NGHIỆM CHỈNH HÓA CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TRONG TRỌNG LỰC HỌC

Đinh Ngọc Thanh – Chu Văn Thọ
Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM – Đại học Y Dược TP.HCM
(Bài nhận ngày 07 tháng 5 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 07 tháng 6 năm 2002)

TÓM TẮT: *Chúng tôi xét bài toán xác định tỉ trọng tương đối* ρ *của một vật thể bên trong trái đất khi biết dị thường trọng lực tạo bởi vật thể đó trên bề mặt. Gọi tỉ trọng của vật thể là* ρ_1 *và tỉ trọng của môi trường xung quanh là* ρ_2*, tỉ trọng tương đối của vật thể là* $\rho = \rho_1 - \rho_2$.

Coi trái đất được biểu thị bởi nửa mặt phẳng (x; z) với $-\infty < z \le H$, $H > 0$. *Vật thể* Ω *được biểu thị bởi :* $\Omega = \{ (x; z) : 0 < x < 1 ; 0 < z < \sigma(x) \}$
trong đó $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *là hàm có đạo hàm liên tục từng mảnh thỏa :*

$$\begin{cases} 0 < \sigma(x) \le \alpha < H \\ 0 \le \sigma(0) \le \alpha \qquad \text{với } 0 < x < 1 ;\ \alpha > 0. \\ 0 \le \sigma(1) \le \alpha \end{cases}$$

Trong trường hợp tổng quát, với $\rho = \rho(\xi,\zeta), (\xi,\zeta) \in \Omega$, *bài toán xác định tỉ trọng tương đối của vật thể khi biết dị thường trọng lực trên bề mặt không có nghiệm duy nhất. Trong trường hợp* $\rho = \rho(\xi,\zeta) = \rho(\xi), (\xi,\zeta) \in \Omega$, *bài toán trên có nghiệm duy nhất. Khi đó* ρ *thoả một phương trình tích phân phi tuyến loại một. Trong trường hợp* $\sigma(x) = h, \forall x \in [0,1], 0 < h < H$, *phương trình tích phân phi tuyến được đưa về phương trình tích chập. Nghiệm của phương trình tích chập được chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov.*

I - Giới thiệu:

Xác định tỉ trọng tương đối của một vật thể bên trong trái đất là bài toán ứng dụng căn bản của vật lý địa cầu. Các phương pháp của trọng lực học được dùng để giải quyết bài toán này. Các phương pháp này bao gồm các đo đạc về dị thường trọng lực được tạo ra trên bề mặt bởi sự khác nhau về tỉ trọng.

Bài toán xác định tỉ trọng tương đối khi biết vật thể và dị thượng trọng lực trên bề mặt cũng được xem xét trong [6]. Về vấn đề chỉnh hoá nghiệm, trong [6] các tác giả đã xấp xỉ phương trình tích phân phi tuyến với phương trình moment tuyến tính và sau đó chỉnh hoá nghiệm của phương trình moment tuyến tính. Các bài toán liên quan đến vấn đề của bài báo này được đề cập trong [1],[2],[3],[4],[5],[7],[8].

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán 2 chiều và dùng gradient trọng lực trên bề mặt z = H, H > 0.

Coi trái đất được biểu thị bởi nửa mặt phẳng (x; z) với $-\infty < z \le H$, $H > 0$. Vật thể Ω được biểu thị bởi : $\Omega = \{ (x; z) : 0 < x < 1 ; 0 < z < \sigma(x) \}$,

trong đó $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm liên tục từng mảnh thỏa :

$$\begin{cases} 0 < \sigma(x) \le \alpha < H \\ 0 \le \sigma(0) \le \alpha & \text{với } 0 < x < 1 \text{ ; } \alpha > 0. \\ 0 \le \sigma(1) \le \alpha \end{cases}$$

Phần chứng minh bài toán không có nghiệm duy nhất trong trường hợp tổng quát được trình bày ở phần II. Trường hợp $\rho = \rho(\xi,\zeta) = \rho(\xi),(\xi,\zeta) \in \Omega$, việc thành lập phương trình phi tuyến, chứng minh nghiệm duy nhất được trình bày ở phần III và IV. Trường hợp $\sigma(x) = h, \forall x \in [0,1], 0 < h < H$, phương trình tích phân phi tuyến được đưa về phương trình tích chập và nghiệm của phương trình tích chập được chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov được trình bày trong phần V, bằng hai định lý 2 và 3.

