GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trần Văn Lăng – Phân Viện Công Nghệ Thông Tin tại TP.HCM
Nguyễn Phú Vinh – Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP.HCM

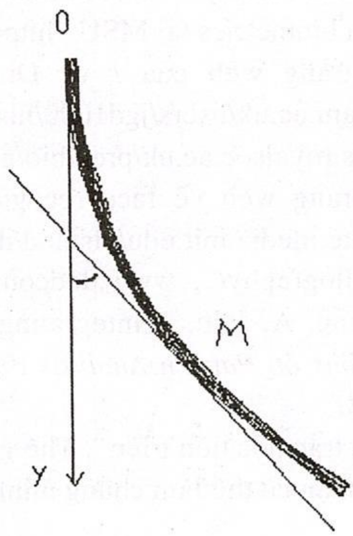
(Bài nhận ngày 09 tháng 1 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 18 tháng 2 năm 2002)

TÓM TẮT: Xét bài toán biên phi tuyến sau:

$$\begin{cases} \dfrac{-d}{dx}[M(x,u'(x))+N(x,u(x))]+g(x)\sin u(x)=f(x), \quad 0<x<L, \\ u(0)=0, \qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\ M(L,u'(L))+N(L,u(L))+b_1\sin u(L)=b_2 \end{cases}$$

Trong đó $L>0$ b_1,b_2 là các hằng số cho trước, các hàm số $M,N:[0,L]\times IR \to IR$, $f,g:(0,L)\to IR$ là các hàm cho trước. Trong bài nầy, bằng phương pháp phần tử hữu hạn chúng tôi chứng minh định lý tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (*). Đồng thời chúng tôi cũng thu được các kết quả về sự hội tụ và đánh giá sai số.

1. Mở đầu:



Xét một thanh đàn hồi phi tuyến có chiều dài L với khối lượng riêng γ_0 bị giữ chặt một đầu, thanh được nhúng chìm theo phương thẳng đứng trong một chất lỏng có khối lượng riêng γ_1. Do sự khác nhau về các khối lượng riêng của thanh và chất lỏng, nên lực đẩy Archimede và các ngoại lực khác tác dụng trên thanh làm cho thanh bị uốn cong. Gọi $u(x)$ là góc giữa tiếp tuyến với thanh ở trạng thái bị uốn tại điểm của thanh có hoành độ cong x và trục thẳng đứng Oy. Tucsnak trong **[10]** đã thiết lập bài toán biên phi tuyến cho $u(x)$ như sau:

$$\frac{-d}{dx}M(x,u'(x))+[-\lambda+(\gamma_0-\gamma_1)F(x)+G'(L)]\sin u(x)=0, \quad 0<x<L, \tag{1}$$

$$u(0)=0, \tag{2}$$

$$M(L,u'(L))+\gamma_1 G(L)\sin u(L)=0 \tag{3}$$

Trong đó λ là một hằng số dương, $g(x)$, $G(x)$ là các hàm cho trước. Từ khi bài toán nầy xuất hiện đã có nhiều tác giả khác quan tâm nghiên cứu chẳng hạn như: N.T.Long, T.V.Lăng **[4]**, N.H. Nghĩa, N.T.Long **[8]**, Long, Dũng, Thuyết **[5]**, Long, Dũng, Nghĩa, Thuyết **[6]**. Bài toán (1), (2), (3) là phi tuyến xuất hiện trong phương trình vi phân (1) và cả trong điều kiện biên (3).

