XẤP XỈ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG MIỀN HAI CHIỀU

Nguyễn Hội Nghĩa
Ban Đào tạo Sau Đại học, Đại học Quốc Gia TP.HCM

(Bài nhận ngày 28 tháng 1 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 04 tháng 3 năm 2002)

TÓM TẮT: Trong bài báo này chúng tôi xấp xỉ nghiệm $f=(f_1,f_2)$ của hệ phương trình hàm

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}f_j(b_{ij}x+c_{ij})+g_i(x),\ i=1,2,$$

$$x\in \quad \Omega=\{x=(x_1,x_2)\in R^2:\|x\|_1=|x_1|+|x_2|\le 1\},$$

bằng một dãy các đa thức hội tụ đều, trong đó $g_i:\Omega\to R$ là các hàm liên tục cho trước, $a_{ij},b_{ij}\in R$, $c_{ij}\in R^2$ là các hằng số và các vectơ cho trước thỏa các điều kiện

$$\sum_{i=1}^{2}\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}|<1,\quad |b_{ij}|<1,\quad \max_{i,j}\frac{\|c_{ij}\|_1}{1-|b_{ij}|}\le 1.$$

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm hai chiều sau đây:

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}f_j(b_{ij}x+c_{ij})+g_i(x), \tag{1.1}$$

$$x\in\Omega=\{x=(x_1,x_2)\in R^2:\|x\|_1=|x_1|+|x_2|\le 1\},i=1,2,$$

trong đó $g_i:\Omega\to R$ là các hàm số liên tục cho trước, $a_{ij},b_{ij}\in R$, $c_{ij}\in R^2$ cho trước thỏa các điều kiện

$$\|[a_{ij}]\|=\sum_{i=1}^{2}\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}|<1,\quad |b_{ij}|<1,\quad \max_{i,j}\frac{\|c_{ij}\|_1}{1-|b_{ij}|}\le 1. \tag{1.2}$$

và $f_i:\Omega\to R$ là các ẩn hàm.

Trong [1], các tác giả C.Q.Wu, Q.W.Xuan, D.Y.Zhu đã nghiên cứu hệ (1.1) cho miền một chiều ứng với $\Omega=[-b,b]$, cụ thể là hệ

$$\begin{cases} f_1(x)=a_{11}f_1(b_{11}x+c_{11})+a_{12}f_2(b_{12}x+c_{12}) \\ \qquad\qquad +a_{13}f_2(b_{13}x+c_{13})+g_1(x), \\ f_2(x)=a_{21}f_1(b_{21}x+c_{21})+a_{22}f_1(b_{22}x+c_{22}) \\ \qquad\qquad +a_{23}f_2(b_{23}x+c_{23})+g_2(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

với mọi $x \in \Omega = [-b,b]$, trong đó các hằng số a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, b cho trước thỏa các điều kiện:

$$\left.\begin{array}{l} |b_{ij}| < 1, \\ b \geq \max\limits_{i,j} \left[\dfrac{|c_{ij}|}{1-|b_{ij}|} \right], \\ \max\limits_{i} \left(\sum\limits_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right) < 1, \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

các hàm số g_1, g_2 liên tục cho trước và f_1, f_2 là các ẩn hàm. Nghiệm của hệ (1.3) lúc này cũng được xấp xỉ bởi một dãy qui nạp hội tụ đều và ổn định đối với các g_i.

Trong [5,6], các tác giả N. H. Nghĩa, N. K. Khôi đã xét các hệ phương trình hàm cụ thể để tiến hành kiểm tra các thuật toán số.

Trong [5] đã xét hệ hai phương trình hàm:

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{100} f_1(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{1}{200} f_1(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}) \\ \qquad + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}) + g_1(x), \\ f_2(x) = \dfrac{1}{100} f_1(\dfrac{x}{4}) + \dfrac{1}{200} f_1(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}) \\ \qquad + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{1}{200} f_2(\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4}) + g_2(x), \end{cases} \tag{1.5}$$

với mọi $x \in [-1,1]$, trong đó

$$\begin{cases} g_1(x) = \dfrac{1}{400}\left[\dfrac{596}{3}x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{16} - \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}\right)^2\right], \\ g_2(x) = \dfrac{1}{800}\left[-2x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{399}{2}x^2 - \left(\dfrac{x+3}{4}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{1.6}$$