II - Chứng minh bài toán xác định tỉ trọng tương đối khi biết dị thường trọng lực trên bề mặt không có nghiệm duy nhất trong trường hợp tổng quát:

Coi trái đất được biểu thị bởi nửa mặt phẳng (x; z) với $-\infty < z \le H$, $H > 0$. Gọi vật thể D là một miền bất kỳ (x,z) với z < H. Gọi $\rho(\xi,\zeta)$ là tỉ trọng tương đối của D.

Ký hiệu U = U(x, z) là thế trọng lực được tạo ra bởi D. Ta có :

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_D \rho(\xi,\zeta)\ell n[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]dv$$

Dị thường trọng lực được tạo ra bởi D là:

$$-\frac{\partial U}{\partial z}(x,z) = \frac{1}{\pi}\int_D \rho(\xi,\zeta)\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\,dv$$

Gradient trọng lực được tạo ra bởi D là:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,z) = \frac{1}{\pi}\int_D \rho(\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\right)dv$$

Suy ra gradient trọng lực được tạo ra bởi D trên mặt z = H là:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,H) = \frac{1}{\pi}\int_D \rho(\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\right)_{z=H}dv$$

Gọi $f_0(x)$ là gradient trọng lực được tạo ra bởi Ω trên bề mặt z = H.

Ta có phương trình :

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,H) = \frac{1}{\pi}\int_D \rho(\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}\right)_{z=H}dv = f_0(x).$$

Ta chứng minh phương trình trên không có nghiệm duy nhất.

Ta chỉ cần chứng minh tồn tại một $\rho(\xi,\zeta) \neq 0$ trên D sao cho :

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,z) = 0 \text{ với mọi } z \ge H.$$

Xét $\Omega' = \{(x,z) : a < x < a', b < z < b'\}$ với a < a', b < b' sao cho $\Omega' \subset D$.

Đặt $$f(\xi,\zeta) = \begin{cases} 0, (\xi,\zeta) \in D \setminus \Omega' \\ e^{\frac{-1}{(\xi-a)(\zeta-b)(a'-\xi)(b'-\zeta)}}, (\xi,\zeta) \in \Omega' \end{cases}$$

Ta có $f \in C^2(D)$, $\Delta f = 0$ trên D\Ω', $\Delta f \neq 0$ trên Ω'.

Đặt $G(x,z,\xi,\zeta) = \ln((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)$ với $(\xi,\zeta) \in D, (x,z) \notin D$,

và $\rho(\xi,\zeta) = \Delta f(\xi,\zeta)$ với $(\xi,\zeta) \in D$.

Ta có $\rho(\xi,\zeta) = 0$ trên D\Ω' và $\rho(\xi,\zeta) \neq 0$ trên Ω'.

Áp dụng định lý Green thứ 2 trên Ω' ta có:

$$\int_{\Omega'} \rho(\xi,\zeta)\ln((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)dv = \int_{\Omega'} \Delta f(\xi,\zeta) G(x,z,\xi,\zeta)dv = \int_{\Omega'} f(\xi,\zeta)\Delta G(x,z,\xi,\zeta)dv +$$

$$+ \int_{\partial\Omega'} \left(\frac{\partial f}{\partial n}(\xi,\zeta)G(x,z,\xi,\zeta) - f(\xi,\zeta)\frac{\partial G}{\partial n}(x,z,\xi,\zeta)\right)ds \quad \text{với } (x,z) \notin D.$$

Do $\Delta G(x,z,\xi,\zeta) = 0, \forall (x,z) \notin D; f(\xi,\zeta) = 0; \frac{\partial f}{\partial n}(\xi,\zeta) = 0, \forall (\xi,\zeta) \in \partial\Omega'$

nên ta có: $\int_{\Omega'} \rho(\xi,\zeta)\ln((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)dv = 0$ với mọi $(x,z) \notin D$.

