GIẢI SỐ CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Kim Khôi
Phân Viện Công nghệ Thông tin TP. Hồ Chí Minh.
Nguyễn Hội Nghĩa
Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

(Bài nhận ngày 25/08/2000)

TÓM TẮT : *Chúng tôi xét hệ phương trình hàm tuyến tính thuộc dạng sau đây:*

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(A_{ij}(x)) = g_i(x), \qquad \forall x \in I \subset R,\ \ 1 \le i \le n$$

trong đó I là một khoảng bị chặn hay không bị chặn của R. Các hàm g_i : $I \to R$, $A_{ij} : I \to I$, $1 \le i, j \le n$ là liên tục cho trước; a_{ij}, $1 \le i, j \le n$ là các hằng số cho trước; $f_i(x)$, $1 \le i \le n$ là các ẩn hàm. Bài báo thiết lập kết quả về sự tồn tại và duy nhất lời giải của hệ (1).Kết quả tính toán bằng số minh họa kèm theo.

1. GIỚI THIỆU

Trong bài này, chúng tôi xét hệ phương trình hàm sau đây

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(A_{ij}(x)) = g_i(x), \qquad \forall x \in I \subset R, \quad 1 \le i \le n \qquad (1.1)$$

trong đó I là một khoảng bị chặn hay không bị chặn của R. Các hàm g_i : $I \to R$, $A_{ij} : I \to I$, $1 \le i, j \le n$ là liên tục cho trước; a_{ij}, $1 \le i, j \le n$ là các hằng số cho trước; $f_i(x)$, $1 \le i \le n$ là các ẩn hàm.

Trong [1] các tác giả C.Q.Wu, Q.W.Xuan, D.Z. Zhu đã nghiên cứu hệ

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m} [a_{ik} f_1(A_{ik}(x)) + b_{ik} f_2(B_{ik}(x))] + g_i(x),\ x \in I=[-b,b],\ \forall\, i=1,2 \qquad (1.2)$$

với $m = 2$; A_{ik}, B_{ik} là các nhị thức bậc nhất thỏa điều kiện $A_{ik}(x), B_{ik}(x) \in I, \forall x \in I$. Cũng trong [1] các tác giả đã xấp xỉ lời giải của hệ (1.2) bởi một dãy qui nạp hội tụ đều. Hơn nữa lời giải thu được cũng ổn định đối với các hàm $g_i(x)$.Một trường hợp riêng của(1.2) đã có áp dụng vào việc giải hệ phương trình hyperbolic [1].

Trường hợp $m = 1$, $I = [a, b]$, $g_i(x) = 0$, các tác giả trong [2], [3], [4] đã khảo sát sự tồn tại và duy nhất lời giải trong không gian hàm BC[a, b] của một phương trình hàm sau:

$$f(x) = a(x, f(S(x))) \qquad (1.3)$$

Trong[5],[6],[7] ,chúng tôi xét hệ phương trình hàm tuyến tính(1.2).Bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi thu được định lý tồn tại, duy nhất và ổn định của lời giải của hệ (1.2) đối với các hàm $g_i(x)$, trong đó I = [a, b] hoặc I làkhoảng không bị chặn của **R**. Trong trường hợp A_{ik}, B_{ik} là các nhị thức bậc nhất và $g_i \in C^r(I)$, I = [-b, b] chúng tôi thu được một khai triển Maclaurin của lời giải của hệ (1.1) đến cấp r. Hơn nữa, nếu $g_i(x)$ là các đa thức bậc r thì lời giải của hệ (1.2) cũng là đa thức bậc r. Gần đây, một số kết quả của chúng tôi trong [7] cũng đã phát triển cho hệ phương trình hàm với miền nhiều chiều (Xem [8]).

Bài báo gồm 2 phần .Trong phần 1, trình bày một số định lý tồn tại, duy nhất và ổn định của lời giải cho hệ phương trình hàm dạng (1.1). Trong phần 2 là phần khảo sát thuật giải số dựa vào thuật giải xấp xỉ liên tiếp theo nguyên tắc ánh xạ co, kết hợp với xấp xỉ bởi các hàm spline bậc nhất. Kết quả thu được đã tổng quát hóa các kết quả trong [1-6], [9] và một phần kết quả nầy đã được công bố trong [7],[8].Cuối cùng làphần thuật toán số trên các ví dụ cụ thể.

2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT LỜI GIẢI CỦA HỆ (1.1)

Ta ký hiệu I = [a, b] hay I là khoảng không bị chặn trong R.

