# ĐỘNG HỌC TẠO HÌNH BỀ MẶT KHÔNG GIAN TRONG GIA CÔNG CƠ KHÍ

**Lê Khánh Điền**
Khoa Cơ Khí - Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Quốc gia TP.HCM
*(Bài nhận ngày 14 tháng 3 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 01 tháng 4 năm 2002)*

*TÓM TẮT: Bài báo trình bày một số yếu tố động học trong gia công một bề mặt phức tạp tổng quát bằng dao ngón đầu hình cầu trong không gian như:*
*- Xác định tọa độ dụng cụ cắt tại mọi điểm gia công trên bề mặt cho trước.*
*- Xác định bán kính của dao cầu để trách cắt lẹm lên chi tiết.*

## 1. GIỚI THIỆU

Có ba yếu tố trong gia công tạo hình bằng phương pháp cắt gọt là:

-Biên dạng chi tiết gia công.

-Biên dạng dụng cụ cắt.

-Quỹ đạo chuyển động của dụng cụ cắt tương đối so với chi tiết gia công.

Tùy theo nhu cầu mà với hai yếu tố cho trước, ta cần phải xác định yếu tố thứ ba. Bài bâo xét việc xác định quĩ đạo chuyển động của tâm dụng cụ cắt đã chọn để gia công bề mặt phức tạp của chi tiết đã cho, dụng cụ cắt thường cố hình dạng đơn giản:

- Dụng cụ cắt đầu hình cầu khi gia công mặt phức tạp không gian.
- Dụng cụ cắt hình trụ (dao ngón) khi gia công đường cong phức tạp phẳng.

Bài báo này khảo sát việc gia công tinh bề mặt bằng dao có đầu hình cầu trong gia công chi tiết phức tạp trong không gian.

## 2. XÁC ĐỊNH TÂM CONG BỀ MẶT DAO:

Tại mọi điểm gia công M(x,y,z) trên mặt gia công, ta đều có thể xác định chính xác tọa độ của tâm dao cắt hình cầu bằng phương pháp giải tích như sau:

Xét trường hợp tổng quát, khi mặt cong phức tạp được cho dưới phương trình tiềm ẩn F(x,y,z)=0.

Tại điểm đang gia công M(x,y,z) nằm trên mặt này thì vector pháp tuyến N có dạng theo[2] là:

$$\overrightarrow{N} = \left| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}^T \right|_M \qquad (1)$$

*Vector pháp tuyến đơn vị*

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{|N|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\Bigg|_M} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}\right)_M^T \qquad (2)$$

Gọi O là gốc hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, theo đại số vector:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} \qquad (3)$$

Tâm dao A nằm trên pháp tuyến của biên dạng mặt cong tại điểm đang gia công M và $MA=R_0$, bán kính dao cầu nên

$$\overrightarrow{MA} = R_0.\vec{n}$$

$$x_A = x_M + R_0.\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_M}{\sqrt{\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_M\right)^2}}$$

$$y_A = y_M + R_0.\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_M}{\sqrt{\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_M\right)^2}} \qquad (4)$$

$$z_A = z_M + R_0.\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_M}{\sqrt{\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_M\right)^2 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_M\right)^2}}$$

Có thể viết gọn hơn dưới dạng tensor :

$$u_A^i = u_M^i + R.\frac{\frac{\partial F}{\partial u_M^i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial F}{\partial u_M^j}\right)^2}} \qquad (5)$$

i=1,2,3 và $u_A^i$ là 3 thành phần số của tâm dụng cụ cắt A

Công thức (4) hay (5) cho ta mối quan hệ giữa tọa độ tâm dụng cụ cắt A, có bán kính $R_0$ khi đang gia công điểm M bất kỳ trên mặt chi tiết mà phương trình biên dạng được cho dưới dạng tiềm ẩn F(x,y,z)=0

## 3. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TÂM DAO CẮT KHI GIA CÔNG ĐƯỜNG CONG PHẲNG:

Đây là trường hợp riêng khi chọn việc gia công bề mặt không gian theo từng lớp có cao độ z xác định.

