MỘT SỐ LƯỚI TRONG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Nguyễn Thanh Vũ
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
(Bài nhận ngày 06/06/2000
hoàn chỉnh sửa chữa ngày 05/09/2000)

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng vài lưới phần tử hữu hạn trong phương pháp phần tử hữu hạn. Chúng tôi hy vọng rằng việc tính các hàm xấp xỉ khi dùng các lưới mới này sẽ nhanh hơn so với khi dùng các dạng lưới cũ.*

I. SỐ ĐỊNH NGHĨA CẦN SỬ DỤNG.

– Định nghĩa 1 : Giả sử rằng

(i) $K \subset R^n$ là tập compact, liên thông và có phần trong $\overset{o}{K} \neq \varnothing$

(ii) $\Sigma = \{a_j : 1 \leq j \leq N\}$ là tập gồm N điểm phân biệt của K.

(iii) P là một không gian N chiều gồm các hàm số có giá trị thực và xác định trên K.

P có một cơ sở là $\{p_j : 1 \leq i \leq N\}$ và các hàm cơ sở thỏa tính chất.

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j = 1 \quad \text{nếu} \\ 0 & j \neq i \quad \text{nếu} \end{cases}$$

Khi đó (K, P, Σ) được gọi là phần tử hữu hạn Lagrange và Σ được gọi là lưới

– Định nghĩa 2:

Giả sử $(n + 1)$ điểm $a_j = \{a_{1j},..., a_{nj}\} \in R^n$, $1 \leq j \leq n + 1$, không cùng nằm trên một siêu phẳng của R^n, nghĩa là ma trận cấp $n + 1$ sau đây khả đảo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó, bao lồi K của $(n + 1)$ điểm đó được gọi là n – đơn hình.

– Định nghĩa 3:

Gọi các đỉnh của $\hat{K} = [0, 1]^n \subset R^n$ là $\hat{a}_j$, $1 \leq j \leq 2^n$.

Một bao lồi K của 2^n điểm $a_j \in R^n$, $1 \leq j \leq 2^n$, được gọi là n siêu hộp nếu tồn tại một ánh xạ affin khả đảo $F : R^n \rightarrow R^n$ thỏa

$a_j = F(\hat{a}j)$, $\forall_j = 1,..., 2^n$

II. XÂY DỰNG MỘT SỐ LƯỚI CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

II.1 Trường hợp K là n- siêu hộp.

– Định nghĩa 4.

Với k là một số nguyên dương

• Chọn $\Sigma = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_n) : y_i \in \left\{0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \ldots, \frac{2^k - 1}{2^k}, 1\right\}, 1 \le i \le n \right\}$

Chọn P là không gian sinh bởi $\{p_y : y \in \Sigma\}$, trong đó p_y được xác định như sau:

Vì $y \in \Sigma$ nên y có dạng $y = \left(\frac{\mu_1}{2^k}, \frac{\mu_2}{2^k}, \ldots, \frac{\mu_n}{2^k}\right)$, trong đó

$\mu_j \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$ với mọi $j = 1, \ldots, n$

Với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ thì

$$p_y(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu_j}}^{2^k} \frac{2^k x_j - i}{\mu_j - i} \right)$$

– Tính chất 5:

Với Σ được chọn trong định nghĩa 4, số phần tử của Σ là

$\mathrm{card}\, \Sigma = (2^k + 1)^n$

Chứng minh

Số phần tử của Σ là số chỉnh hợp lặp chập n của $(2^k + 1)$ số, do đó ta có kết quả trong tính chất 5

– Tính chất 6:

Giả sử p_y được chọn trong định nghĩa 4 với y tùy ý thuộc Σ

Khi đó p_y có tính chất

$$p_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases} \quad \text{nếu} \quad x \in \Sigma \ \text{nếu} \qquad \text{và}$$

Chứng minh

– Trường hợp x = y : Ta có $2^k x_j = 2^k \frac{\mu_j}{2^k} = \mu_j, 1 \le j \le n$

Do đó $p_y(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq \mu_j}}^{2^k} 1 \right) = 1$

– Trường hợp $x \neq y$ và $x \in \Sigma$: Ta có $x = \left(\frac{\mu'_1}{2^k}, \ldots, \frac{\mu'_n}{2^k}\right)$

Do $x \neq y$ nên tồn tại j thỏa $\mu'_j \neq \mu_j$, khi đó với $i = \mu'_j$ ta có

$$2^k x_j - i = 2^k \frac{\mu'_j}{2^k} - \mu'_j = 0$$

Suy ra $p_y(x) = 0$

– Tính chất 7:

Với P như trong định nghĩa 4 thì

• Số chiều của P là $(2^k + 1)^n$

• P là không gian các đa thức trên R^n theo n biến và có bậc không lớn hơn 2^k đối với mỗi biến

Chứng minh

– Ta thấy $\{p_y : y \in \Sigma\}$ là tập hợp các đa thức độc lập tuyến tính, nên $\dim P = \operatorname{card} \Sigma$

– Gọi P' là không gian các đa thức theo n biến và có bậc không lớn hơn 2^k đối với mỗi biến, tức mỗi $p \in P'$ có dạng

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n,\ p(x) = \sum \alpha_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

trong đó tổng theo các chỉ số nguyên $i_1,\dots, i_n$ sao cho $0 \leq i_j \leq 2^k$, $\forall j = 1,\dots, n$; các hệ số $\alpha_{i_1,\dots,i_n}$ là số thực.