- Với I = [a, b], ký hiệu $V = C(I; R^n)$ là không gian Banach các hàm $f = (f_1, ..., f_n)$ $: I \to R^n$ liên tục trên I đối với chuẩn

$$\|f\|_V = \sup_{x \in I} \|f(x)\|, \qquad (2.1)$$

trong đó $\|f(x)\| = |f_1(x)| + ... + |f_n(x)|$, $f = (f_1, ..., f_n) \in V$.

- Với $I \subset R$ là một khoảng không bị chặn, ta ký hiệu $V = C_b(I; R^n)$ là không gian Banach các hàm $f = (f_1, ..., f_n) : I \to R^n$ liên tục, bị chặn trên I đối với chuẩn (2.1).

Ta thành lập các giả thiết sau:

(G1) $g = (g_1, ..., g_n) \in V$,

(G2) $A_{ij} : I \to I$ làcác hàm liên tục, $1 \le i, j \le n$,

(G3) A_{ii} tồn tại hàm ngược A_{ii}^{-1} liên tục, $1 \le i \le n$,

(G4) $a_{ii} \neq 0, 1 \le i \le n$,

(G5) $$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1.$$

Khi đó ta có kết quả sau:

Định lý 1: *Giả sử* **(G1) - (G5)** *là đúng.Khi đó tồn tại duy nhất một hàm* $f = (f_1, ..., f_n)$ $\in V$ *là lời giải của hệ (1.1). Hơn nữa lời giải của hệ (1.1) cũng ổn định đối với* g *trong* V.

Chứng minh: Từ giả thiết **(G3), (G4)** ta viết hệ (1.1) về dạng tương đương

$$f_i(x) = -\sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} f_j[A_{ij}(A_{ii}^{-1}(x))] + \frac{1}{a_{ii}} g_i[A_{ii}^{-1}(x)] \quad , \forall x \in I \subset R, \quad 1 \le i \le n. \quad (2.2)$$

hay

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} f_j[\widetilde{S}_{ij}(x)] \; + \; \widetilde{g}_i(x), \quad \forall x \in I \subset R, \quad 1 \le i \le n. \quad (2.3)$$

với

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{ii} = 0, \\ \widetilde{a}_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, j \neq i, \\ \widetilde{S}_{ij}(x) = A_{ij}[A_{ii}^{-1}(x)], \\ \widetilde{g}_i(x) = \dfrac{1}{a_{ii}} g_i[A_{ii}^{-1}(x)]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Theo các giả thiết **(G1)-(G5)** ta có:

($\widetilde{G}$ 1) $\quad \widetilde{g} = (\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_n) \in V$,

($\widetilde{G}$ 2) $\quad \widetilde{S}_{ij} : I \to I$ liên tục,

($\widetilde{G}$ 3) $\quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \widetilde{a}_{ij} \right| < 1$.

Mặt khác ta đặt

$$(Qf)_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} f_j[\widetilde{S}_{ij}(x)] \; + \; \widetilde{g}_i(x), \; \forall x \in I \subset R, \quad 1 \le i \le n, \quad (2.5)$$

$$Qf = ((Qf)_1, \ldots, (Qf)_n), \; f = (f_1, \ldots, f_n) \in V.$$

Khi đó ta kiểm lại không khó khăn rằng:

$$Q : V \to V \text{ và } \left\| Qf - Q\widetilde{f} \right\|_V \le \alpha \left\| f - \widetilde{f} \right\|_V \quad \forall f, \widetilde{f} \in V.$$

Theo định lý điểm bất động Banach, tồn tại duy nhất một hàm $f = (f_1, \ldots, f_n) \in V$ là lời giải của hệ (2.3). Hơn nưã lời giải của hệ (2.3) cũng ổn định đối với g trong V.

Vậy định lý 1 được chứng minh hoàn tất .

Chú thích 1: Nhờ vào định lý 1 ta xây dựng một thuật giải xấp xỉ liên tiếp theo nguyên tắc ánh xạ co như sau:

$$f^{(p)} = Qf^{(p-1)}, \; p = 1, 2, \ldots, \; f^{(0)} \in V. \quad (2.6)$$

Khi đó dãy $\{f^{(p)}\}$ hội tụ trong V về lời giải f của (2.3) và có một đánh giá sai số

$$\left\|f^{(p)}-f\right\|_V \leq \frac{\alpha^p}{1-\alpha}\left\|f^{(0)}-Qf^{(0)}\right\|_V, \ \forall p=1,2,\ldots \quad (2.7)$$

3. THUẬT GIẢI SỐ

Về thuật giải số trong đoạn này, chúng tôi xét với I = [-1, 1] và **(G1)-(G5)** được thỏa mãn. Trước hết ta tính