Hệ này có nghiệm chính xác là

$$f_1(x) = \frac{x}{2} \;; \quad f_2(x) = \frac{x^2}{4}. \tag{1.7}$$

Trong [6] đã xét hệ ba phương trình hàm dưới một dạng khác:

$$\begin{cases} 100f_1(t^3) + f_2\left(\dfrac{t+1}{2}\right) + f_3\left(\dfrac{2t+1}{3}\right) = g_1(t), \\ f_1\left(\dfrac{t-1}{2}\right) + 200f_2(\sqrt[3]{t}) + f_3\left(\dfrac{2t-1}{3}\right) = g_2(t), \\ f_1(\cos t) + f_2(\sin t) + 300f_3\left(\dfrac{(t+1)^2}{2} - 1\right) = g_3(t), \quad -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó

$$g_1(t) = 100t^3, \quad g_2(t) = \frac{1}{2}(t-1), \quad g_3(t) = \cos t. \tag{1.9}$$

Lời giải chính xác của (1.8), (1.9) là

$$f_1^{ex}(t) = t; \quad f_2^{ex}(t) = f_3^{ex}(t) = 0. \tag{1.10}$$

Trong [2], các tác giả N. T. Long, N. H. Nghĩa, Đ. V. Ruy, N. K. Khôi đã nghiên cứu một trường hợp riêng của (1.1) với $\Omega = [-b, b]$ hay Ω là khoảng không bị chặn của R.

Bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Banach, các tác giả trong [2] đã thu được kết quả về sự tồn tại, duy nhất và tính ổn định nghiệm của hệ (1.1) đối với các hàm g_i. Với giả thiết $g \in C^r(\Omega; R^n)$ và $\Omega = [-b, b]$ trong bài báo [2] đã cho một khai triển Maclaurin của nghiệm của hệ (1.1) cho đến cấp r. Hơn nữa, nếu g_i là các đa thức bậc r, thì nghiệm f của hệ (1.1) cũng là đa thức bậc r. Còn nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f sẽ được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Sau đó, các kết quả trên đây đã được mở rộng trong [3,4] cho miền $\Omega \subset R^p$. Ngoài ra, trong [3,4] cũng đưa ra một điều kiện đủ về hội tụ bậc hai của hệ phương trình hàm.

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một công thức tường minh biểu diễn nghiệm của hệ (1.1) trong trường hợp g_i là các đa thức. Kế đó, nếu g_i là hàm liên tục, nghiệm f của (1.1) sẽ được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Một số kết quả cụ thể thu được trong hai ví dụ về hàm g_i. Hy vọng rằng điều này sẽ làm rõ thêm các kết quả trong [1-6].

2. CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu $X = C(\Omega; R^2)$ là không gian Banach của các hàm số

$$f = (f_1, f_2) : \Omega \to R^2$$

liên tục trên Ω đối với chuẩn

$$\|f\|_X = \sup_{x \in \Omega}(|f_1(x)| + |f_2(x)|). \tag{2.1}$$

Một điểm trong R^2 được ký hiệu bởi $x = (x_1, x_2)$. Ta gọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$ là một đa chỉ số và ký hiệu x^α để chỉ đơn thức $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, có bậc $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Tương tự, nếu $D_j = \dfrac{\partial .}{\partial x_j}$ với $j = 1,2$, thì $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ ký hiệu một toán tử vi phân cấp $|\alpha|$. Ta cũng ký hiệu $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2!$.

Cho hai đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in Z_+^2$.

Ta viết $\alpha \le \beta$ có nghĩa là $\alpha_i \le \beta_i$, $\forall i = 1,2$.

$$C_\beta^\alpha = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!} = \frac{\beta_1!}{\alpha_1!(\beta_1-\alpha_1)!} \frac{\beta_2!}{\alpha_2!(\beta_2-\alpha_2)!}.$$

Tương tự, với số nguyên không âm m, ta đặt

$C^m(\Omega; R^2) = \{ f = (f_1, f_2) \in C(\Omega; R^2) : D^\alpha f_i \in C(\Omega; R), |\alpha| \le m, i = 1,2 \}$

$C^m(\Omega; R^2)$ cũng là một không gian Banach đối với chuẩn:

$$\|f\|_{C^m(\Omega;R^2)} = \max_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{2} \left| D^\alpha f_i(x) \right|. \tag{2.2}$$

Ta viết hệ (1.1) theo dạng của một phương trình toán tử trong $X = C(\Omega; R^2)$

$$f = Bf + g \tag{2.3}$$

trong đó

$$f = (f_1, f_2)\ , Bf = ((Bf)_1, (Bf)_2)$$

với $\quad (Bf)_i(x) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} f_j(b_{ij} x + c_{ij}),\ i = 1,2$, với mọi $x \in \Omega$.