Chiều của P' bằng số phần tử của tập $\{(i_1,\dots, i_n) : i_j \in \{0,1,\dots, 2^k\}, 1 \leq j \leq n\}$, do đó chiều của P' bằng $(2^k + 1)^n$

Ta có $\forall y \in \Sigma$, $p_y \in P'$, do đó $P \subset P'$, đồng thời $\dim P = \dim P'$, suy ra $P = P'$

– Tính chất 8:

Với cách chọn Σ và P như trong định nghĩa 4, ta có (K, P, Σ) là phần tử hữu hạn Lagrange.

Chứng minh

Do tính chất 5, 6, 7

– Tính chất 9:

Giả sử lưới trong định nghĩa 4 ứng với k và k' lần lượt là Σ_k, $\Sigma_{k'}$

Khi đó : nếu $k' > k$ thì $\Sigma_k \subset \Sigma_{k'}$

Chứng minh

Coi $y \in \Sigma_k$, y có dạng

$$y = \left(\frac{\mu_1}{2^k}, \dots, \frac{\mu_n}{2^k}\right) \text{ với } \mu_j \in \{0, 1,\dots, 2^k\},\ \leq j \leq n$$

Đặt $\mu'_j = 2^{k'-k} \mu_j$ với $1 \leq j \leq n$ thì $\mu'_j \in \{0,1,\dots, 2^{k'}\}$

lúc đó $\dfrac{\mu_j}{2^k} = \dfrac{\mu_j'}{2^{k'}}$ và $y = \left(\dfrac{\mu'_1}{2^{k'}}, \dots, \dfrac{\mu_n'}{2^{k'}}\right)$

Do đó $y \in \Sigma_{k'}$

Vậy $\Sigma_k \subset \Sigma_{k'}$

II.2. Trường hợp K là n – đơn hình.

– Định nghĩa 10:

Gọi (n + 1) đỉnh của K là $a_1, \ldots, a_{n+1}$

Coi k là số nguyên dương

• Chọn Σ là tập các điểm $y \in R^n$ có dạng

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j}{2^k} a_j, \text{ trong đó } \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 2^k$$

và μ_j là số nguyên không âm, $\forall_j = 1, \ldots, n + 1$

• Chọn P là không gian sinh bởi $\{p_y : y \in \Sigma\}$ trong đó p_y được xác định như sau:

Vì $y \in \Sigma$ nên y có dạng $y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j}{2^k} a_j$

Với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ thì

$$p_y(x) = \left(\prod_{j=1}^{n+1} (\mu_j !) \right)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \neq 0}}^{n+1} \prod_{i=0}^{\mu_j - 1} (2^k \mu_j - i)$$

Tính chất 11:

Với Σ được chọn trong định nghĩa 10, số phần tử của Σ là $\dfrac{(n + 2^k)!}{n! 2^k !}$

Chứng minh

• Trường hợp n = 1 : μ_1 và μ_2 trong định nghĩa 10 thỏa $\mu_1 + \mu_2 = 2^k$, ta thấy $\mu_1 \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$ nên suy ra số phần tử của Σ là $2^k + 1$

Do đó tính chất 10 đúng với n = 1

• Giả sử tính chất 10 đúng trong không gian R^n, ta sẽ chứng minh nó đúng trong R^{n+1} như sau :

Các $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ trong định nghĩa 10 thỏa

$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 2^k$ hay $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 2^k - \mu_{n+1}$

Đặt $m = \mu_{n+1}$ thì $m \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$

Số phần tử của Σ là

$$\sum_{m=0}^{2^k} \frac{(n + (2^k - m))!}{n!(2^k - m)!} = \frac{(n + 1 + 2^k)!}{(n + 1)! 2^k}$$

Vậy tính chất 10 đúng với mọi số tự nhiên n.

– Tính chất 12:

Giả sử p_y được chọn định nghĩa 10 với y tùy ý thuộc Σ.

