XẤP XỈ ỔN ĐỊNH LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRONG NỬA KHÔNG GIAN TRÊN

Nguyễn Công Tâm
Khoa Toán - Tin học, Đại học Khoa học Tự Nhiên – ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 11 tháng 9 năm 2002)

TÓM TẮT: *Bài toán tìm lời giải của phương trình Poisson trong nửa không gian trên với dữ kiện Cauchy cho trước trên dĩa đơn vị được đưa về một phương trình tích phân loại một. Phương trình nầy được chính quy hóa bởi phương pháp Tikhonov với đánh giá sai số cũng được cho.*

1. Mở đầu

Chúng tôi xét phương trình Poisson trong nửa không gian trên sau đây:

(1.1) $$\Delta u = f\ ,\ (x,y,z)\in R_+^3 = \left\{(x,y,z)\in R^3\ ,\ z>0\right\},$$

với dữ kiện Cauchy được cho trước trên đĩa đơn vị

(1.2) $$\begin{cases} u(x,y,0) = u_0(x,y), \\ u_z(x,y,0) = u_1(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y)\in\Omega \equiv \{(x,y): x^2+y^2<1\},$$

trong đó f và u_0, u_1 cho trước lần lượt trong R_+^n và trong Ω. Hàm chưa biết $u = u(x,y,z)$ ràng buộc thêm các điều kiện:

(1.3) $u\in C^2(R_+^3)\cap C(\overline{R_+^3})$, $u_z \in C(\overline{R_+^3})$, với $\overline{R_+^3} = \{(x,y,z)\in R^3\ ,\ z\geq 0\}$,

(1.4) u chính qui ở vô cùng, nghĩa là:

(i) $\lim\limits_{R\to+\infty}[\sup\{|u(x,y,z)| : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z>0\}] = 0$,

(ii) tồn tại một hằng số $A>0$ sao cho

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right| \leq \frac{A}{x^2+y^2+z^2} \text{ với } x^2+y^2+z^2 \text{ đủ lớn.}$$

Đây là bài toán thường gặp trong vật lý địa cầu [6] mà như ta đã biết đó là bài toán không chỉnh theo nghĩa Hadamard [3, 4, 6]. Ta biết rằng bài toán Neumann cho phương trình Poisson là bài toán đặt đúng theo nghĩa cổ điển [5-7], do đó với dữ kiện Cauchy (1.2) cho trước trên đĩa đơn vị nếu chúng ta xác định được

(1.5) $$v(x,y) = u_z(x,y,0),\quad (x,y)\in Q \equiv R^2\setminus\Omega = \{(x,y): x^2+y^2\geq 1\}$$

thì ta sẽ giải được phương trình Poisson (1.1) với dữ kiện Neumann.

(1.6) $$u_z(x,y,0) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega, \\ v(x,y), & (x,y)\in Q. \end{cases}$$

Ta cũng chú ý rằng tính duy nhất của lời giải bài toán (1.1), (1.2) được suy từ [5]. Do tính không chỉnh của bài toán nầy, cho nên về mặt tính toán lời giải u thông qua các đo đạc gần đúng của các dữ kiện u_0, u_1 trên Ω và f trong R_+^n, cần phải chỉnh lại bài toán để có được lời giải ổn định đồng thời vẫn tiệm cận đến của lời giải đúng khi dữ kiện đo đạc bị sai lệch ít dần.

Trong bài nầy, trước tiên chúng tôi đưa bài toán (1.1)-(1.4) về một phương trình tích phân Fredholm loại 1 mà ẩn hàm là $v(x,y)=u_z(x,y,0),\ (x,y)\in Q$. Kế đó chúng tôi sử dụng phương pháp chỉnh hóa Tikhonov [5],[9] kết hợp với định lý Lax- Milgram [8]. Chúng tôi cũng thu được một đánh giá sai số giữa lời giải chỉnh hóa và giải chính xác. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1], [2].