3. SỰ TỒN TẠI, DUY NHẤT VÀ XẤP XỈ NGHIỆM

Ta thiết lập các giả thiết sau:

(H1) $g \in X = C(\Omega; R^2)$,

(H2) Các số thực $a_{ij}, b_{ij} \in R$ và vectơ $c_{ij} \in R^2$ thỏa các điều kiện

$$\|[a_{ij}]\| = \sum_{i=1}^{2} \max_{1 \le j \le 2} |a_{ij}| < 1, \quad |b_{ij}| < 1, \quad \max_{i,j} \frac{\|c_{ij}\|_1}{1 - |b_{ij}|} \le 1. \tag{3.1}$$

Định lý 1: *Giả sử (H1) - (H2) là đúng.Khi đó tồn tại duy nhất một hàm $f = (f_1, f_2) \in X$ là lời giải của hệ (1.1). Hơn nữa lời giải của hệ (1.1) cũng ổn định đối với g trong X.*

Chứng minh có thể tìm thấy trong [3].

Sau đây ta sẽ xét các trường hợp khác nhau của $g_i(x)$.

3.1. Khảo sát trường hợp $g_i(x)$ là đa thức.

Ta xét $g_i(x)$ là đa thức theo hai biến có bậc nhỏ hơn hay bằng r

$$g_i(x)=\sum_{|\gamma|\le r} d_{i\gamma}x^\gamma=\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in Z_+^2\\ \gamma_1+\gamma_2\le r}} d_{i\gamma}x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\ ,\quad i=1,2. \tag{3.2}$$

Theo một kết quả trong [3], nghiệm của hệ (1.1) cũng là các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng r. Ta tìm nghiệm của (1.1) theo dạng

$$f_i(x)=\sum_{|\gamma|\le r} c_{i\gamma}x^\gamma=\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in Z_+^2\\ \gamma_1+\gamma_2\le r}} c_{i\gamma}x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\ ,\quad i=1,2. \tag{3.3}$$

Thay $f_i(x)$ vào (1.1) ta thu được $(c_{1\gamma},c_{2\gamma})\,,|\gamma|\le r$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$c_{i\nu}-\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\sum_{\substack{\nu\le\gamma\\ |\gamma|\le r}}C_\gamma^\nu b_{ij}^{|\nu|}c_{ij}^{\gamma-\nu}c_{j\gamma}=d_{i\nu}\,,i=1,2\,,|\nu|\le r. \tag{3.4}$$

Giải hệ (3.4) ta thu được $(c_{1\nu},c_{2\nu}),|\nu|\le r$.

Chú thích 1: Để có thể hình dung nghiệm cụ thể của hệ (3.4), ta có thể giả sử $c_{ij}=0$. Khi đó hệ (3.4) được viết:

$$c_{i\gamma}-\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}^{|\gamma|}c_{j\gamma}=d_{i\gamma}\,,i=1,2\,,|\gamma|\le r. \tag{3.5}$$

Giải hệ (3.5), ta được:

$$\left.\begin{aligned} c_{1\gamma}&=\frac{(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})d_{1\gamma}+a_{12}b_{12}^{|\gamma|}d_{2\gamma}}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}}\,,\\ c_{2\gamma}&=\frac{a_{21}b_{21}^{|\gamma|}d_{1\gamma}+(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})d_{2\gamma}}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}}\,,\\ &\qquad\qquad\qquad ,|\gamma|\le r. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

3.2. Trường hợp $g=(g_1,g_2)\in C^q(\Omega,R^2)$

Gọi $\tilde f=(\tilde f_1,\tilde f_2)$ là nghiệm đa thức của hệ (1.1) tương ứng với $\tilde g=(\tilde g_1,\tilde g_2)$, trong đó:

$$\begin{aligned}\tilde g_i(x)&=\sum_{|\gamma|\le q-1}\frac{1}{\gamma!}D^\gamma g_i(0)x^\gamma\\ &=\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in Z_+^2\\ \gamma_1+\gamma_2\le q-1}}\frac{1}{\gamma_1!\gamma_2!}\times\frac{\partial^{|\gamma|}g_i}{\partial x_1^{\gamma_1}\partial x_2^{\gamma_2}}(0,0)x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\ ,\quad i=1,2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Theo kết quả trong [3], sai lệch giữa hai nghiệm f, $\tilde f$ của hệ (1.1) lần lượt, tương ứng với $g,\tilde g$, được cho bởi đánh giá

