CHÍNH QUI HÓA LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRONG NỬA KHÔNG GIAN TRÊN

Nguyễn Hội Nghĩa
Ban Đào tạo Sau Đại học
Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh,
(Bài nhận ngày 11 tháng 04 năm 2001)

TÓM TẮT: *Chúng tôi xét bài toán tìm lời giải của phương trình Poisson trong nửa không gian trên với dữ kiện Cauchy cho trước trong một đĩa tròn đơn vị mở. Bài toán được dẫn về một phương trình tích phân, sau đó chính qui hóa phương trình nhờ phương pháp Tikhonov. Đánh giá sai số cũng được cho.*

1. Mở đầu :

Chúng ta xét phương trình Poisson sau đây :

(1.1) $\Delta u = f$ trong nửa không gian trên $\{(x,y,z)\in R^3 : z>0\} = P$

liên kết với dữ kiện Cauchy

(1.2) $$\begin{aligned} u(x,y,0) &= u_0(x,y) \\ u_z(x,y,0) &= u_1(x,y) \end{aligned} \qquad \forall (x,y)\in\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2<1\}$$

Trong đó f cho trước trong P : u_0, u_1 cho trước trong Ω. Hàm $u = u(x,y,z)$ chưa biết sẽ được ràng buộc thêm các điều kiện :

(1.3) $u\in C^2(P)\cap C(\overline{P})$, $u_z\in C(\overline{P})$, với $\overline{P} = \{(x,y,z)\in R^3 : z\geq 0\}$

(1.4) u chính qui ở vô cùng, nghĩa là :

(i) $$\lim_{R\to\infty}\left[\max_{x^2+y^2+z^2=R^2}|u(x,y,z)|\right] = 0$$

(ii) Tồn tại hai hằng số A > 0 và $\delta > 1$ sao cho

$$|grad\, u(x,y,z)| \leq \frac{A}{(x^2+y^2+z^2)^{\delta/2}} \qquad \text{với } x^2+y^2+z^2 \text{ đủ lớn}$$

Đây là bài toán thường gặp trong vật lý địa cầu [7] mà như ta đã biết đó là bài toán không chỉnh theo nghĩa Hadamard [6] [7]. Vấn đề liên quan đến bài toán này rất nhiều tác giả quan tâm trong thời gian gần đây, xem [1], [4], [5], [6], [7] . Ta biết rằng bài toán Neumann cho phương trình Poisson là bài toán đặt đúng theo nghĩa cổ điển [8]. Vì thế với dữ kiện Cauchy (1.2) cho trước nếu chúng ta xác định được

(1.5) $v(x,y) = u_z(x,y,0)$. $\qquad (x,y)\in Q = R^2\setminus\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2\geq 1\}$

thì ta sẽ giải được phương trình Poisson (1.1) với dữ kiện Neumann

(1.6) $$u_z(x,y,0) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ v(x,y), & (x,y)\in Q \end{cases}$$

Ta cũng chú ý rằng tính duy nhất của lời giải bài toán (1.1) - (1.2) được suy từ [8]. Do tính không chỉnh của bài toán này cho nên về mặt tính toán lời giải u thông qua các giá trị đo đạc $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ trên Ω và $f(x,y,z)$ trong P cần phải được chỉnh lại bài toán để thu được lời giải ổn định mà vẫn tiệm cận đến lời giải đúng khi dữ kiện đo đạc bị sai lệch ít dần.

Trong bài này, chúng tôi dẫn bài toán (1.1)-(1.4) về một phương trình tích phân Fredholm loại 1 theo ẩn hàm là $v(x,y)$, $(x,y) \in Q$. Sau đó chúng tôi sử dụng phương pháp chỉnh hóa của Tikhonov [6] và cách làm tương tự như [2], [3], [4] và [5] để thu được thuật toán có giá trị về mặt giải tích số cũng như dễ dàng đánh giá sai số.

2. *<u>Thiết lập phương trình tích phân</u> :*

Trong nửa không gian trên ta xét hàm Green của bài toán Neumann cho phương trình Laplace như sau :

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left[N(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) + N(x,y,z;\xi,\eta,-\zeta)\right] \tag{2.1}$$

với

$$N(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{2.2}$$

Ta giả sử rằng :

(2.3) $u_0 \in L^2(\Omega)$,

(2.4) u_1 bị chặn trong Ω,

(2.5) $f \in L^2_\mu(P)$

ở đây

$$\mu(x,y,z) = \left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \tag{2.6}$$

$$L^2_\mu(P) = \left\{f : \iiint_P \mu(x,y,z) f^2(x,y,z)\,dxdydz < \infty\right\}$$

Sử dụng công thức Green và dùng các giả thiết (2.3)-(2.6) ta biểu diễn lời giải bài toán (1.1)-(1.4) như sau [8] :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) = &-\iint_{R^2} G(x,y,z;\xi,\eta,0)u_z(\xi,\eta,0)\,d\xi\,d\eta \\ &-\iiint_P G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\mu\,d\zeta \end{aligned} \tag{2.7}$$

Thay (1.5), (1.6) vào (2.7), sau đó cho $z \to 0^+$ ta được phương trình tích phân Fredholm loại 1 sau :

$$(Av)(x,y) = F(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \tag{2.8}$$

trong đó

$$(Av)(x,y) = \iint_Q \frac{v(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} F(x,y) = &-2\pi u_0(x,y) - \iint_\Omega \frac{u_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \\ &-\iiint_P \frac{f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sau các phép tính dài và sắp xếp lại, chúng tôi thu được hai bổ đề sau :