2. Thiết lập phương trình tích phân của v

Xét hàm Green của bài toán Neumann cho phương trình Laplace trong nửa không gian trên như sau:

(2.1) $$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left[N(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)+N(x,y,z;\xi,\eta,-\zeta)\right]$$

với

(2.2) $$N(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

Sử dụng công thức Green ta biển diễn lời giải bài toán (1.1)-(1.4) như sau:

(2.3) $$u(x,y,z)=-\iint_{R^2}G(x,y,z;\xi,\eta,0)u_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta-\iiint_{R_+^3}G(x,y,z;\xi,\eta,\varsigma)f(\xi,\eta,\varsigma)d\xi\,d\eta d\varsigma$$

Thay (1.5), (1.6) vào (2.3), sau đó cho $z\to 0_+$, ta thu được phương trình tích phân sau:

(2.4) $$(Av)(x,y)=F(x,y),\quad \forall(x,y)\in\Omega,$$

trong đó

(2.5) $$(Av)(x,y)=\iint_Q\frac{v(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi\,d\eta$$

(2.6) $$F(x,y)=-2u_0(x,y)-\iint_\Omega\frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi\,d\eta-\iiint_{R_+^3}\frac{f(\xi,\eta,\varsigma)d\xi\,d\eta d\varsigma}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\varsigma^2}}.$$

Ký hiệu

$$L^2_\mu(R^3_+)=\{f:\iiint_{R_+^3}\mu(x,y,z)f^2(x,y,z)dxdydz<\infty\}$$

và

$$L^2_\nu(Q)=\{v:\iint_Q\nu(\xi,\eta)v^2(\xi,\eta)d\xi d\eta<\infty\}$$

là các không gian Hilbert các hàm bình phương khả tích lần lượt tương ứng với các hàm trọng lượng:

$$\mu(x,y,z)=\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \quad\text{và}\quad \nu(\xi,\eta)=1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $u_0\in L^2(\Omega)$;

(H_2) u_1 bị chặn trong Ω;

(H_3) $f \in L^2_\mu(R^3_+)$.

Sau một số tính toán phức tạp, chúng tôi thu được các bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Giả sử* (H_1) - (H_3) *là đúng. Khi đó* $F \in L^2(\Omega)$.

Bổ đề 2. a) *Với mỗi* $v \in L^2_\nu(Q)$, $(Av)(x,y)$ *cho bởi (2.5) tồn tại hầu hết* $(x,y) \in \Omega$.

b) *A cho bởi (2.5) là một toán tử tuyến tính liên tục từ* $L^2_\nu(Q)$ *vào* $L^2(\Omega)$.

3. Thiết lập lời giải chỉnh hóa

Như chúng ta đã biết, bài toán không chỉnh (1.1)-(1.4) đưa đến việc giải phương trình tích phân Fredholm loại một (2.4) mà cũng là bài toán không chỉnh. Vì vậy, sự sai lệch nhỏ của các dữ kiện u_0, u_1, f trong công thức (2.6) (theo một chuẩn thích hợp) sẽ kéo theo thay đổi nhỏ của F. Do tính không chỉnh của bài toán nên lời giải tương ứng của (2.4) có sự sai lệch lớn. Vì vậy trong phần sau đây ta sẽ xấp xỉ bài toán (2.4) bởi họ các bài toán biến phân sau:

Bài toán biến phân (P_ε), $\varepsilon > 0$: Tìm $v_\varepsilon \in L^2_\nu(Q)$ sao cho

$$(3.1)\quad \iint_Q \nu(\xi,\eta) v_\varepsilon(\xi,\eta) w(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \iint_\Omega (Av_\varepsilon)(x,y)(Aw)(x,y)\, dxdy = \iint_\Omega F_\varepsilon(x,y)(Aw)(x,y)\, dxdy, \quad \forall w \in L^2_\nu(Q),$$

trong đó F_ε là giá trị đo đạc của dữ kiện so với giá trị chính xác F_0 (thông qua các dữ kiện u_0, u_1, f) theo chuẩn $L^2(\Omega)$ với sai số

$$(3.2)\quad \|F_\varepsilon - F_0\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Khi đó do định lý Lax- Milgram ta có:

Bổ đề 3. *Với mỗi* $\varepsilon > 0$ *bài toán* (P_ε) *có duy nhất một lời giải* $v_\varepsilon \in L^2_\nu(Q)$. *Hơn nữa, lời giải nầy ổn định đối với* F_ε.