Mặt khác do $\rho(\xi,\zeta) = 0$ trên D\Ω' nên:

$$\int_D \rho(\xi,\zeta)\ln((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)dv = 0 \quad \text{với mọi } (x,z) \notin D.$$

Suy ra tồn tại một $\rho(\xi,\zeta) \neq 0$ trên D sao cho: $-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,z) = 0$ với mọi $z \geq H$.

Điều này chứng tỏ bài toán xác định tỉ tọng tương đối của một vật thể D bất kỳ khi biết dị thường trọng lực trên bề mặt không có nghiệm duy nhất trong trường hợp tổng quát.

III - Thành lập phương trình tích phân phi tuyến trong trường hợp:

$$\rho = \rho(\xi,\zeta) = \rho(\xi), (\xi,\zeta) \in \Omega.$$

Ký hiệu U = U(x, z) là thế trọng lực được tạo ra bởi Ω. Ta có:

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \rho(\xi)\ell n[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]dv$$

Dị thường trọng lực được tạo ra bởi Ω là:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \rho(\xi)\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}\,dv \quad (2)$$

Gradient trọng lực được tạo ra bởi là:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}\right)dv$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{\sigma(\xi)} \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}\right)d\xi d\zeta$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\int_0^1 \rho(\xi)\frac{z-\sigma(\xi)}{(x-\xi)^2 + (z-\sigma(\xi))^2}d\zeta - \int_0^1 \rho(\xi)\frac{z}{(x-\xi)^2 + z^2}d\xi\right]$$

Suy ra gradient trọng lực được tạo ra bởi Ω trên mặt z = H là:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(x,H) = -\frac{1}{\pi}[\int_0^1 \rho(\xi)\frac{H-\sigma(\xi)}{(x-\xi)^2+(H-\sigma(\xi))^2}d\xi - \int_0^1 \rho(\xi)\frac{H}{(x-\xi)^2+H^2}d\xi]$$

Gọi $f_o(x)$ là gradient trọng lực được tạo ra bởi Ω trên bề mặt z = H.
Ta có phương trình :

$$\int_0^1 \rho(\xi)\frac{H-\sigma(\xi)}{(x-\xi)^2+(H-\sigma(\xi))^2}d\xi - \int_0^1 \rho(\xi)\frac{H}{(x-\xi)^2+H^2}d\xi = f(x) \qquad (*)$$

trong đó $f(x) = -\ \pi f_o(x)$.

IV - Chứng minh phương trình (*) có nghiệm duy nhất :

Định lý 1 :

Phương trình (*) nhận nhiều lắm là một nghiệm $\rho = \rho(x)$ với $0 < x < 1$.

Chứng minh :

Gọi ρ_1, ρ_2 là 2 nghiệm của (*).

Suy ra : $$\int_0^1 \frac{(H-\sigma(\xi))(\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))}{(x-\xi)^2+(H-\sigma(\xi))^2}d\xi - \int_0^1 \frac{H(\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))}{(x-\xi)^2+H^2}d\xi = 0.$$

Đặt $F(x,z) = \int_\Omega (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\ell n[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]dv$.

- <u>Chứng minh F(x, z) = const trên $\mathbb{R}^2$</u> :

Ta có : $$\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = -\int_\Omega (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\frac{\partial}{\partial \zeta}[\ell n((x-\xi)^2+(z-\zeta)^2)]dv$$

$$= -\int_0^1 (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\ell n((x-\xi)^2+(z-\sigma(\xi))^2)d\xi + \int_0^1 (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\ell n((x-\xi)^2+z^2)d\xi$$

$$= \int_0^1 (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\ell n\frac{(x-\xi)^2+z^2}{(x-\xi)^2+(z-\sigma(\xi))^2}d\xi$$

Do đó : $$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,z) = -\int_0^1 (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\frac{2(z-\sigma(\xi))}{(x-\xi)^2+(z-\sigma(\xi))^2)}d\xi$$

$$+ \int_0^1 (\rho_1(\xi)-\rho_2(\xi))\frac{2z}{(x-\xi)^2+z^2}d\xi.$$

Mặt khác do ρ_1, ρ_2 là 2 nghiệm của (*) nên ta có : $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,H) = 0$.