<u>Bổ đề 1</u> : Giả sử u_0, u_1, f thỏa (2.3)-(2.6), khi đó $F \in L^2(\Omega)$

Bổ đề 2 :

a) Với mỗi $v \in L^2_\rho(Q) = \left\{ v : \iint_Q \rho(\xi,\eta) v^2(\xi,\eta) d\xi\, d\eta < \infty \right\}$

trong đó $\rho(\xi,\eta) = \left[1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right]^\beta$, $(\xi,\eta) \in Q = R^2 \setminus \Omega$,

β là hằng số sao cho $0 < \beta < 2(\delta - 1)$

Khi đó $(Av)(x,y)$ xác định bởi (2.9) tồn tại hầu hết $(x,y) \in \Omega$.

b) Toán tử A tuyến tính từ $L^2_\rho(\mathrm{Q})$ vào $L^2(\Omega)$ là liên tục

Chú thích : Kết quả của bài này là tổng quát đáng kể kết quả ở [5]. Nếu ta chọn $\delta = 2$, $\beta = 1$ thì sẽ được kết quả ở [5].

3. Thiết lập lời giải chỉnh hóa :

Ta biết rằng bài toán không chỉnh (1.1)-(1.4) dẫn về việc giải phương trình tích phân Fredholm loại 1 (2.8) mà (2.8) cũng là bài toán không chỉnh. Vì vậy sự sai lệch nhỏ các dữ kiện $u_0, u_1 f$ theo một chuẩn thích hợp kéo theo sự sai lệch nhỏ của F được xác định trong công thức (2.10). Do tính không chỉnh của bài toán nên lời giải tương ứng của (2.8) sẽ có sai lệch lớn. Vì vậy trong phần sau đây ta tìm lời giải xấp xỉ v_ε của (2.8) cho bởi bổ đề 3 sau đây :

Bổ đề 3: Tồn tại duy nhất $v_\varepsilon \in L^2_\rho(\mathrm{Q})$ sao cho

(3.1) $$\varepsilon \iint_Q \rho(\xi,\eta) v_\varepsilon(\xi,\eta) \varphi(\xi,\eta) d\xi\, d\eta + \iint_\Omega (Av_\varepsilon)(x,y).(A\varphi)(x,y) dxdy$$
$$= \iint_\Omega F_\varepsilon(x,y).(A\varphi)(x,y) dxdy , \qquad \forall \varphi \in L^2_\rho(Q)$$

trong đó F_ε là giá trị đo đạc của dữ kiện so với giá trị chính xác F_0 theo chuẩn của $L^2(\Omega)$ với sai số :

(3.2) $$\|F_\varepsilon - F_0\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$$

Hơn nữa, lời giải này ổn định đối với F_ε.

Chứng minh: Sự tồn tại và duy nhất của lời giải v_ε của phương trình biến phân (3.1) được cho bởi định lý Lax-Milgram.

Giả sử rằng, $v_0 \in L^2_\rho(\mathrm{Q})$ là lời giải chính xác của phương trình :

(3.3) $$Av_0 = F_0$$

thỏa điều kiện :

(3.4) Tồn tại $v_1 \in L^2(\Omega)$ sao cho

$$\iint_Q \rho(\xi,\eta) v_0(\xi,\eta) \varphi(\xi,\eta) d\xi\, d\eta = \iint_\Omega v_1(x,y)(A\varphi)(x,y) dxdy \qquad \forall \varphi \in L^2_\rho(Q)$$

Khi đó ta có đánh giá sau đây mà việc chứng minh tương tự như [3], [4], [5] sẽ được qua :

Định lý : Giả sử $v_0 \in L^2_\rho$ (Q) thỏa (3.3), (3.4) và $F_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ thỏa (3.2). Khi đó lời giải ổn định v_ε của (3.1) thỏa mãn một đánh giá sai số như sau :

(3.5) $$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^2_\rho(Q)} \le C\sqrt{\varepsilon}$$

với ε đủ nhỏ và :

(3.6) $$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

REGULARIZED SOLUTIONS OF A CAUCHY PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN THE UPPER HALF–SPACE.

Nguyen Hoi Nghia

ABSTRACT : *We consider the problem of finding a solution of Poisson equation in the upper half-space with Cauchy data given on the open unit disk. The problem is reduced to solving an integral equation, which is then regularized using the Tikhonov method. Error estimates are given.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dang Dinh Ang, Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Cong Tam, Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregular layer : A Three dimensional model ; *Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 23, No.1 (1998), p. 65-74.*

[2] Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Cong Tam, Inversion of the Laplace transform as a moment problem. *Proc. of the HoChiMinh City, Mathematics Consortium first Conference Vol. 1 (1993) p. 61-65.*

[3] Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Cong Tam, Tran Van Lang, Lời giải số của biến đổi Laplace ngược. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ của 4 trường Đại học Kỹ thuật. No.7. (1994), p.8-12.*

[4] Dinh Ngoc Thanh, Nguyen Cong Tam, Vu Van Thanh, Nguyen Cam, Regularized solutions of a Cauchy Problem for the Laplace equation in the upper half-plane. *Proc. of the HoChiMinh City. Math. Consortium first Conference. Vol. 1 (1993) p. 85-88.*

[5] Nguyen Cong Tam, Xấp xỉ ổn định lời giải của bài toán Cauchy cho phương trình Poisson trong nửa không gian trên. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ của 4 trường Đại học Kỹ thuật (nhận đăng).*

[6] Tikhonov A. , Arsénin V., Méthodes de résolution de problèmes mal posés. *Edition Mir (1976).*

[7] Lavrentiev M., On the Cauchy problem for the Laplace equation. *Isvestia Akad. Nauk. 20 (1956).*

[8] Vladimirov V. S., Equations of Mathematical Physics. *Mir Publishers Moscow (1984).*