legal D/1998/0480/47)- J.F Debongie, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Institue de Mécanique.

[2] Mechanical vibrations, Theory and Application to structural dynamics, Second Edition M. Géradin- D. Rixen- John Willey & Sons Ltd. Chichester (1997). ISBN 0-471-97524-9.

[3] Graduate Thesis of EMMC5- Dynamic analysis of nonlinear behavior of cable system and applications on cable stayed bridge, mixed structure using cable system- Nguyễn Văn Hiển-2002.