CHỈNH HÓA BÀI TOÁN STEFAN NGƯỢC MỘT CHIỀU BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHẶT CỤT TÍCH PHÂN

Nguyễn Cam*, Phạm Hoàng Quân**
*Trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh,
**Trường PTTH Bùi Thị Xuân – TP. Hồ Chí Minh
(Bài nhận ngày 04 tháng 10 năm 2002)

TÓM TẮT: *Bài toán Stefan ngược xác định phân bố nhiệt bề mặt khi biết hình dạng biên tự do và phân bố nhiệt ban đầu được đưa về việc khảo sát một phương trình tích chập. Phương trình này được chỉnh hóa bằng phương pháp chặt cụt tích phân với các đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa.*

I. Mở đầu :

Xét bài toán Stefan ngược tìm phân bố nhiệt

$u(0,t) = v(t)$, $t > 0$ sao cho phương trình :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ 0 < x < s(t),\ t > 0, \tag{1}$$

với các điều kiện biên :

$$u(s(t),t) = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t),t) = -\mu \frac{ds}{dt}(t),\ t > 0, \tag{3}$$

$$u(0,t) = v(t),\ t > 0, \tag{4}$$

và điều kiện đầu :

$$s(0) = b,\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < b, \tag{5}$$

có nghiệm $u(x,t)$ trong đó u_0 và s cho trước.

Bài toán này có thể coi là một bài toán điều khiển nhằm xác định phân bố nhiệt tại biên cố định $v(0,t)$ để biên tự do $s(t)$ có hình dáng cho trước.

Bài toán Stefan ngược nói chung là không chỉnh theo nghĩa của J.Hadamard, nghĩa là chúng không luôn luôn tồn tại nghiệm và ngay cả khi nghiệm tồn tại duy nhất thì nó không phụ thuộc liên tục theo dữ kiện. Các bài toán Stefan ngược được nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát [Colton[3,4]; Rubinstein[6]; D.D.Ang, A.P.N.Dinh, D.N.Thanh, Gorenflo [1,2,5]...] trong đó một số bài toán Stefan ngược một chiều được khảo sát khá kỹ trong [1,2,5]. Chú ý là các công trình này, nghiệm chỉnh hóa được xây dựng bằng phép chỉnh hóa Tikhonov kết hợp với biến đổi Fourier.

Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng nghiệm chỉnh hóa bằng phương pháp chặt cụt tích phân. Các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác được xây dựng dựa trên các thông tin thêm về nghiệm chính xác. Việc xây dựng nghiệm bằng một tích phân hữu hạn cho phép ta xấp xỉ nó một cách dễ dàng bằng các phương pháp xấp xỉ tích phân thông thường. Hơn nữa, bằng cách biểu diễn nghiệm chỉnh hóa này bằng chuỗi Cardinal, ta chỉ cần dữ kiện đo tại các điểm rời rạc thay vì dữ kiện liên tục như trong [1,2,5].

II. Phương trình tích phân và chỉnh hóa :

Đặt

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\right].$$

Giả sử s là hàm dương, tăng và bị chặn thuộc lớp C^1 và u_0 có đạo hàm liên tục và bị chặn. Tích phân biểu thức :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}(uG)=0$$

trên miền $0<\xi<s(\tau), 0<\varepsilon<\tau<t-\varepsilon$ và cho $\varepsilon\to 0$, ta có :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)v(\tau)d\tau=-u(x,t)+\int_0^b G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi$$

$$+\mu\int_0^t G(x,t;s(\tau),\tau)s'(\tau)d\tau \quad (6)$$

với mọi x, t sao cho t > 0, 0 < x < s(t).