* Chứng minh : $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ với $z \geq H$:

Ta có : $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,z)$ là hàm điều hoà trên $R^2 \setminus \partial\Omega$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,z) \to 0$ khi $z \to \infty$ và $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,H) = 0, \forall x$. Suy ra $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,z) = 0, \forall z \geq H, \forall x$ và $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = \lambda(x), \forall z \geq H, \forall x$.

Do $\frac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ điều hòa trên $IR^2 \setminus \partial\Omega$ nên $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)(x,z) = \lambda''(x) = 0, \forall z \geq H, \forall x$.

Suy ra $\lambda(x)$ tuyến tính theo x. Do $\lim_{x\to\infty}\lambda(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\partial F}{\partial z}(x, z) = 0$ nên $\lambda(x) \equiv 0$.

Vậy $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0, \forall z \geq H, \forall x$.

* Chứng minh $F(x, z) = const$ $\forall z \geq H, \forall x$:

Do $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0, \forall z \geq H, \forall x$ nên $F(x, z) = \gamma(x)$ $\forall z \geq H$. Do $F(x, z)$ điều hòa nên $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,z) = \gamma''(x) = 0$ $\forall z \geq H$. Suy ra $\gamma(x)$ tuyến tính theo x.

Mặt khác $\frac{\gamma(x)}{\ln(x^2+z^2)} = \frac{F(x,z)}{\ln(x^2+z^2)}$ có giới hạn hữu hạn khi $x \to \infty$ nên $\gamma(x)$ là hằng.

* Chứng minh $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên $\partial\Omega$:

Ta có $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z)$ là hàm điều hòa trên $IR^2 \setminus \partial\Omega$ nên khi $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ thì $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z)$ trên thành phần liên thông không bị chặn K của $IR^2 \setminus \partial\Omega$. Do $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z)$ liên tục trên IR^2 nên $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên ∂K. Suy ra $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên $\partial\Omega \subset \partial K$.

* Chứng minh $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên IR^2

Gọi ω là thành phần liên thông bị chặn của $IR^2 \setminus \partial\Omega$. Do $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên $\partial\Omega$ nên $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên $\partial\omega$. Do nguyên lý cực đại của hàm điều hoà nên $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên ω.

Suy ra: $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 0$ trên IR^2. Suy ra $\delta(x)$ trên IR^2. Suy ra $\gamma(x) = \delta(x) =$ hằng $\forall$ x.

* Chứng minh $\rho_1 \equiv \rho_2$ trên Ω :

Ta có : $F(x, z) = \int_{IR^2}(\rho_1(\xi) - \rho_2(\xi))1_\Omega(\xi,\zeta)\ell n[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]d\xi d\zeta$. Do tính chất Dirichlet ta có $\Delta F(x, z) = 4\pi(\rho_1(x) - \rho_2(x))1_\Omega(x, z)$. Do $F(x, z) =$ hằng trên IR^2 nên $\Delta F = 0$ trên IR^2

Suy ra $(\rho_1(x) - \rho_2(x))1_\Omega(x, z) = 0$ trên IR^2. Suy ra $\rho_1 \equiv \rho_2$ trên Ω.

Định lý 1 đã được chứng minh.

V – Chỉnh hoá nghiệm của phương trình (*) trong trường hợp :

$$\sigma(x) = h, \forall x \in [0,1], 0 < h < H$$

Khi đó phương trình (*) trở thành phương trình :

$$\int_0^1 \rho(\xi)\frac{H-h}{(x-\xi)^2 + (H-h)^2}d\xi - \int_0^1 \rho(\xi)\frac{H}{(x-\xi)^2 + H^2}d\xi = f(x) \qquad (1)$$

Đặt $P(x) = \dfrac{H-h}{x^2 + (H-h)^2}$

$$Q(x) = \frac{H}{x^2 + H^2}$$

$$v(x) = \begin{cases} \rho(x) & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x < 0 \vee x > 1) \end{cases}$$

Phương trình (1) thành :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi)v(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) \qquad (1')$$

trong đó $G(x) = P(x) - Q(x)$.