Trong mặt phẳng $z=z_M$ , ta trở về công thức phẳng như sau:

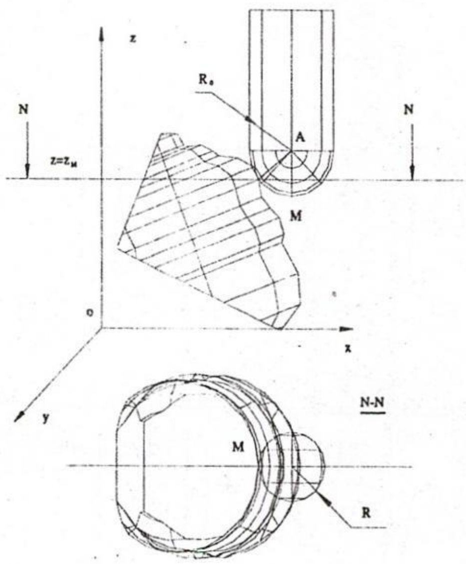
-Vết của mặt gia công F(x,y,z) là đường cong:

$$F(x,y)=F(x,y,z_M) \tag{6}$$

-Vết của đá mài hình cầu sẽ là:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2= R_0^2-(z_M-z_A)^2 \tag{7}$$

Hình (1) ở trang sau mô tả việc gia công theo lớp tại cao độ $z=z_M$ của bề mặt bất kỳ tại điểm M, dụng cụ cắt là dao trụ có đầu dao hình cầu bán kính $R_0$, tâm có tọa độ $(x_A,y_A)$ tiết diện N-N thể hiện mặt cắt với biên dạng phẳng tại M, trong tiết diện này, bán kính dụng cụ là $R<R_0$.




*Hình 1*

Trong mặt $z=z_M$ vết của đá mài trong mặt phẳng này là vòng tròn tâm A, bán kính $R^2 = R_0^2 - (z_M - z_A)^2$. Theo (7):

$$z_A = z_M + R_0 \cdot \frac{\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]_M}{\sqrt{\left(\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}\right]_M\right)^2+\left(\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]_M\right)^2+\left(\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]_M\right)^2}}$$

Công thức tính bán kính tại tiết diện $z_M$ qua điểm đang gia công M là:

$$R = R_0 \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\Big|_M + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\Big|_M}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\Big|_M + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\Big|_M + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\Big|_M}} \qquad (8)$$

Gọi oz là hình chiếu của gốc O trên mặt phẳng $z_M$ ta tìm khoảng cách tâm vật gia công $O_zA$:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \qquad (9)$$

thế (7) vào công thức khoảng cách trên, OA được tính như sau:

$$OA = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + R_0^2 \cdot \frac{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M^2\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M^2} + 2R_0 \frac{\left(x_M \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M + y_M \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M^2}}} \qquad (10)$$

Sử dụng phương trình thông số u,v trong đó u=ρ, v=φ, ta có hệ tọa độ trụ trong không gian khi chiếu xuống mặt $z=z_M$ thành hệ tọa độ độc cực.

Theo [2] ta có F(x,y,zM)=F(x,y),
F(x(u,v),y(u,v))=F(x(ρ,φ),x(ρ,φ)) thì:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad (11)$$

Ta hãy xác định $\frac{\partial F}{\partial x}$ và $\frac{\partial F}{\partial y}$ như sau đây:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}}{\frac{\partial x}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}}$$

$$(11) \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \rho} - \dfrac{\partial F}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \rho}} \tag{12}$$

Trong tọa độ độc cực, ta có: $x = \rho.\cos\varphi \qquad y = \rho.\sin\varphi$

nên $\qquad x^2+y^2=\rho^2 \qquad (13)$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi \tag{14}$$

Thế (14) vào (12) và đặt $\rho' = \dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}.\dfrac{\partial \rho}{\partial F}$ ta có:

Từ (8) ta có $\Rightarrow$ $R=R_0.\sqrt{\dfrac{\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_M\right)^2+\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_M\right)^2}{\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_M\right)^2+\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_M\right)^2+\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_M\right)^2}}$ $\qquad (15)$