Cho $x\to s(t)-0$ trong (6), ta có :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{s(t)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{s^2(t)}{4(t-\tau)}\right)v(\tau)d\tau=-\int_0^b G(s(t),t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi$$

$$+\mu\int_0^t G(s(t),t;s(\tau),\tau)s'(\tau)d\tau. \quad (7)$$

Đây là phương trình tích phân Volterra loại 1 theo $v(\tau)$ và chúng tôi cũng sẽ tìm cách chuyển (7) về một phương trình loại tích chập và chỉnh hóa bằng phép chặt cụt tích phân và đánh giá sai số.

Đặt :

$$g(x,t)=-u(x,t)+\int_0^b G(x,t;\xi,0)u(\xi)d\xi+\mu\int_0^t G(x,t;s(\tau),\tau)s'(\tau)d\tau$$

với t > 0, 0 < x < s(t) và đặt :

$$U_0(t)=\lim_{x\to s(t)-0}g(x,t),$$
$$U_1(t)=\lim_{x\to s(t)-0}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t), \quad (8)$$

và xét hàm số :

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)v(\tau)d\tau,$$

thì U thỏa phương trình :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

và các điều kiện sau :

$$\begin{aligned} U(s(t),t) &= U_0(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(s(t),t) &= U_1(t), \quad t > 0, \\ U(x,0) &= 0, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Gọi k là số thực thỏa điều kiện $k > s(t), \ \forall t > 0$.

Từ (7), ta có :

$$U_0(t) = -\int_0^b G(s(t),t;\xi,0)u(\xi)d\xi + \mu\int_0^t G(s(t),t;s(\tau),\tau)s'(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Hơn nữa, lấy đạo hàm theo x ở vế phải của (6) rồi cho $x \uparrow s(t)$, ta có :

$$U_1(t) = -\mu\frac{s'(t)}{2} + u_0(0)N(s(t),t;0,0) - \int_0^b G(s(t),t;\xi,0)u_0'(\xi)d\xi$$
$$+\mu\int_0^t G(s(t),t;s(\tau),\tau)s'(\tau)d\tau, \tag{11}$$

trong đó

$$N(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\right].$$

Do (10) và (11), các hàm $U_0(t)$ và $U_1(t)$ xác định khi $t > 0$ và phụ thuộc liên tục vào $u_0(x)$, $u'_0(x)$, $s(t)$ và $s'(t)$ theo chuẩn L^2.

Đặt :

$$K(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Với $t > 0$, $x > s(t)$ và $n \in N$ khá lớn, tích phân đẳng thức :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(K\frac{\partial U}{\partial\xi} - U\frac{\partial K}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial}{\partial\tau}(UK) = 0$$

trên miền $\frac{1}{n} < \tau < t - \frac{1}{n}$, $s(\tau) < \xi < n$ và cho $n \to \infty$, ta có :

$$U(x,t) = \int_0^t \frac{\partial K}{\partial\xi}(x,t;s(\tau),\tau).U_0(\tau)d\tau - \int_0^t K(x,t;s(\tau),\tau).(U_0(\tau)s'(\tau) + U_1(\tau))d\tau \tag{12}$$

với mọi $t > 0$, $x > s(t)$.

Tính U(x,t) tại (k,t) với $k > s(t), \ \forall t > 0$, từ (12), ta có :

$$\frac{k}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{k^2}{4(t-\tau)}\right)v(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial K}{\partial\xi}(k,t;s(\tau),\tau).U_0(\tau)d\tau$$
$$-\int_0^t K(k,t;s(\tau),\tau).(U_0(\tau)s'(\tau) + U_1(\tau))d\tau. \tag{13}$$

là phương trình dạng tích chập theo $v(\tau)$. Đặt :

$$\alpha(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\pi t^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right) & , \ t>0,\\ 0 & , \ t\le 0,\end{cases}$$

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial K}{\partial \xi}(k,t;s(\tau),\tau).U_0(\tau)d\tau \right. \\ \qquad \left. -\displaystyle\int_0^t K(k,t;s(\tau),\tau).\left(U_0(\tau)s'(\tau)+U_1(\tau)\right)d\tau\right) & , \ t>0,\\ 0 & , \ t\le 0.\end{cases}$$