Trong trường hợp tổng quát, phương trình vi phân phi tuyến mô tả bài toán uốn thanh đàn hồi phi tuyến nhúng trong môi trường chất lỏng có dạng:

$$\frac{-d}{dx}[M(x,u'(x))+N(x,u(x))]+g(x)\sin u(x)=f(x),\ 0<x<L, \tag{4}$$

và điều kiện biên tại hai đầu thanh:

$$u(0)=0, \tag{5}$$

$$M(L,u'(L))+N(L,u(L))+b_1\sin u(L)=b_2. \tag{6}$$

Trong đó $L>0$, b_1,b_2 là các hằng số cho trước, các hàm số $M,N:[0,L]\times IR\to IR$, $f,g:(0,L)\to IR$ là cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ đặt sau. Như vậy bài toán (4) -(6) là mô hình bài toán uốn một thanh đàn hồi phi tuyến nhúng trong một chất lỏng tổng quát hơn so với Tucsnak **[10]** đã thiết lập tương ứng với trường hợp:

$$g(x)=-\lambda+(\gamma_0-\gamma_1)F(x)+G'(L),\ b_1=\gamma_1 G(L), b_2=0,\ f(x)=0,\ N(x,u)=0.$$

Trong bài này, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ phần tử hữu hạn để giải bài toán biên phi tuyến (4) -(6). Trong chứng minh có sử dụng bổ đề Brouwer kết hợp với một số bất đẳng thức đánh giá nội suy đa thức. Chúng tôi cũng thu được các kết quả về đánh giá sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác. Điều nầy rất hữu hiệu về mặt tính toán bằng số. Kết quả thu được tổng quát hoá hơn các kết quả trong **[4]**, **[5]**, **[6]**, **[8]**, **[10]**.

2. Xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Một số ký hiệu và định nghĩa.

2.1. Các không gian hàm

Ký hiệu $\Omega=(0,L)$, và ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông dụng: $C^k(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$. Để cho gọn ta ký hiệu lại như sau:

$$W^{k,p}=W^{k,p}(\Omega), L^p=W^{0,p}(\Omega), H^k=W^{k,2},\quad 1\le p\le\infty, k=0,1,2,...$$

Ký hiệu $\|.\|$ là chuẩn trong L^2 và để phân biệt nó với một chuẩn khác, ta dùng ký hiệu $\|.\|_X$ để chỉ chuẩn trong không gian định chuẩn X (*có chỉ rõ không gian định chuẩn tương ứng*).

Với p cố định, $1<p<\infty$, ta đặt:

$$V=\{u\in W^{1,p}/u(0)=0\}.$$

Khi đó ta có các kết quả sau đây(xem **[1]**,**[2]**):

Bổ đề 1:

(i) *V là không gian Banach phản xạ, tách được đối với chuẩn* $\|u\|_V=\|u'\|_{L^p}$.

(ii) *Phép nhúng $V\subset_{>} C^0(\overline{\Omega})$ là compact và*

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}\le C_0\|u\|_V\quad \forall u\in V,$$

trong đó $C_0 = L^{(p-1)/p}$.

Mặt khác, $V \subset_{>} L^2$ với phép nhúng liên tục và nằm trù mật. Ký hiệu V^* là không gian đối ngẫu của V, ta đồng nhất L^2 với đối ngẫu của nó, do đó ta đồng nhất L^2 như là một không gian con của V^*. Khi đó ta có $V \subset_{>} L^2 \subset_{>} V^*$ với các phép nhúng liên tục và nằm trù mật. Ta cũng ký hiệu $\langle f, u\rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của $f \in V^*$ và $u \in V$.

2.2. Họ các không gian hữu hạn chiều sinh bởi phần tử hữu hạn.

Ta chia đoạn $\overline{\Omega} = [0, L]$ thành m đoạn con $\overline{\Omega}_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le m$, bởi các điểm nút nội suy $x_j = jh$, $1 \le j \le m$ với $h = L/m$.