Thế ( 12), (13), (14), (15) vào (10) ta có:

$$OA = \sqrt{\rho^2 + R^2 + 2R_0\frac{\left(x_M\cdot\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_M + y_M\cdot\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_M\right)}{\dfrac{R_0}{R}\sqrt{\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_M\right)^2+\left(\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_M\right)^2}}}$$

$$= \sqrt{\rho^2+R^2+2R_0\frac{\left(\rho\cos\varphi.\dfrac{\partial F}{\partial \rho}\left(\dfrac{\rho\cos\varphi-\rho'\sin\varphi}{\rho}\right)+\rho\sin\varphi.\dfrac{\partial F}{\partial \rho}\left(\dfrac{\rho'\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho}\right)\right)}{\dfrac{R_0}{R}\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \rho}\left(\dfrac{\rho\cos\varphi-\rho'\sin\varphi}{\rho}\right)\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial \rho}\left(\dfrac{\rho'\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho}\right)\right)^2}}}$$

$$OA = \sqrt{\rho^2 + R^2 + 2R\frac{\frac{\partial F}{\partial \rho}.\frac{1}{\rho}\rho^2}{\frac{\partial F}{\partial \rho}.\frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}} \quad (16)$$

Vậy khoảng cách 2 tâm chi tiết và dao OA theo bán kính cực của chi tiết $\rho(\theta)$ và bán kính dao trụ R trong mặt phẳng $z=z_M$ là

$$OA(\theta) = \sqrt{\rho^2(\theta) + R^2 + \frac{2R\rho^2(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}} \quad (17)$$

Công thức này là cơ sở để chế tạo và điều khiển mô hình gia công chi tiết cam phẳng đã nghiệm thu trong tháng 11 năm 2000 vừa qua tại ĐHBK và đã được trình bày một cách khác trong bày báo "Xác định tâm dao khi gia công chi tiết phẳng có biên dạng phức tạp" của tác giả đăng trong tạp chi "Phát triển khoa học cơng nghệ" tập 3 số 4 năm 2000.

## 4. ĐIỀU KIỆN TRÁNH CẮT LẸM CHI TIẾT:

Khi bán kính vùng lõm của mặt gia công nhỏ hơn bán kính dao cắt $R_0$ thì có hiện tượng dao cắt lẹm các vùng lân cận của chi tiết. Do đó, với chi tiết phức tạp cho trước, việc lựa bán kính dao cắt phù hợp, tránh cắt lẹm lên chi tiết là cần thiết.

### 4.1/- Các đặc tính hình học bề mặt tại điểm gia công M:

Tại điểm M đang gia công có vô số pháp diện, các pháp diện này đều chứa pháp tuyến N tính theo (5), vết của mặt gia công trong từng tiết diện là một đường cong có bán kính khác nhau, hai pháp diện có các đường có bán kính lớn nhất và nhỏ nhất thì gọi là các mặt cắt chính. Theo [2]:

Độ cong tại điểm đang gia công M là :

$$K = \frac{1}{\rho} = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}\right)^2 + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \quad (18)$$

Hai bán kính cong chính được cho bởi 2 biểu thức sau:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{GL - 2FM - EN}{EG - F^2} \quad (19)$$

$$\frac{1}{\rho_1}.\frac{1}{\rho_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (20)$$

Trong 2 bán kính cong $\rho_1$, $\rho_2$ sẽ có một giá trị cực đại và một giá trị cực tiểu. Cần xác định cực trị của các bán kính cong trong (19) và (20) và chú ý đến giá trị nhỏ nhất $\rho_{min}$:

Nếu $\rho_{min}>0$ bề mặt không thể bị cắt lẹm dù dao có bán kính to bất kỳ, điều này chỉ xẩn ra khi biên dạng lồi