Bấy giờ, với mọi $t\in R$, ta có :

$$(\alpha * v)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t-\tau)v(\tau)d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\alpha(t-\tau)v(\tau)d\tau=F(t)$$

nghĩa là :

$$\alpha * v = F. \tag{14}$$

Ta có :

$$\hat{\alpha}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x)e^{-ixt}dx=\frac{1}{k}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left[-k\left(\frac{1}{2}|t|\right)^{1/2}\left(1-i\,\mathrm{sgn}(t)\right)\right], \tag{15}$$

$$|\hat{\alpha}(t)|=\frac{1}{k}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-k\left(\frac{1}{2}|t|\right)^{1/2}\right).$$

Dùng biến đổi Fourier hai vế của (14), ta có :

$$\hat{\alpha}.\hat{v}=\hat{F}. \tag{16}$$

Nếu nghiệm v tồn tại, khi đó :

$$\hat{v}(t)=\hat{F}(t)\left(\hat{\alpha}(t)\right)^{-1} \tag{17}$$

Từ (17), nếu nghiệm tồn tại, nghĩa là : nếu $\hat{F}(t).\left(\hat{\alpha}(t)\right)^{-1}\in L^2$, ta có :

$$v(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{v}(s)e^{its}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{F}(s).\left(\hat{\alpha}(s)\right)^{-1}e^{its}ds.$$

Bây giờ, ta sẽ xây dựng một nghiệm chỉnh hóa của (14) bằng phương pháp chặt cụt tích phân sau khi ứng dụng phép biến đổi Fourier.

Định lý 1 :

Giả sử nghiệm chính xác v_0 của (14) tương ứng với F_0 ở vế phải nằm trong $L^2(R)$ và thỏa :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{v}_0(s)|^2|s|ds\le E^2, \tag{18}$$

và

$$|F-F_0|_2<\varepsilon,\ |.|_2 \text{ chuẩn trong } L^2(R) \tag{19}$$

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của (14) sao cho

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le kE\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}k}\frac{E}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E\sqrt{2}}{\varepsilon k\sqrt{\pi}}\right)\right)\right\}^{-1} \tag{20}$$

Chứng minh :

Giả sử $k \ge \sqrt{2}$, đặt $E' = \dfrac{E\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}}$, $\forall\varepsilon > 0$, sao cho $\varepsilon < E'.e^{-2}$

Đặt $a = \dfrac{2}{k^2}\ln^2\left[\dfrac{E'/\varepsilon}{\ln E'/\varepsilon}\right]$

Đặt

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\hat{F}(s)(\hat{\alpha}(s))^{-1}e^{its}ds. \tag{21}$$

Ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 = |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 = \int_{|s|\le a}\left|\frac{\hat{F}(s)-\hat{F}_0(s)}{\hat{\alpha}(s)}\right|^2 ds + \int_{|s|\ge a}|\hat{v}_0(s)|^2 ds$$

$$\le \frac{1}{|\hat{\alpha}(a)|^2}|\hat{F}-\hat{F}_0|_2^2 + \frac{1}{a}\int_{|s|\ge a}|\hat{v}_0(s)|^2.|s|ds \le \frac{k^2\pi}{2}e^{k\sqrt{2a}}\varepsilon^2 + \frac{1}{a}\frac{E^2 2.\frac{k^2\pi}{2}}{k^2\pi}$$

$$\le \frac{k^2\pi}{2}\left[\frac{E'^2}{\ln^2 E'/\varepsilon} + \frac{1}{a}E'^2\right] \le \frac{k^2\pi E'^2}{a}$$

Suy ra $|v_\varepsilon - v_0|_2 \le kE\left\{\ln\left[\dfrac{E'/\varepsilon}{\ln(E'/\varepsilon)}\right]\right\}^{-1}$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý 2 :