Gọi $P_1(\overline{\Omega}_j)$ là tập các nhị thức bậc nhất xác định trên $\overline{\Omega}_j$. Đặt

$$V_m = \{u_m \in C^0(\overline{\Omega}) \cap V \,/\, u_m|_{\overline{\Omega}_j} \in P_1(\overline{\Omega}_j), \forall j = 1, 2, ..., m\}. \tag{7}$$

Khi đó V_m là một không gian con hữu hạn chiều của V sinh bởi m hàm cơ sở $w_j, 1 \le j \le m$ như sau:

- Với $1 \le j \le m-1$: $w_j(x) = \begin{cases} (x - x_j)/h, & \text{nếu } x_{j-1} \le x \le x_j, \\ (x_{j+1} - x)/h, & \text{nếu } x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{nếu } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$

- Với $j = m$: $w_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-1})/h, & \text{nếu } x_{m-1} \le x \le L, \\ 0, & \text{nếu } 0 \le x \le x_{m-1}. \end{cases}$

Hơn nữa các hàm w_j còn thỏa tính chất $w_j(x_i) = \delta_{ij}$, $1 \le j \le m$, $0 \le i \le m$ (δ_{ij} *là ký hiệu Kronecker*).

Ta xác định toán tử $r_m : V \to V_m$ mà hạn chế của nó trên tập con trù mật $V \cap C^2(\overline{\Omega})$ của V cho bởi (xem **[3]**,**[9]**):

$$(r_m u)(x) = \sum_{j=1}^{m} u(x_j) w_j(x), \quad u \in V \cap C^2(\overline{\Omega}).$$

Ký hiệu nửa chuẩn trong $W^{k,p}$ là

$$|u|_{k,p} = \left(\int_0^L \left|u^{(k)}(x)\right|^p dx \right)^{1/p}, \; 1 \le p < \infty, \quad |u|_k = |u|_{k,2}. \tag{8}$$

Khi đó ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2. *Cho* k *là một số nguyên thỏa* $0 \le k \le 2$. *Khi đó tồn tại một hằng số* $C = C(k, p, L)$ *sao cho*

$$|u - r_m u|_{k,p} \le \frac{C(k,p,L)}{m^{2-k}} |u|_{2,p}, \quad \forall u \in V \cap W^{2,p}. \text{ (xem [3],[9])}$$

2.3 Sự hội tụ và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $M, N : [0, L] \times IR \to IR$ là các hàm thỏa điều kiện Caratheodory, tức là:

(i) $M(.,y), N(.,y)$ đo được trên $[0, L]$ với mọi $y \in IR$,

(ii) $M(x,.), N(x,.)$ liên tục trên IR với hầu hết $x \in [0, L]$.

(H_2) $(M(x, y_1) - M(x, y_2))\,(y_1 - y_2) > 0$, $\forall y_1, y_2 \in IR, y_1 \neq y_2$.

(H_3) Tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, C_3 với $C_1 > C_3 \left(\dfrac{L}{\sqrt[p]{p}} \right)^{p-1}$ và các hàm $q_1 \in L^1$, $q_2, q_3 \in L^{p'}$, với $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ sao cho:

(i) $yM(x,y) \geq C_1 |y|^p - |q_1(x)|$, $\forall y \in IR$, với hầu hết $x \in [0, L]$.

(ii) $|M(x,y)| \leq C_2 |y|^{p-1} + |q_2(x)|$, $\forall y \in IR$, với hầu hết $x \in [0, L]$.

(iii) $|N(x,y)| \leq C_3 |y|^{p-1} + |q_3(x)|$, $\forall y \in IR$, với hầu hết $x \in [0, L]$.

(H_4) $f \in V^*$, $g \in L^1$.

(H_5) Tồn tại hằng số $C_4 > 0$ sao cho:

$$(M(x, y_1) - M(x, y_2))\,(y_1 - y_2) \geq C_4 |y_1 - y_2|^2, \ \forall y_1, y_2 \in IR, \text{ với hầu hết } x \in [0, L].$$

(H_6) $\exists K_1 > 0 : |N(x, y_1) - N(x, y_2)| \leq K_1 |y_1 - y_2|$, $\forall y_1, y_2 \in IR$, với hầu hết $x \in [0, L]$.