Đổi phương trình (1') thành phương trình tích chập :

$$(G * v)(x) = F(x) \qquad \text{với } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \hat{G}(t)\,.\,\hat{v}(t) = \hat{F}(t) \qquad (t \quad \mathrm{IR}) \qquad (2)$$

Ta có : $\hat{g}(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-k|t|}$ nếu $g(x) = \dfrac{k}{x^2 + k^2}$

Suy ra : $\hat{G}(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \left(e^{-(H-h)|t|} - e^{-H|t|} \right) \quad (t \quad \mathrm{IR})$

*** Định lý2 :**

Giả sử nghiệm chính xác của phương trình (2) là v_o H^1 (IR) (ứng với F_o ở vế phải của (2)) và $|F - F_o|_2 < \varepsilon$ ($|.|_2$ là chuẩn trong L^2 (R)).

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của phương trình (2) sao cho:

$$|v_\varepsilon - v_o|_2^2 < k\left(\ell n\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \right)^{-2} + p(\varepsilon) \ \ khi \ \ \varepsilon \to 0$$

trong đó k là hằng số chỉ phụ thuộc $|v_o|_{H^1(IR)}$; α hằng số; $p(\varepsilon)$ chỉ phụ thuộc vào F, v_o và $p(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$.

Chứng minh :

Giả sử nghiệm chính xác v_o của phương trình (2), ứng với F_o ởvế phải, thuộc H^1 (IR)

Ta có : $\hat{G}(t)\,.\,\hat{v}_o(t) = \hat{F}_o(t)$ (3)

Gọi F L^2 (IR) sao cho $|F - F_o|_2 < \varepsilon$

Với $\beta > 0$ đặt

$$\psi_\beta(t) = \frac{\hat{G}(t)}{\beta + \hat{G}^2(t)} \hat{F}(t) \qquad (4)$$

Ta có : $\left|\psi_\beta(t)\right| \le \dfrac{1}{2\sqrt{\beta}} \left|\hat{F}(t)\right| \Rightarrow \psi_\beta \quad L^2$ (IR) (5)

Do đó tồn tại $\begin{cases} v_\beta(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\beta(t) e^{itx} dt \\ v_\beta \in L^2(R) \\ \hat{v}_\beta = \psi_\beta \end{cases}$

Do (4), (5) ta có v_β phụ thuộc liên tục vào F và thỏa phương trình :

$$\beta.\hat{v}_\beta(t) + \hat{G}^2(t)\,\hat{v}_\beta(t) = \hat{G}(t)\,\hat{F}(t) \tag{6}$$

Từ (3) và (6) suy ra:

$$\beta(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)) + \hat{G}^2(t)(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)) = -\beta\,\hat{v}_o(t) + \hat{G}(t)(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t)) \tag{7}$$

Nhân 2 vế của (7) với $\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}$ ta có : $\beta|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)|^2 + \hat{G}^2(t)|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)|^2$

$$= -\beta\,\hat{v}_o(t)(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}) + \hat{G}(t)(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t))(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}) \tag{8}$$

Tích phân 2 vế của (8) ta có : $\beta\left|\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right|_2^2 + \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 =$

$$= -\beta\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}_o(t)\overline{\left(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right)}dt + \int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(t)\left(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t)\right)\overline{\left(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right)}dt \tag{9}$$

$$\le \beta\left|\hat{v}_o\right|_2.\left|\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right|_2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|\hat{F} - \hat{F}_o\right|_2.\left|\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right|_2 \tag{10}$$

Cho $\beta = \in$, ta có : $$\varepsilon\left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2^2 + \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 \le \varepsilon\left(\left|\hat{v}_o\right|_2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2 \tag{11}$$

Suy ra : $$\begin{cases} \left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2 \le \left|\hat{v}_o\right|_2 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 \le \varepsilon\left(\left|\hat{v}_o\right|_2 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)^2 \end{cases} \tag{12}$$

Nhân 2 vế của (7) với $t^2\overline{\left(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right)}$ ta có :

$$\beta.t^2.|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)|^2 + \hat{G}^2(t).|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)|^2.t^2 =$$

$$= -\beta\,\hat{v}_o(t)(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}).t^2 + \hat{G}(t)(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t))(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}).t^2 \tag{13}$$