Giả sử nghiệm v_0 của (14) tương ứng với F_0 ở vế phải nằm trong $L^2(R)$ và thỏa :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{v}_0(s)|^2\left(\sqrt{|s|}\right)^3 ds \le \frac{\pi E^2}{4k\sqrt{2}}, \tag{22}$$

và cho

$$|F - F_0|_2 < \varepsilon. \tag{23}$$

Khi đó, tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của (14) sao cho :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le k\sqrt{\pi}E\left(\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Chứng minh :

Với mỗi $\varepsilon > 0$ sao cho $\varepsilon \le E.e^{-5}$. (25)

Đặt

$$a = \frac{2}{k^2}\ln^2\left(\frac{E/\varepsilon}{\ln(E/\varepsilon)}\right), \tag{26}$$

và

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \hat{F}(s)\left(\hat{\alpha}(s)\right)^{-1} e^{its} ds. \tag{27}$$

Chú ý rằng supp $\hat{v} \subset [-a, a]$.

Theo định lý Plancherel, ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 = |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 = \int_{|s|\le a} \left|\frac{\hat{F}(s) - \hat{F}_0(s)}{\hat{\alpha}(s)}\right|^2 ds + \int_{|s|\ge a} |\hat{v}_0(s)|^2 ds$$

$$\le \frac{1}{|\hat{\alpha}(a)|^2} |\hat{F} - \hat{F}_0|_2^2 + \frac{1}{(\sqrt{a})^3} \int_{|s|\ge a} |\hat{v}_0(s)|^2 . \left(\sqrt{|s|}\right)^3 ds$$

$$\le \frac{k^2\pi}{2} e^{k\sqrt{2a}} \varepsilon^2 + \frac{1}{(\sqrt{a})^3} \frac{\pi E^2}{4k\sqrt{2}} \tag{28}$$

Đặt $t = k\sqrt{2a}$ thì $t = 2\ln\left(\frac{E/\varepsilon}{\ln(E/\varepsilon)}\right)$.

Ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 \le \frac{k^2\pi E^2}{2}\left[e^t \frac{\varepsilon^2}{E^2} + \frac{1}{t^3}\right] = \frac{k^2\pi E^2}{2}\left[\frac{1}{\ln^2 \frac{E}{\varepsilon}} + \frac{1}{t^3}\right] \tag{29}$$

Đặt

$u = \ln\left(E/\varepsilon\right) \ge 5$, ta có $u^2 \le 8(u - \ln u)^3$

Vì vậy : $\frac{1}{t^3} \le \frac{1}{\ln^2(E/\varepsilon)}$

Vậy : $|v_\varepsilon - v_0|_2^2 \le k^2\pi E^2 \frac{1}{\ln^2(E/\varepsilon)}$

Suy ra $|v_\varepsilon - v_0|_2 \le k\sqrt{\pi}E\left(\ln E/\varepsilon\right)^{-1}$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý 3 :

Giả sử nghiệm chính xác v_0 của (14) tương ứng với F_0 ở vế phải nằm trong $L^2(R)$ và thỏa :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{v}_0(s)|^2 e^{\delta\sqrt{2|s|}} ds \le E^2 \frac{\pi k^2}{2}, \delta \ge 0 \text{ là hằng số},$$

và

$$|F - F_0|_2 < \varepsilon.$$

Khi đó, tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của (14) sao cho

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le E\sqrt{\pi}k\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{\delta}{k+\delta}}.$$

Chứng minh :

Với mọi $\varepsilon < E$, đặt $a = \dfrac{2}{(k+\delta)^2}\left(\ln\dfrac{E}{\varepsilon}\right)^2$.