Nghiệm yếu của bài toán (4) - (6) được thành lập từ bài toán biến phân sau:

Bài toán (P): Tìm $u \in V$ sao cho

$$\langle M(x, u') + N(x, u), v' \rangle + \langle g(x) \sin u, v \rangle + (b_1 \sin u(L) - b_2) v(L) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in V \tag{9}$$

Ta xấp xỉ bài toán (P) bởi họ các bài toán hữu hạn chiều (P_m) như sau:

Bài toán (P_m): Tìm $u_m \in V_m$ sao cho

$$\langle M(x, u_m') + N(x, u_m), w_j' \rangle + \langle g(x) \sin u_m, w_j \rangle + (b_1 \sin u_m(L) - b_2) w_j(L) = \langle f, w_j \rangle,$$
$$\forall j \ , \ 1 \leq j \leq m \tag{10}$$

Định lý 1: *Cho $b_1, b_2 \in IR$. Giả sử (H_1) - (H_4) đúng. Khi đó:*

(i) Bài toán (P_m) có nghiệm $u_m \in V_m$.

(ii) Bài toán (P) có nghiệm $u \in V$.

Hơn nữa nếu ta thay các giả thiết (H_1) - (H_4) bởi (H_1), (H_3) - (H_6) và (H_7) như sau:

(H_7) $(K_1 + |b_1| + \|g\|_{L^1}) L < C_4$

Khi đó,

(iii) Bài toán (P_m) có duy nhất một nghiệm $u_m \in V_m$.

(iv) Bài toán (P) có duy nhất một nghiệm $u \in V$.

(v) $u_m \to u$ *hội tụ trong* $C^0(\overline{\Omega})$ *(hội tụ đều trên đoạn* $[0,L]$*).*

Chứng minh.

(i) *Sự tồn tại nghiệm của bài toán* (P_m)**:**

Ta tìm nghiệm $u_m \in V_m$ của bài toán (P_m) có dạng $u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{mj} w_j$, trong đó $c_m = (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mm}) \in IR^m$ thỏa hệ phương trình phi tuyến:

$$F(c_m) = 0, \tag{11}$$

với $F: IR^m \to IR^m$ cho bởi $F(c_m) = (F_1(c_m), F_2(c_m), ..., F_m(c_m))$,

$$F_j(c_m) = \langle M(x, u_m') + N(x, u_m), w_j' \rangle + \langle g(x)\sin u_m, w_j \rangle + (b_1 \sin u_m(L) - b_2) w_j(L) - \langle f, w_j \rangle.$$

Ta sẽ sử dụng bổ đề Brouwer sau đây mà chứng minh có thể tìm thấy trong **[7]**.

Bổ đề 3 (***bổ đề Brouwer***). *Cho* $F: IR^m \to IR^m$ *liên tục thỏa điều kiện:*

$\exists \rho > 0$ sao cho $\langle F(c), c \rangle_{IR^m} \geq 0 \;\; \forall c \in IR^m$, $\|c\|_{IR^m} = \rho$,

Trong đó,

$$c = (c_1, c_2, ..., c_m) \in IR^m,\; d = (d_1, d_2, ..., d_m) \in IR^m,\; \langle c, d \rangle_{IR^m} = \sum_{i=1}^{m} c_i d_i,\; \|c\|_{IR^m} = \sqrt{\langle c, c \rangle_{IR^m}}.$$

Khi đó tồn tại $c \in IR^m$, $\|c\|_{IR^m} \leq \rho$ *sao cho* $F(c) = 0$.