$$\left\|f-\widetilde{f}\right\|_X \leq \frac{1}{1-\left\|[a_{ij}]\right\|} \times \sum_{|\gamma|=q} \frac{1}{\gamma!}\left\|D^\gamma g\right\|_X \tag{3.8}$$

trong đó

$$\widetilde{f}_i(x) = \sum_{|\gamma|\leq q-1} c_{i\gamma} x^\gamma \;, i=1,2, \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{1\gamma} &= \frac{(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})\frac{1}{\gamma!}D^\gamma g_1(0)+a_{12}b_{12}^{|\gamma|}\frac{1}{\gamma!}D^\gamma g_2(0)}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}}, \\ c_{2\gamma} &= \frac{a_{21}b_{21}^{|\gamma|}\frac{1}{\gamma!}D^\gamma g_1(0)+(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})\frac{1}{\gamma!}D^\gamma g_2(0)}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}}, \\ &\qquad ,|\gamma|\leq q-1. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

3.2. Trường hợp $g=(g_1,g_2)\in X$.

Theo định lý Weierstrass mỗi hàm liên tục g_i có thể xấp xỉ bằng một dãy các đa thức hội tụ đều $P_i^{[q]}$ khi bậc $q\to+\infty$. Do đó, $P^{[q]}=(P_1^{[q]},P_2^{[q]})$ hội tụ trong $C(\Omega;R^2)$ về g khi $q\to+\infty$. Gọi $\widetilde{f}^{[q]}$ là lời giải đa thức của (1.1) tương ứng với $g=P^{[q]}$.

Mặt khác, từ các hệ thức $f=Bf+g$, $\widetilde{f}^{[q]}=B\widetilde{f}^{[q]}+P^{[q]}$, ta suy ra rằng:

$$f-\widetilde{f}^{[q]}=B(f-\widetilde{f}^{[q]})+g-P^{[q]}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left\|f-\widetilde{f}^{[q]}\right\|_X &\leq \|B\|\left\|f-\widetilde{f}^{[q]}\right\|_X+\left\|g-P^{[q]}\right\|_X \\ &\leq \left\|[a_{ij}]\right\|\left\|f-\widetilde{f}^{[q]}\right\|_X+\left\|g-P^{[q]}\right\|_X,\end{aligned} \tag{3.11}$$

ta suy ra:

$$\left\|f-\widetilde{f}^{[q]}\right\|_X \leq \frac{1}{1-\left\|[a_{ij}]\right\|}\left\|g-P^{[q]}\right\|_X \to 0, \text{ khi } q\to+\infty. \tag{3.12}$$

3.4. Hai trường hợp cụ thể với hàm $g=(g_1,g_2)$

a) Ta xét một ví dụ cụ thể với hàm $g=(g_1,g_2)$ như sau:

$$g_i(x)=g_i(x_1,x_2)=\frac{4+i}{4+i-x_1-x_2}, \; x=(x_1,x_2)\in\Omega, i=1,2. \tag{3.13}$$

Ta viết lại $g_i(x)$ như sau:

$$g_i(x)=\frac{1}{1-\dfrac{x_1+x_2}{4+i}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x_1+x_2}{4+i}\right)^j=\sum_{j=0}^{q-1}\left(\frac{x_1+x_2}{4+i}\right)^j+\sum_{j=q}^{\infty}\left(\frac{x_1+x_2}{4+i}\right)^j. \tag{3.14}$$

Chú ý rằng

$$(x_1+x_2)^j = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=j} \frac{j!}{\gamma_1!\gamma_2!} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} = \sum_{|\gamma|=j} \frac{|\gamma|!}{\gamma!} x^\gamma .$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}\left(\frac{x_1+x_2}{4+i}\right)^j = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{(4+i)^j} \sum_{|\gamma|=j} \frac{|\gamma|!}{\gamma!} x^\gamma$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \frac{|\gamma|!}{(4+i)^{|\gamma|}} x^\gamma \equiv \sum_{|\gamma|\le q-1} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma g_i(0) x^\gamma . \quad (3.15)$$