Nếu $\rho_{min}<0$, điều kiện không bị cắt lẹm là bán kính cong $R_0$ ở mọi vị trí gia công là:

$$R_0 <= |\rho_{min}|$$

Các đại lượng trong (18), (19) và (20) được tính như sau:

$$E = R_u R_u \qquad F = R_u R_v \qquad G = R_v R_v$$

$$L = \frac{R_{uu} \times R_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad M = \frac{R_u \times R_{uv} . R_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \frac{R_u R_v \times R_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Trong đó:

$$R_u = \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial y}{\partial u} \quad \frac{\partial y}{\partial u} \right]^T \qquad R_v = \left[ \frac{\partial x}{\partial v} \quad \frac{\partial y}{\partial v} \quad \frac{\partial y}{\partial v} \right]^T$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u}.\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2$$

Để gọn hơn, đặt :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Thì các đại lượng trên có thể viết lại như sau:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$M = \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{21}$$

$$L = \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{22}$$

$$N = \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{23}$$

**4.2/. Xác định bán kính dụng cụ $R_0$ để tránh cắt lẹm chi tiết khi gia công:**

Theo [1] thì các bán kính cong chính $\rho_1$, $\rho_2$ cũng là nghiệm của phương trình bậc 2 sau đây:

$(LN\text{-}M2)\,\rho^2 + (EN\text{-}2FM\text{+}GL)\,\rho + (EG\text{-}F2)=0$ (24)

Điều kiện khả nghiệm của phương trình (24) là:

$\Delta=(EN\text{-}2FM\text{+}GL)^2\text{-}4(LN\text{-}M2)\,(EG\text{-}F2)$

$= (EN\text{-}2FM\text{+}GL)^2\text{+}4(M2\text{-}LN)\,(EG\text{-}F2)\geq 0$

Vì $EG\text{-}F^2=A^2+ B^2+ C^2>0$ nên $\Delta$ chắc chắn dương khi $M^2\text{-}LN\geq 0$

Lúc đó để tránh cắt lẹm thì ở mọi vị trí gia công, ta phải chọn bán kính dao hình cầu $R_0$ thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$R_0 \leq \min\left(\frac{-(EN-2FM+GL) \pm \sqrt{(EN-2FM+GL)^2 + 4(M^2-LN)(EG-F\ )}}{2(LN-M^2)}\right) \tag{25}$$

## 5. KẾT LUẬN:

Bài báo này khảo sát vị trí tướng đối của điểm gia công M và tâm dụng cụ cắt A khi gia công một mặt phức tạp không gian bằng dao hình cầu có bán kính $R_0$, và cũng suy diễn đến trường hợp đặc biệt khi gia công đường cong phẳng với dao trụ có bán kính $R_0$.

Các công thức được cho dưới dạng giải tich thích hợp cho việc điều khiển trên máy CNC cũng như viết chương chương trình mô phỏng, một số công thức, như (17) được kiểm chứng qua mô hình gia công cam phẳng đã được nghiệm thu thành công.

# KINEMATICS OF FORMATION OF SPATIAL PROFILE IN MACHINING

**Le Khanh Dien**
University of Technology – VNU-HCM
*(Received 14 March 2002, Revised 01 April 2002)*

**ABSTRACT:** This paper presents some essential elements in manufacturing the general complicated profile of metal workpiece when machining by spherule end milling cutting tool as:

- Determination of coordinate of center point of spherule end milling cutting tool when machining a general given profile.
- Determination of suitable radius of cutting tool.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bùi Song Cầu, *Giáo trình Cao học Cơ khí "Nguyên lý tạo hình"* ĐHBK, 2000

[2] Murray R. Spiegel , *Advanced Calculus* Mc Graw Hill 1993

[3] Hutte- Mannuel de l'Inginieur , *Paris et Liège Librairie* Polytechnique Ch. Béranger 1992

[4] Jan J. Tuma & Ronald A. *Walsh Engineering Mathematics* Handbook Mc Graw Hill 1998

[5] Hans B. Kief & T. Frederick *Waters Glencoe* Mc Graw Hill 1992

[6]Darren Redfern &Colin Campbell *The Matlab 5 Handbook* Spinger 1998