Ta có

$$\langle F(c_m), c_m \rangle_{IR^m} = \sum_{j=1}^{m} F_j(c_m) c_{mj}$$

$$= \langle M(x, u_m') + N(x, u_m), u_m' \rangle + \langle g(x)\sin u_m, u_m \rangle + (b_1 \sin u_m(L) - b_2) u_m(L) - \langle f, u_m \rangle. \tag{12}$$

Chú ý đến Bổ đề 1, (ii) và bất đẳng thức

$$\|v\|_{L^p} \leq \frac{L}{\sqrt[p]{p}} \|v'\|_{L^p}, \quad \forall v \in V. \tag{13}$$

Ta thu được từ (12) một đánh giásau:

$$\langle F(c_m), c_m \rangle_{IR^m} \geq \frac{\varepsilon_1^p}{p} \|u_m\|_V^p - \frac{1}{p'} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \rho_1\right)^{p'} - \|q_1\|_{L^1}. \tag{14}$$

Trong đó $\frac{\varepsilon_1^p}{p} = \frac{1}{2}[C_1 - C_3 \left(\frac{L}{\sqrt[p]{p}}\right)^{p-1}]$ và $\rho_1 = \|f\|_{V'} + \|q_3\|_{L^{p'}} + (\|g\|_{L^1} + |b_1| + |b_2|) C_0$.

Chú ý rằng hai chuẩn $\|c_m\|_{IR^m}$ và $\|u_m\|_V$ trên IR^m là tương đương, tức là, tồn tại hai hằng số $C_{1m} > 0, C_{2m} > 0$ sao cho

$$C_{1m} \|c_m\|_{IR^m} \leq \|u_m\|_V \leq C_{2m} \|c_m\|_{IR^m}, \quad \forall c_m \in IR^m.$$

Chọn $\rho_m = \frac{\sqrt[p]{p}}{C_{1m}\varepsilon_1}\sqrt[p]{\|q_1\|_{L^1} + \frac{1}{p'}(\frac{1}{\varepsilon_1}\rho_1)^{p'}}$. Khi đó nếu $\|c_m\|_{IR^m} = \rho_m$ ta có $\langle F(c_m), c_m\rangle_{IR^m} \geq 0$.

Vậy hệ (11) có nghiệm. Do đó (i) được chứng minh.

(ii) *Sự tồn tại nghiệm của bài toán* (P).

a) *Các đánh giá tiên nghiệm.*

- Nhân phương trình thứ j của hệ (10) bởi c_{mj}, sau đó lấy tổng theo $j = 1,2...,m$, ta được

$$\langle M(x,u'_m) + N(x,u_m), u'_m\rangle + \langle g(x)\sin u_m, u_m\rangle + (b_1 \sin u_m(L) - b_2)u_m(L) = \langle f, u_m\rangle. \tag{15}$$

Đánh giá tương tự như ở phần (i), ta có:

$$\|u_m\|_V \leq \rho / C_0, \tag{16}$$

trong đó

$$\rho = \frac{C_0\sqrt[p]{p}}{\varepsilon_1}\sqrt[p]{\|q_1\|_{L^1} + \frac{1}{p'}(\frac{1}{\varepsilon_1}\rho_1)^{p'}}$$

$$= \frac{C_0\sqrt[p]{p}}{\varepsilon_1}\sqrt[p]{\|q_1\|_{L^1} + \frac{1}{p'\varepsilon_1^{p'}}[\|f\|_{V'} + \|q_3\|_{L^{p'}} + C_0(\|g\|_{L^1} + |b_1| + |b_2|)]^{p'}}$$

và $\varepsilon_1 = \sqrt[p]{\frac{p}{2}[C_1 - C_3\left(\frac{L}{\sqrt[p]{p}}\right)^{p-1}]}$.

Từ các giả thiết (H_2), (H_4) và từ bất đẳng thức (16) ta thu được các đánh giá

$$\|M(x,u'_m)\|_{L^{p'}} \leq C_2\|u_m\|_V^{p-1} + \|q_2\|_{L^{p'}} \leq C, \tag{17}$$

$$\|N(x,u_m)\|_{L^{p'}} \leq C_3\left(\frac{L}{\sqrt[p]{p}}\right)^{p-1}\|u_m\|_V^{p-1} + \|q_3\|_{L^{p'}} \leq C. \tag{18}$$

Trong đó C là một hằng số độc lập với m.