Lấy tích phân 2 vế của (13) ta có : $\beta\left|t\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 + \left|\hat{G}t\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 =$

$$= -\beta\int_{-\infty}^{\infty}\left[t\,\hat{v}_o(t)\right]\left[t\overline{\left(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right)}\right]dt + \int_{-\infty}^{\infty}t\hat{G}(t)\left(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t)\right)\left[\overline{\left(\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right)}.t\right]dt \tag{14}$$

Từ (14) suy ra:

$$\beta\left|t\left(\hat{v}_\beta-\hat{v}_o\right)\right|_2^2+\left|\hat{G}t\left(\hat{v}_\beta-\hat{v}_o\right)\right|_2^2 \le$$

$$\beta\left|t\hat{v}_o\right|_2.\left|t\left(\hat{v}_\beta-\hat{v}_o\right)\right|_2+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{H-h}+\frac{1}{H}\right)\left|F-F_o\right|_2\left|t\left(\hat{v}_\beta-\hat{v}_o\right)\right|_2$$

Cho $\beta = \varepsilon$ ta suy ra : $\left|t\left(\hat{v}_\varepsilon-\hat{v}_o\right)\right|_2 \le \left|t\hat{v}_o\right|_2+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{H-h}+\frac{1}{H}\right)$ (15)

Gọi $A=\max\left\{\left|\hat{v}_o\right|_2+\sqrt{\frac{\pi}{2}};\left|t\hat{v}_o\right|_2+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{H-h}+\frac{1}{H}\right)\right\}$

Ta có : $\hat{G}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-(H-h)|t|}-e^{-H|t|}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Do $\hat{G}(t)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên ta chỉ cần xét $t \ge 0$.

Ta có: $\hat{G}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-(H-h)r}-e^{-Ht}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.e^{-Hr}.(e^{ht}-1)$

$$\hat{G}'(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-He^{-Ht}(e^{ht}-1)+e^{-Ht}he^{ht}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-Ht}\left(H-(H-h).e^{ht}\right)$$

$$\hat{G}'(t)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{H}{H-h}\ge e^{ht} \Leftrightarrow 0<t\le\frac{1}{h}\ell n\left(\frac{H.}{H-h}\right)$$

Đặt $t_*=\frac{1}{h}\ell n\left(\frac{H}{H-h}\right)$. Ta có $t_*>0$

t	0	t'_o	t_*	t_o	$+\infty$
$\hat{G}'(t)$		$+$	0	$-$	
$\hat{G}(t)$	0 $\nearrow$	$\hat{G}(t'_o)$	$\hat{G}(t_*)$	$\hat{G}(t_o)$	$\searrow$ 0

Lấy $t_o>0$ sao cho $t_o>t_*$

Ứng với t_o ta có duy nhất $0<t'_o<t_*$ sao cho $\hat{G}(t_o)=\hat{G}(t'_o)$

Ta có : $\displaystyle\int_{t'_o\le|t|\le t_o}\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt \le \int_{t'_o\le|t|\le t_o}\frac{\hat{G}^2(t)}{\hat{G}^2(t_o)}\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt$

$$\le\frac{1}{\hat{G}^2t}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(t)\left|\left(\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right)\right|^2dt\le\frac{\varepsilon A^2}{\hat{G}^2t}$$

Ta có $\displaystyle\int_{|t|\ge t_o}\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt\le\int_{|t|\ge t_o}\frac{t^2}{t_o^2}\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt\le\frac{1}{t_o^2}\int_{\mathbb{R}}t^2\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt\le\frac{A^2}{t_o^2}$

Ta có : $\displaystyle\int_{|H|\le t'_o}\left|\hat{v}_\varepsilon(t)-\hat{v}_o(t)\right|^2dt\to 0$ khi $t'_o\to 0$

Thực vậy, với dãy $(\alpha_n)_{n\in N},\alpha_n>0,\alpha_n\to 0$ đặt :

$$f_n(t) = X_{[-\alpha_n,\alpha_n]}(t).f(t) \qquad \text{với} \quad \begin{cases} f(t) = \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 \geq 0 \\ f \in L^1(|R) \end{cases}$$

Ta có : $\begin{cases} f_n(t) \to 0 & n \to \infty (t \in R) \\ |f_n(t)| \leq f(t) & \forall n \in N (t \in R) \end{cases}$

Theo định lý hội tụ bị chặn ta có : $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt \to 0$ khi $n \to \infty$.