Bây giờ, ta giả sử rằng lời giải chính xác $v_0 \in L^2_\nu(Q)$ của phương trình

$$(3.3)\quad Av_0 = F_0 \text{ trong } L^2(\Omega),$$

thỏa điều kiện

(H_4) Tồn tại $F^* \in L^2(\Omega)$ sao cho

$$(3.4)\quad \iint_Q \nu(\xi,\eta) v_0(\xi,\eta) w(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_\Omega F^*(x,y)(Aw)(x,y)\, dxdy, \ \forall w \in L^2_\nu(Q).$$

Kết quả sau đây cho một đánh giá sai số của lời giải v_ε và v_0 theo sai số ε mà chứng minh của nó tương tự như [2].

Định lý 1. *Giả sử lời giải chính xác* $v_0 \in L^2_\nu(Q)$ *thỏa* (H_4). *Giả sử* $F_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ *thỏa (3.2). Khi đó lời giải* $v_\varepsilon \in L^2_\nu(Q)$ *bài toán* (P_ε) *thỏa một đánh giá sai số sau:*

$$(3.5)\quad \|v_\varepsilon - v_0\|_{L^2_\nu(Q)} < C\sqrt{\varepsilon},$$

trong đó

$$(3.6)\quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \|F^*\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Chú thích 1. Việc tìm lời giải $v_\varepsilon \in L^2_V(Q)$ bài toán (P_ε) tương đương với việc giải phương trình toán tử

(3.7) $\quad \varepsilon v_\varepsilon + A^*Av_\varepsilon = A^*F_\varepsilon,$

hoặc có biểu diễn tường minh bằng công thức

(3.8) $\quad v_\varepsilon = (\varepsilon I + A^*A)^{-1}A^*F_\varepsilon,$

trong đó I là toán tử đồng nhất và $A^*: L^2(\Omega) \to L^2_V(Q)$ là toán tử liên hợp của A, tức là

(3.9) $$(A^*g)(\xi,\eta) = \frac{1}{1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\iint_\Omega \frac{g(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

* Chú rằng $\varepsilon I + A^*A$ khả đảo $\forall\varepsilon > 0$, nhưng để tính v_ε theo công thức (3.8) rất khó khăn do tính toán với toán tử $(\varepsilon I + A^*A)^{-1}$ không dễ dàng!

* Để khắc phục điều nầy ta viết phương trình (3.7) dưới một dạng khác như sau:

(3.10) $\quad v_\varepsilon = v_\varepsilon - \beta(\varepsilon v_\varepsilon + A^*Av_\varepsilon - A^*F_\varepsilon) \equiv Bv_\varepsilon$, với mọi số thực $\beta \neq 0$.

Khi đó ta có $B: L^2_V(Q) \to L^2_V(Q)$ là toán tử co với việc chọn số thực $\beta \neq 0$ một cách thích hợp. Cụ thể ta có:

Định lý 2. *Chọn*

(3.11) $$\beta = \varepsilon\left(\varepsilon + 3\pi^2 \ln\frac{16}{e}\right)^{-2}$$