Khi đó p_y có tính chất

$$p_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \quad \text{nếu} \\ 0 & x \neq y \quad \text{nếu} \end{cases} \quad \text{và}$$

• Trường hợp $x = y$:

Ta có $\prod_{i=0}^{\mu_j-1}(2^k x_j - i) = \prod_{i=0}^{\mu_j-1}(\mu_j - i) = \mu_j!$

Do đó $p_y(x) = 1$

• Trường hợp $x \neq y$ và $x \in \Sigma$:

Ta thấy x có dạng $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu'_j}{2^k} a_j$

Vì $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=1}^{n+1} \mu'_j$ nên tồn tại j thỏa $\mu'_j < \mu_j$ lúc đó với $i = \mu'_j$ ta có

$$\left(2^k x_j - i\right) = \left(2^k \frac{\mu'_j}{2^k} - \mu'_j\right) = 0$$

Do đó $p_y(x) = 0$

– Tính chất 13:

Với P và Σ như trong định nghĩa 10 thì

• Số chiều của P bằng số phần tử của Σ

• P là không gian các đa thức theo n biến và có bậc không lớn hơn 2^k

Chứng minh

• Ta thấy $\{p_y : y \in \Sigma\}$ là tập các đa thức độc lập tuyến tính nên

dim P = card Σ

• Gọi P' là không gian các đa thức theo n biến và có bậc nhỏ hơn hay bằng 2^k, tức nếu $p \in P'$ thì p có dạng.

$\forall x = (x_1,..., x_n) \in R^n$, $p(x) = \sum \alpha_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, trong đó tổng theo các chỉ số nguyên không âm $i_1,..., i_n$ thỏa $i_1 + i_2 + ... i_n \leq 2^k$,các hệ số $\alpha_{i_1,...,i_n}$ là số thực.

Ta thấy $i_1 + i_2 + ... + i_n \leq 2^k$ tương đương $i_1 + i_2 + ... + i_n + i_{n+1} = 2^k$ với $i_{n+1} \in \{0,1,..., 2^k\}$, so sánh với $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n+1} = 2^k$ trong chứng minh của tính chất 11, ta suy ra

dim P' = card Σ, tức dim P' = dim P

Mặt khác, $\forall y \in \Sigma$, $p_y \in P'$ nên $P \subset P'$

Do đó P = P'

– Tính chất 14:

Với cách chọn Σ và P như trong định nghĩa 10, ta có (K, P, Σ) là phần tử hữu hạn Lagrange.

Chứng minh

Do tính chất 11, 12, 13

– Tính chất 15:

Giả sử lưới trong định nghĩa 10 ứng với k và k' lần lượt là Σ_k, $\Sigma_{k'}$

Khi đó : nếu k' > k thì $\Sigma_k \subset \Sigma_{k'}$

Chứng minh

Coi $y \in \Sigma_k$, y có dạng

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j}{2^k} a_j \text{ trong đó } \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 2^k$$

Đặt $\mu'_j = 2^{k'-k} \mu_j$ với $1 \le j \le n$ thì $\sum_{j=1}^{n+1} \mu'_j = 2^{k'}$

Lúc đó: $$\frac{\mu_j}{2^k} = \frac{\mu'_j}{2^{k'}} \text{ và } y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu'_j}{2^{k'}} a_j$$

Do đó $y \in \Sigma_{k'}$

Vậy $\Sigma_k \subset \Sigma_{k'}$

III. KẾT LUẬN.

Ta đã xây dựng hai dạng lưới của phần tử hữu hạn trong định nghĩa 4 và định nghĩa 10. Tính chất đặc biệt của hai dạng lưới này là tính chất 9 (tính chất 15). Trong các bài toán tính hàm xấp xỉ của hàm v bằng phương pháp phần tử hữu hạn, ta cần tính giá trị của v tại các nút (phần tử) của lưới Σ, thực tế hiện nay là nhờ máy tính thực hiện, khi chọn k càng lớn thì lưới Σ càng chứa nhiều điểm và sai số của phép tính gần đúng càng nhỏ. Mỗi lần chọn chọn lại k thì phải tính lại các giá trị v tại các nút của lưới mới, nếu sử dụng lưới có tính chất 9 (tính chất 15) thì các nút cũ vẫn giữ nguyên và thêm một số nút mới, khi đó máy tính chỉ thực hiện việc tính giá trị của hàm v tại các nút thêm mà không cần tính lại toàn bộ giá trị v tại mọi nút, như thế việc tính sẽ nhanh hơn so với việc dùng các dạng lưới không có tính chất 9.

SOME FINITE ELEMENT MESHS IN THE FINITE ELEMENT METHOD

Nguyen Thanh Vu

ABSTRACT *: We contruct in this paper some finite element meshs in the finite element method. We hope that the computation of approximate functions using the above meshs is quicker than the method relying on the known mesh.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]Nguyễn Thành Long, Giáo trình cao học Giải tích số, Đại học Khoa học Tự nhiên (2000)

[2] B. Daya Reddy, Introductory Functional Analysis, Springer (1998)

[3] P. E Lewis and J.P.Ward, The finte element method, Addison – Wesley (1991)

[4] MYRON B.ALLEN III, Numerical analysis for applied science,Wiley–Interscience (1998).