Suy ra $\int_{|t|<\alpha_n} f(t)dt \to 0$ khi $n \to \infty$.

Với mỗi $\varepsilon > 0$ khá bé, xét phương trình : $\frac{A^2}{t^2} = \frac{\varepsilon A^2}{\hat{G}^2(t)} \Leftrightarrow \frac{t}{\hat{G}(t)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ $(t > t_*)$

Do hàm số $\frac{t}{\hat{G}(t)}$ là hàm tăng khi $t > t_*$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ khá bé tồn tại duy nhất $t_\varepsilon > t_*$ sao cho $\frac{t_\varepsilon}{\hat{G}(t_\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ và $t_\varepsilon \to +\infty$ khi $\varepsilon \to 0$

Tương ứng với t_ε là $t'_\varepsilon < t_*$ sao cho $\hat{G}(t'_\varepsilon) = \hat{G}(t_\varepsilon)$ và $t'_\varepsilon \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$

Khi đó với $t_o = t_\varepsilon$, ta có :

$$\int_{|R} \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt \leq \frac{\varepsilon A^2}{\hat{G}^2(t_\varepsilon)} + \frac{A^2}{t_o^2} + \int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt \leq \frac{2A^2}{t_\varepsilon^2} + \int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt$$

Tacó:

$$\frac{t_\varepsilon}{\hat{G}(t_\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \ell n t_\varepsilon - \ell n \hat{G}(t_\varepsilon) = \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \Rightarrow t_\varepsilon + Ht_\varepsilon - \ell n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{ht_\varepsilon} - 1\right) > \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \qquad (t_\varepsilon > \ell n t_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow t_\varepsilon(1+H) > \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{ht_*} - 1\right)\right) \Rightarrow t_\varepsilon > \frac{1}{H+1}\ell n\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{ht_*} - 1\right)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2A^2}{t_\varepsilon^2} < \frac{2A^2(H+1)^2}{\left(\ln\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{ht_*} - 1\right)}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2} = \frac{8A^2(H+1)^2}{\left(\ell n\frac{\frac{\pi}{2}\left(e^{ht_*} - 1\right)^2}{\varepsilon}\right)}$$

Suy ra : $\left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2^2 < k\left(\ell n\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{-2} + \int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt$

Với $k = 8A^2(H+1)^2$ và $\alpha = \frac{\pi}{2}(e^{ht_*} - 1)^2$

Ta có : $\int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\hat{v}_\varepsilon(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt = \int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\frac{\hat{G}(t)}{\varepsilon + \hat{G}^2(t)}\hat{F}(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt$

Đặt $p(\varepsilon) = \int_{|t|<t'_\varepsilon} \left|\frac{\hat{G}(t)}{\varepsilon + \hat{G}^2(t)}\hat{F}(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 dt$. Ta có $p(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$

Suy ra : $|v_\epsilon - v_0|_2^2 = \left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2^2 < k\left(\ell n\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right)^{-2} + p(\varepsilon)$ khi $\varepsilon \to 0$.

Định lý 2 đã được chứng minh.

* **Định lý 3:**

Trong giả thiết của định lý 1, nếu có thêm điều kiện :

$$e^{H|t|}(e^{h|t|} - 1)^{-1}\hat{v}_o(t) \quad L^2(|R)$$

thì tồn tại nghiệm của chỉnh hóa v_ε sao cho $|v_\varepsilon - v_o|_2 < M.\sqrt{\varepsilon}$, với M là hằng số chỉ phụ thuộc v_o.

Chứng minh :

Nhân 2 vế của (7) với $\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}$, ta có : $\beta\left|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 + \hat{G}^2(t)\left|\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)\right|^2 =$

$$= -\beta\hat{G}(t)\left(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{H|t|}(e^{h|t|} - 1)^{-1}\hat{v}_o(t) + \hat{G}(t)\left(\hat{F}(t) - \hat{F}_o(t)\right)\left(\overline{\hat{v}_\beta(t) - \hat{v}_o(t)}\right) \quad (16)$$