- Nhờ (16) - (18) và Bổ đề 1, ta có thể trích ra từ dãy $\{u_m\}$ một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho:

$u_m \to u$	trong	V	yếu,	(19)
$u_m \to u$	trong	$C^0(\overline{\Omega})$	mạnh,	(20)
$M(x,u'_m) \to \chi$	trong	$L^{p'}$	yếu,	(21)
$N(x,u_m) \to N(x,u)$	trong	$L^{p'}$	mạnh,	(22)
$\sin u_m \to \sin u$	trong	$C^0(\overline{\Omega})$	mạnh.	(23)

b) *Qua giới hạn.* Cho $v \in V \cap C^2(\overline{\Omega})$, ta có từ Bổ đề 2 rằng

$$v_m = r_m v \to v \text{ trong } V \text{ mạnh}. \tag{24}$$

Thay w_j trong (10) bởi v_m ta có:

$$\langle M(x,u_m') + N(x,u_m), v_m' \rangle + \langle g(x)\sin u_m, v_m \rangle + (b_1 \sin u_m(L) - b_2) v_m(L) = \langle f, v_m \rangle . \tag{25}$$

- Qua giới hạn trong (25), ta dễ dàng suy từ (19) - (24) rằng u thỏa phương trình

$$\langle \chi + N(x,u), v' \rangle + \langle g(x)\sin u, v \rangle + (b_1 \sin u(L) - b_2) v(L) = \langle f, v \rangle ,\ \forall\ v \in V \cap C^2(\overline{\Omega}) . \tag{26}$$

Do $V \cap C^2(\overline{\Omega})$ trù mật trong V nên (26) đúng $\forall v \in V$.

Để chứng minh sự tồn tại lời giải của bài toán biến phân (P) ta chỉ cần chứng minh $\chi = M(x,u')$. Ta suy ra từ (10), (20), (22), (23), (26) rằng

$$\lim_{m\to\infty} \langle M(x,u_m'), u_m' \rangle = \langle \chi, u' \rangle . \tag{27}$$

Do đó từ (19), (21), (27) ta thu được

$$\lim_{m\to\infty} \langle M(x,u_m') - M(x,\varphi), u_m' - \varphi \rangle = \langle \chi - M(x,\varphi), u' - \varphi \rangle ,\ \forall \varphi \in L^p . \tag{28}$$

Do tính chất đơn điệu của M, ta thu được

$$\langle \chi - M(x,\varphi), u' - \varphi \rangle \ge 0 ,\ \forall \varphi \in L^p . \tag{29}$$

Lý luận quen thuộc về toán tử đơn điệu ta dễ dàng chứng minh được từ (29) rằng $\chi = M(x,u')$. Như vậy sự tồn tại được chứng minh.

(iii, iv) *Tính duy nhất nghiệm của các bài toán* (P_m) *và* (P).

Ta chỉ cần chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán (P).

Giả sử $u_1, u_2 \in V$ là hai nghiệm của bài toán (P). Khi đó $u = u_1 - u_2$ thỏa đẳng thức sau

$$\begin{aligned} &\langle M(x,u_1') - M(x,u_2'), u' \rangle + \langle N(x,u_1) - N(x,u_2), u' \rangle \\ &\qquad + \langle g(x)(\sin u_1 - \sin u_2), u \rangle + b_1(\sin u_1(L) - \sin u_2(L)) u(L) = 0 . \end{aligned} \tag{30}$$

Sử dụng các giả thiết (H_5), (H_6) ta suy từ (30) rằng

$$C_4 \left\| u' \right\|^2 \le K_1 \sqrt{L} \left\| u' \right\| \left\| u \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} + (\left\| g \right\|_{L^1} + |b_1|) \left\| u \right\|^2_{C^0(\overline{\Omega})} . \tag{31}$$

Chú ý rằng $\left\| u \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \sqrt{L} \left\| u' \right\|$, do đó ta suy từ (31) rằng

$$C_4 \left\| u' \right\|^2 \le (K_1 + |b_1| + \left\| g \right\|_{L^1}) L \left\| u' \right\|^2 . \tag{32}$$

Cuối cùng từ giả thiết (H_7), ta suy từ (32) rằng $\left\| u' \right\| = 0$ hay $u_1 = u_2$. Vậy tính duy nhất nghiệm của bài toán (P) được chứng minh.