Đặt

$$P_i^{[q]}(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \frac{|\gamma|!}{(4+i)^{|\gamma|}} x^\gamma , \quad (3.16)$$

ta có

$$\left|g_i(x) - P_i^{[q]}(x)\right| = \left|\sum_{j=q}^{\infty}\left(\frac{x_1+x_2}{4+i}\right)^j\right| \le \sum_{j=q}^{\infty} \frac{\|x\|_1^j}{(4+i)^j} \le \sum_{j=q}^{\infty} \frac{1}{(4+i)^j}$$

$$= \frac{1}{(3+i)(4+i)^{q-1}} , \ \forall\ x = (x_1, x_2) \in \Omega . \quad (3.17)$$

Do vậy

$$\left\|g - P^{[q]}\right\|_X = \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left|g_i(x) - P_i^{[q]}(x)\right|$$

$$\le \frac{1}{4.5^{q-1}} + \frac{1}{5.6^{q-1}} \le \frac{1}{5^{q-1}} \to 0 \text{ khi } q \to +\infty . \quad (3.18)$$

Ta gọi $\tilde{f}^{[q]} = (\tilde{f}_1^{[q]}, \tilde{f}_2^{[q]})$ là nghiệm đa thức của hệ (1.1) tương ứng với $g = P^{[q]} = (P_1^{[q]}, P_2^{[q]})$. Vậy:

$$\tilde{f}^{[q]} = (\tilde{f}_1^{[q]}, \tilde{f}_2^{[q]}), \quad \tilde{f}_i(x) = \sum_{|\gamma|\le q-1} c_{i\gamma} x^\gamma , i = 1,2 , \quad (3.19)$$

trong đó, các hệ số $(c_{1\gamma}, c_{2\gamma})$, $|\gamma| \le q-1$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính(3.4) ứng với $r = q-1$ và

$$d_{i\gamma} = \frac{1}{\gamma!} D^\gamma g_i(0) = \frac{|\gamma|!}{\gamma!(4+i)^{|\gamma|}} , \ |\gamma| \le q-1 , \ i = 1,2 . \quad (3.20)$$

tức là

$$c_{i\nu} - \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \sum_{\substack{\nu\le\gamma \\ |\gamma|\le q-1}} C_\gamma^\nu b_{ij}^{|\nu|} c_{ij}^{\gamma-\nu} c_{j\gamma} = \frac{|\nu|!}{\nu!(4+i)^{|\nu|}} , i = 1,2 , |\nu| \le q-1 . \quad (3.21)$$

Ta suy ra:

$$\left\|f - \tilde{f}^{[q]}\right\|_X \le \frac{1}{1 - \|[a_{ij}]\|} \left\|g - P^{[q]}\right\|_X \le \frac{5^{1-q}}{1 - \|[a_{ij}]\|} \to 0 , \text{ khi } q \to +\infty . \quad (3.22)$$

Chú thích 2. Nếu $c_{ij}=0$ thì các hệ số $(c_{1\gamma},c_{2\gamma})$, $|\gamma|\le q-1$ được tính theo công thức (3.6) với

$$D^{\gamma}g_i(0)=\frac{|\gamma|!}{(4+i)^{|\gamma|}},\ |\gamma|\le q-1,\ i=1,2, \tag{3.23}$$

tức là

$$\left.\begin{aligned} c_{1\gamma}&=\frac{|\gamma|!}{\gamma!}\times\frac{\dfrac{(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})}{5^{|\gamma|}}+\dfrac{a_{12}b_{12}^{|\gamma|}}{6^{|\gamma|}}}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}},\\ c_{2\gamma}&=\frac{|\gamma|!}{\gamma!}\times\frac{\dfrac{a_{21}b_{21}^{|\gamma|}}{5^{|\gamma|}}+\dfrac{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})}{6^{|\gamma|}}}{(1-a_{11}b_{11}^{|\gamma|})(1-a_{22}b_{22}^{|\gamma|})-a_{12}a_{21}b_{12}^{|\gamma|}b_{21}^{|\gamma|}},\\ &\qquad ,\ |\gamma|\le q-1. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

b) Ta xét một ví dụ khác với hàm $g=(g_1,g_2)$ như sau:

$$g_i(x)=g_i(x_1,x_2)=e^{\frac{x_1+x_2}{1+i}},\ x=(x_1,x_2)\in\Omega,\ i=1,2. \tag{3.25}$$