Tương tự, ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 \le \frac{\pi k^2}{2}e^{k\sqrt{2a}}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{\delta\sqrt{2a}}}\int_{|s|\ge a}|\hat{v}_0(s)|^2 e^{\delta\sqrt{2|s|}}ds$$

$$\le \frac{\pi k^2}{2}e^{k\sqrt{2a}}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{\delta\sqrt{2a}}}E^2\frac{\pi k^2}{2}$$

$$\le \pi k^2\frac{E^2}{e^{\delta\sqrt{2a}}} = \pi k^2E^2\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{2\delta}{k+\delta}}.$$

Vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý 4 :

Giả sử nghiệm chính xác v_0 của (14) tương ứng với F_0 ở vế phải nằm trong $L^2(R)$ và thỏa :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2k|t|}|\hat{v}_0(t)|^2 dt \le E^2,$$

và

$$|F - F_0|_2 < \varepsilon.$$

Khi đó, tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của (14) sao cho

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le \sqrt{Ek}\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{\varepsilon}.$$

Chứng minh :

Với mỗi $\varepsilon > 0$, sao cho $\varepsilon < \dfrac{E\sqrt{2}e^{-k}}{k\sqrt{\pi}}$.

Đặt

$$a = \frac{1}{2k}\ln\frac{E\sqrt{2}}{\varepsilon k\sqrt{\pi}} \ge \frac{1}{2},$$

và

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\hat{F}(s)(\hat{\alpha}(s))^{-1}e^{its}ds.$$

Ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 = \int_{|s|\le a}\left|\frac{\hat{F}(s) - \hat{F}_0(s)}{\hat{\alpha}(s)}\right|^2 ds + \int_{|s|\ge a}|v_0(s)|^2 ds$$

$$\le \frac{1}{|\hat{\alpha}(a)|^2}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{2ka}}\int_{|s|\ge a}|v_0(s)|^2 e^{2k|s|}ds$$

$$\le \frac{k^2\pi}{2}e^{k\sqrt{2a}}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{2ka}}.E^2 = \frac{k^2\pi}{2}\left[e^{k\sqrt{2a}}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{2ka}}\frac{2E^2}{k^2\pi}\right].$$

Đặt $u = \sqrt{2a} \geq 1$, ta có :

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 \leq \frac{k^2\pi}{2}\left[e^{ku}\varepsilon^2 + \frac{1}{e^{ku^2}}\frac{2E^2}{k^2\pi}\right] \leq Ek\sqrt{2\pi}\varepsilon .$$

Vậy $|v_\varepsilon - v_0|_2 \leq \sqrt{Ek}\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{\varepsilon}$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

REGULARIZATION OF A ONE DIMENSIONAL INVERSE STEFAN PROBLEM BY THE METHOD OF TRUNCATED INTEGRATION

Nguyen Cam, Pham Hoang Quan

ABSTRACT: The inverse Stefan problem determines the distributed temperature on the surface if we know the boundary shape and the initial distributed temperature. This problem will be reduced to investigate a convolution equation. This equation is regularized by method of truncated integration with error estimates between the exact solution and regularized solution.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]Ang D.D., Alain Pham N.D. and Thanh D.N., *An Inverse Stefan Problem: Identification Of Boundary Value*, J. Comput. Math., Vol. 66 (1996) 75 – 84.

[2]Ang D.D., Alain Pham N.D. and Thanh D.N., *Regularization Of An Inverse Stefan Problem*, J. Diff. and Int. Equ., Vol. 9, (1996), 371 – 380.

[3]Colton D., *The Inverse Stefan Problem*, Ber. Gesellsch. Math. Datenverarb., 77 (1973), 29 – 41.

[4]Colton D., *The Inverse Stefan Problem For The Heat Equation In Two Space Variables*. Mathematika, 21 (1974), 282 – 286.

[5]R.Gorenflo, D.D.Ang and D.N.Thanh, *Regularization Of A Two Dimentional Inverse Stefan Problem*, Proceeding International Workshop On Inverse Problems HoChiMinh City Jan (1995), 45 – 54.

[6]Rubinstein L., *The Stefan Problem : Comments Of Its Present State*, J. Inst. Maths Applies, Vol.24, (1979), 259 – 277.