(vi) *Sự hội tụ trong* $C^0(\overline{\Omega})$.

Do tính duy nhất nghiệm nên toàn bộ dãy $\{u_m\}$ hội tụ theo nghĩa (19) -(23), thay vì dãy con được trích ra từ nó. Đặc biệt từ (20) ta có $u_m \to u$ hội tụ trong $C^0(\overline{\Omega})$.

Để đánh giá sai số giữa u_m và u ta thành lập giả thiết về bổ sung cho M như sau:

(H_8) $\exists K_2 > 0 : |M(x,y_1) - M(x,y_2)| \le K_2|y_1 - y_2|, \forall y_1, y_2 \in IR$, với hầu hết $x \in [0,L]$.

Định lý 2: *Cho $b_1, b_2 \in IR$, giả thiết (H_1), (H_3) - (H_7) và (H_8) là đúng. Khi đó nếu $u \in V \cap H^2$ ta có đánh giá sai số giữa u_m và u như sau:*

$$\|u_m - u\|_V \le \frac{C^*}{m}\|u''\|,$$

Trong đó hằng số $C^* = C^*(L, C_4, K_1, K_2, |b_1|, \|g\|_{L^1})$ phụ thuộc vào các hằng số $L, C_4, K_1, K_2, |b_1|, \|g\|_{L^1}$.

Chứng minh.

Đặt

$$e_m = u_m - u\,,\; E_m = u - r_m u\,,\; d_m = u_m - r_m u = e_m + E_m\,,\; w_m = r_m u\,.$$

Sử dụng giả thiết (H_5) và từ (9), (10) ta được:

$$\begin{aligned} C_4\|d_m'\|^2 &\le \langle M(x,u_m') - M(x,w_m'), d_m'\rangle \\ &\le \|N(x,u_m) - N(x,u)\|\|d_m'\| + (\|g\|_{L^1} + |b_1|)\|e_m\|_{C^0(\bar\Omega)}\|d_m\|_{C^0(\bar\Omega)} \\ &+ \|M(x,u') - M(x,w_m')\|\,\|d_m'\|. \end{aligned} \tag{33}$$

Từ giả thiết (H_6), (H_8) ta thu được các đánh giá sau:

$$\|N(x,u_m) - N(x,u)\| \le K_1\sqrt{L}\|e_m\|_{C^0(\bar\Omega)}, \tag{34}$$

$$\|M(x,u') - M(x,w_m')\| \le K_2\|E_m'\|. \tag{35}$$

Tổ hợp (33), (34), (35) ta được

$$C_4\|d_m'\| \le (K_1 + \|g\|_{L^1} + |b_1|)\,L\,\|e_m'\| + K_2\|E_m'\| \tag{36}$$

Chú ý với $e_m = d_m - E_m$ ta suy ra từ (36) rằng

$$\|e_m'\| \le \frac{K_2 + C_4}{C_4 - (K_1 + \|g\|_{L^1} + |b_1|)\,L}\|E_m'\|.$$

Áp dụng Bổ đề 2 với $k = 1, p = 2$, cuối cùng ta thu được $\|e_m'\| \le \dfrac{C^*}{m}\|u''\|$, trong đó hằng số C^* phụ thuộc vào $L, C_4, K_1, K_2, |b_1|, \|g\|_{L^1}$. Định lý được chứng minh.