Ta viết lại $g_i(x)$ dưới dạng:

$$g_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x_1+x_2}{1+i}\right)^j=P_i^{[q]}(x)+\sum_{j=q}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x_1+x_2}{1+i}\right)^j, \tag{3.26}$$

với $$P_i^{[q]}(x)=\sum_{|\gamma|\le q-1}\frac{1}{\gamma!}\frac{1}{(1+i)^{|\gamma|}}x^{\gamma}\equiv\sum_{|\gamma|\le q-1}\frac{1}{\gamma!}D^{\gamma}g_i(0)x^{\gamma}. \tag{3.27}$$

ta có

$$\begin{aligned}\left|g_i(x)-P_i^{[q]}(x)\right|&=\left|\sum_{j=q}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x_1+x_2}{1+i}\right)^j\right|\\ &\le\sum_{j=q}^{\infty}\frac{\|x\|_1^j}{j!(1+i)^j}\le\sum_{j=q}^{\infty}\frac{1}{j!(1+i)^j}\le\frac{e^{1/(1+i)}}{q!(1+i)^q},\ \forall\ x=(x_1,x_2)\in\Omega.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left\|g-P^{[q]}\right\|_X&=\sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left|g_i(x)-P_i^{[q]}(x)\right|\\ &\le\frac{e^{1/2}}{q!\,2^q}+\frac{e^{1/3}}{q!\,3^q}\le\frac{e^{1/2}}{q!\,2^{q-1}}\to 0\text{ khi }q\to+\infty.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Đặt

$$\tilde{f}^{[q]} = (\tilde{f}_1^{[q]}, \tilde{f}_2^{[q]}), \quad \tilde{f}_i(x) = \sum_{|\gamma| \le q-1} c_{i\gamma} x^\gamma, i = 1,2, \tag{3.29}$$

trong đó, các hệ số $(c_{1\gamma}, c_{2\gamma})$, $|\gamma| \le q-1$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$c_{i\nu} - \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \sum_{\substack{\nu \le \gamma \\ |\gamma| \le q-1}} C_\gamma^\nu b_{ij}^{|\nu|} c_{ij}^{\gamma-\nu} c_{j\gamma} = \frac{1}{\nu!(1+i)^{|\nu|}}, i = 1,2, |\nu| \le q-1. \tag{3.30}$$

Khi đó

$$\left\| f - \tilde{f}^{[q]} \right\|_X \le \frac{1}{1 - \left\| [a_{ij}] \right\|} \left\| g - P^{[q]} \right\|_X \le \frac{1}{1 - \left\| [a_{ij}] \right\|} \times \frac{\sqrt{e}}{q!\, 2^{q-1}} \to 0, \text{ khi } q \to +\infty.$$

APPROXIMATION SOLUTIONS OF A SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS IN A TWO-DIMENSIONAL DOMAIN

Nguyen Hoi Nghia
VietNam National University – HoChiMinh City
(Received 28 January 2002, Revised 04 March 2002)

ABSTRACT: In this paper we approximate the solution $f=(f_1,f_2)$ of the following system of functional equations

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}f_j(b_{ij}x+c_{ij})+g_i(x),\ \ i=1,2,$$

$$x\in\Omega=\{x=(x_1,x_2)\in R^2:\|x\|_1=|x_1|+|x_2|\le 1\},$$

by a uniformly convergent polynomials sequence, where $g_i:\Omega\to IR$ are given continuous functions, $a_{ij},b_{ij}\in IR$, $c_{ij}\in IR^2$ are given constants and vectors satisfying the following conditions

$$\sum_{i=1}^{2}\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}|<1,\ \ |b_{ij}|<1,\ \ \max_{i,j}\frac{\|c_{ij}\|_1}{1-|b_{ij}|}\le 1.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] ***C.Q.Wu, Q.W.Xuan, D.Y.Zhu,*** The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system, *SEA. Bull.Math.* **15** (1991), 109 -115.

[2] ***Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Đinh Văn Ruy,*** On a system of functional equations, *Demonstration Math.* **31** (1998), 313-324.

[3] ***Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa,*** On a system of functional equations in a multi-dimensional domain, *Z. Anal. Anw.* **19** (2000), 1017- 1034.

[4] ***Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa,*** Hệ phương trình hàm:Phi tuyến và tuyến tính, Xấp xỉ lời giải, *Kỷ yếu Hội nghị Khoa học, Khoa Toán- tin học, Đại học Sư phạm TP.HCM.* 23-12-2000, p.72-86.

[5] ***Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi,*** Về một hệ phương trình hàm tuyến tính , *Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ*, Vol. **3**, No. 7&8, (2000), 18-24.

[6] ***Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Hội Nghĩa,*** Giải số của hệ phương trình hàm, *Tạp chí Phát triển Khoa học và Công Nghệ*, Vol.**3**, No. 7&8, (2000), 25-31.