Khi đó $B: L^2_V(Q) \to L^2_V(Q)$ *là toán tử co với hệ số co*

(3.12) $$k = \sqrt{1-\left(1+\frac{3\pi^2}{\varepsilon}\ln\frac{16}{e}\right)^{-2}} < 1,$$

nghĩa là

$$\|Bu - Bv\|_{L^2_V(Q)} \le k\|u-v\|_{L^2_V(Q)}, \forall u,v \in L^2_V(Q).$$

Chú thích 2. Với việc chọn β như trong định lý 2 ta sẽ tính v_ε theo một thuật toán xấp xỉ liên tiếp theo nguyên lý ánh xạ co như sau:

(3.13) $$v_\varepsilon^{(m)} = Bv_\varepsilon^{(m-1)} = \sqrt{1-\left(1+\frac{3\pi^2}{\varepsilon}\ln\frac{16}{e}\right)^{-2}}\, v_\varepsilon^{(m-1)}$$

$$-\frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon + 3\pi^2\ln\frac{16}{e}\right)^2} A^*(Av_\varepsilon^{(m-1)} - F_\varepsilon), \quad m \ge 1.$$

Bước lặp ban đầu $v_\varepsilon^{(0)} \in L^2_V(Q)$ cho trước tùy ý, để đơn giản có thể lấy

(3.14) $\quad v_\varepsilon^{(0)} \equiv 0.$

Khi đó $\left\|v_\varepsilon^{(m)} - v_\varepsilon\right\|_{L^2_V(Q)} \to 0$ khi $m \to \infty$ và ta có đánh giá sai số giữa $v_\varepsilon^{(m)}$ và v_ε như sau

(3.14) $\quad \left\|v_\varepsilon^{(m)} - v_\varepsilon\right\|_{L^2_V(Q)} \le C_\varepsilon k^m \quad$ với mọi $m \ge 1,$

trong đó $C_\varepsilon = \dfrac{\beta}{1-k}\|A^*F_\varepsilon\|_{L^2_v(Q)}$, với β và k cho bởi (3.11), (3.12). Còn sai số giữa $v_\varepsilon^{(m)}$ và v_0 được đánh giá như sau (tương tự như [2]):

(3.15) $$\left\|v_\varepsilon^{(m)} - v_0\right\|_{L^2_v(Q)} \le C_\varepsilon k^m + C\sqrt{\varepsilon}$$,với C cho bởi (3.6).

STABLE APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF A CAUCHY PROBLEM FOR POISSON EQUATION IN THE UPPER HALF-SPACE

Nguyen Cong Tam
University of Natural Sciences – VNU-HCM

ABSTRACT: The problem of finding a solution of Poisson equation in the upper half-space with Cauchy data given on the open unit disk is formulated as an integral equation. This equation is regularized by the Tikhonov methode with error estimates given.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. ***Dang Dinh Ang, Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Cong Tam***, Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregular layer :
A three dimensional model, *Acta Mathematica Vietnamica*, **28**, (1998), 65-74.

[2]. ***Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Hội Nghĩa***, Xấp xỉ ổn định lời giải của bài toán Cauchy cho phương trình Poisson trong hình tròn đơn vị, *Tạp chí "Khoa học & Công nghệ" của 4 trường Đại học Kỹ thuật*. Số **9**, (1995), 82-84.

[3]. ***Colton D***, Partial Differential Equations. An Introduction, *Random House, New York*, 1988.

[4]. ***Groetsch C.W***, Inverse problems in the Mathematica Sciences, *Wieweg, Brannsch-weig*, 1993.

[5]. ***Tikhonov A.N., Arsenin V.Y***, Solutions of ill-posed problems, *Winston, Willey, New York*, 1977.

[6]. ***Lavrentiev M***, On the Cauchy problem for the Laplace equation, *Isvestia Acad. Nauk*. **20**, (1956).

[7]. ***Vladimirov V.S***, Equations of Mathematical physics, *Mir publishers. Moscow*, 1984.

[8]. ***Brezis H.***, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, *Masson, Paris,* 1983.

[9]. ***Lattes R., Lions J.L***, Methode de quasi-reversibilite et applications, *Dunod, Paris*, (1967).