Chú ý rằng điều kiện $u \in V \cap H^2$ được thực hiện bởi định lý sau.

Định lý 3: *Cho $b_1, b_2 \in IR$, giả thiết (H_1), (H_3) - (H_6) và (H_7) là đúng. Bổ sung các giả thiết sau:*

(H'$_4$) $f, g \in L^2$,

(H'$_5$) $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \geq C_4 > 0$, $\forall y \in IR$, với hầu hết $x \in [0, L]$.

(H$_9$) $\frac{\partial M}{\partial y}(x, v) \in L^2, \forall v \in L^2$.

(H$_{10}$) $\frac{\partial N}{\partial x}(x, w) \in L^2$, $\frac{\partial N}{\partial y}(x, w) \in L^\infty$, $\forall w \in V$.

Khi đó $u \in V \cap H^2$ *và sai số giữa* u_m *và* u *cho bởi đánh giá sau:*

$$\|u_m - u\|_V \leq \frac{C^*}{m}\|u''\|,$$

trong đó hằng số $C^* = C^*(L, C_4, K_1, K_2, |b_1|, \|g\|_{L^1})$ *phụ thuộc vào các hằng số* $L, C_4, K_1, K_2, |b_1|, \|g\|_{L^1}$.

Chứng minh.

Từ các giả thiết (H_5'), (H_9), (H_{10}), ta suy ra rằng

$$C_4|u''| \leq \left|\frac{\partial M}{\partial y}(x, u')u''\right|,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, u')u'' = -f + g\sin u - \frac{\partial M}{\partial x}(x, u') - \frac{\partial N}{\partial x}(x, u) - \frac{\partial N}{\partial y}(x, u)u' \in L^2.$$

Vậy $u'' \in L^2$ tức là $u \in V \cap H^2$. Định lý được chứng minh nhờ vào kết luận của Định lý 2.

SOLVING THE CLASS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS BY FINITE ELEMENT METHOD

Tran Van Lang, Nguyen Phu Vinh

(Received 09 January 2002, Revised 18 February 2002)

ABSTRACT: We study the following nonlinear boundary value problem

$$\begin{cases} \dfrac{-d}{dx}[M(x,u'(x)) + N(x,u(x))] + g(x)\sin u(x) = f(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0) = 0, \\ M(L,u'(L)) + N(L,u(L)) + b_1 \sin u(L) = b_2 \end{cases} \qquad (*)$$

where $L > 0$ b_1, b_2 are given constants, $M, N : [0,L] \times IR \to IR$, $f, g : (0,L) \to IR$ are given functions.

In this paper, by using finite element method, we prove the existence and uniqueness theorem of the weak solution of problem (*). We also obtain the results of convergence and error estimate.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **R.A.Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, NewYork, 1975.

[2] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Paris, 1983.

[3] **P.G.Ciarlet**, *The finite method for elliptic problems*, North Holland, 1977.

[4] **N.T. Long, T.V. Lang**, *The problem of buckling of a nonlinearly elastic bar immersed in a fluid*, Vietnam J. Math., 24 (1996), 131-142.

[5] **N.T. Long, B.T. Dung, T.M. Thuyet**, *A nonlinear boundary value problem for nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces*, Z. Anal. Anw., 19 (2000), No.4, 1035-1046.

[6] **N.T. Long, B.T. Dung, N.H. Nghia, T.M. Thuyet**, *On a nonlinear boundary value with a mixed nonhomogeneous condition: Asymptotic behavior of a solution*, Demonstration Math., 34 (2001), 609-618.

[7] **J.L. Lions**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] **N.H. Nghia, N.T. Long**, *On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition*, Vietnam J. Math., 26 (1998), 301-309 .

[9] **R. Temam**, *Navier- Stokes equations*, North Holland, 1979.

[10] **M.Tucsnak**, *Buckling of nonlinearly elastic rods immersed in a fluid*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumanie, 33 (1989),173-181.