Tích phân 2 vế của (16) ta có :

$$\beta\left|\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right|_2^2 + \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\beta\left|\hat{G}\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2\left|e^{H|t|}\left(e^{h|t|} - 1\right)^{-1}\hat{v}_o\right|_2 + \left|\hat{F} - \hat{F}_o\right|_2.\left|\hat{G}\left(\hat{v}_\beta - \hat{v}_o\right)\right|_2$$

Cho $\beta = \varepsilon$ ta suy ra :

$$\varepsilon\left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2^2 + \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2^2 \le \varepsilon\left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2 \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|e^{H|t|}\left(e^{h|t|} - 1\right)\hat{v}_o\right|_2 + 1\right)}_{=M}$$

Suy ra : $\begin{cases} \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2 \le \varepsilon.M \\ \left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2^2 \le \left|\hat{G}\left(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right)\right|_2.M \end{cases}$

Do đó : $|v_\epsilon - v_0|_2 = \left|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_o\right|_2 \le \sqrt{\varepsilon}.M$

Định lý 3 đã được chứng minh.

REGULARIZED SOLUTIONS OF AN INTEGRAL EQUATION OF GRAVIMETRY

Dinh Ngoc Thanh, Chu Van Tho

ABSTRACT: We consider the problem of determining the relative density ρ of a body in the interior of the earth from surface gravity anomalies created by this body. Let ρ_1 be the mass density and ρ_2 be the density of the surrounding medium, the relative density of the body is $\rho = \rho_1 - \rho_2$. The earth is represented by a half-space (x,z), $-\infty < z \le H$, $H > 0$. The body Ω is represented by $\Omega = \{ (x; z) : 0 < x < 1 ; 0 < z < \sigma(x) \}$
where $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is piecewise C^1 function such that

$$\begin{cases} 0 < \sigma(x) \le \alpha < H \\ 0 \le \sigma(0) \le \alpha \qquad \text{với } 0 < x < 1 \text{ ; } \alpha > 0. \\ 0 \le \sigma(1) \le \alpha \end{cases}$$

In general, with $\rho = \rho(\xi,\zeta), (\xi,\zeta) \in \Omega$, the problem of determining the relative density ρ of a body in the interior of the earth from surface gravity anomalies is no uniqueness. In the case of $\rho = \rho(\xi,\zeta) = \rho(\xi), (\xi,\zeta) \in \Omega$, the above problem admits at most one solution. Then ρ satisfies a nonlinear integral equation of the first kind. In the case of $\sigma(x) = h, \forall x \in [0,1], 0 < h < H$, the nonlinear integral equation is changed to the convolution equation. The solution of the convolution equation is regularized by the Tikhonov method.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D.D.Ang, R.Gorenflo and L.K.Vy, A uniqueness theorem for nonlinear integral equation of gravimetry. *Proceedings Of The First World Congress Of Nonlinear Analyst (Tampa, Florida,August 19-26, 1992), Walter De Gruyter Publishers (1996) pp.2423-2430.*

[2] D.D.Ang, R. Gorenflo and L.K.Vy, Regularization of a non-linear integral equation of gravimetry. *J.Inv. Ill-posed Problems, Vol.5, No. 2 (1997), pp 101-116.*

[3] D.D.Ang,R.Gorenflo and D.N.Thanh, Determination of Shape and Mass Density from Gravity Anomaly Measurements:Some Uniqueness Results. *Serie A Mathematik, Preprint A 14-97.*

[4] D.D.Ang, D.N.Thanh and V.V.Thanh, Identification of mass inhomogeneity from surface gravity anomalies. *Geophysis. J. Int (2000) 143, 495-498.*

[5] D.D. Ang, D.N. Thanh and V.V. Thanh, Regularized Solutions of A Cauchy Problem for The Laplace Equation in an Irregular Strip. *Journal Of Integral Equations And Applications,volume 5, number 4,Fall(1993).*

[6] D.D.Ang and V.V.Thanh, A regularized solution of an inverse problem of gravimetry.*Proceedings Of The International Workshop On Numerical Analysis And Applications,HoChiMinh City,(1995),pp.11-14.*

[7] A.N.Tikhonov & V.Y.Aresenin, Solutions of Ill– posed Problems.*Winston, WA,(1977).*

[8] W.Torge. Gravimetry. *Walter De Gruyter, Utrecht, The Netherlands,(1989).*