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{ii}=0, \\ \widetilde{a}_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, j\neq i, \\ \widetilde{S}_{ij}(x)=A_{ij}[A_{ii}^{-1}(x)], \\ \widetilde{g}_i(x)=\dfrac{1}{a_{ii}}g_i[A_{ii}^{-1}(x)]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dựa vào thuật giải (2.6) ta viết lại

$$\begin{cases} f_i^{(p)}(x)=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}f_j^{(p-1)}[\widetilde{S}_{ij}(x)] + \widetilde{g}_i(x), & , \forall x\in I\subset R, \ 1\leq i\leq n, \\ f_i^{(0)}(x)\equiv 0, \quad 1\leq i\leq n, \quad x\in[-1,1], \end{cases} \quad (3.2)$$

Từ thuật giải (3.2) ta xác định các giá trị rời rạc của lời giải tại các điểm nút

$$x_j=-1+j.\Delta x, \quad 0\leq j\leq N, \quad \Delta x=2/N. \quad (3.3)$$

Sau đó nội suy các giá trị tại các điểm nút (3.3) bởi các hàm liên tục trên [-1, 1] và trên mỗi đoạn $[x_{j-1},x_j], 0\leq j\leq N$ là hàm bậc nhất theo x, tức là

$$f_i^{(p)}(x)=\sum_{j=0}^{N}f_{ij}^{(p)}.w_j(x), \quad (3.4)$$

trong đó

$$f_{ij}^{(p)}=f_i^{(p)}(x_j) \quad (3.5)$$

$$w_j(x)=\begin{cases} (x-x_{j-1})/\Delta x, & x_{j-1}\leq x\leq x_j, \\ (x_{j+1}-x)/\Delta x, & x_j\leq x\leq x_{j+1}, \\ 0 & x\notin[x_{j-1},x_{j+1}], \\ & ,1\leq j\leq N-1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$w_0(x)=\begin{cases} (x_1-x)/\Delta x, & -1\leq x\leq x_1, \\ 0, & x_1\leq x\leq 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$w_N(x)=\begin{cases}(x-x_{N-1})/\Delta x, & x_{N-1}\le x\le 1,\\ 0, & -1\le x\le x_{N-1}.\end{cases}\tag{3.8}$$

Dựa vào thuật giải (3.2), ta xác định dãy quy nạp $f_{ij}^{(p)}$ theo bước lặp p=1,2,... như sau:

$$f_{ij}^{(0)}=0\,,i=1,...,n,\ 0\le j\le N,\tag{3.9}$$

$$f_{ij}^{(p)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{l=0}^{N}f_{kl}^{(p-1)}w_l(\widetilde{S}_{ik}(x_j))+\widetilde{g}_i(x_j)\,,\ i=1,...,n,\ 0\le j\le N,\ p=1,2,...\tag{3.10}$$

Ta áp dụng thuật giải (3.9),(3.10) trên ví dụ sau:

Ví dụ : Xét hệ 3 phương trình với 3 ẩn hàm sau:

$$\begin{cases}100f_1(t^3)+f_2\left(\dfrac{t+1}{2}\right)+f_3\left(\dfrac{2t+1}{3}\right)=g_1(t),\\ f_1\left(\dfrac{t-1}{2}\right)+200f_2\left(\sqrt[3]{t}\right)+f_3\left(\dfrac{2t-1}{3}\right)=g_2(t),\\ f_1(\cos t)+f_2(\sin t)+300f_3\left(\dfrac{(t+1)^2}{2}-1\right)=g_3(t), & -1\le t\le 1\end{cases}\tag{3.11}$$

trong đó

$$g_1(t)=100t^3,\quad g_2(t)=\frac{1}{2}(t-1),\quad g_3(t)=\cos t.\tag{3.12}$$

Lời giải chính xác của (3.11), (3.12) là

$$f_1^{ex}(t)=t;\quad f_2^{ex}(t)=f_3^{ex}(t)=0.\tag{3.14}$$

Các số thực a_{ij}, các hàm $A_{ij}(t), g_i(t)$ thỏa các giả thiết **(G1) - (G5).**

Viết lại hệ (3.11) về dạng (2.3) như sau

$$\begin{cases}f_1(x)=-\dfrac{1}{100}f_2\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{2}\right)-\dfrac{1}{100}f_3\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x}+1}{3}\right)+\dfrac{1}{100}g_1(\sqrt[3]{x}),\\ f_2(x)=-\dfrac{1}{200}f_1\left(\dfrac{x^3-1}{2}\right)-\dfrac{1}{200}f_3\left(\dfrac{2x^3-1}{3}\right)+\dfrac{1}{200}g_2(x^3),\\ f_3(x)=-\dfrac{1}{300}f_1\left(\cos\left(-1+\sqrt{2(x+1)}\right)\right)-\dfrac{1}{300}f_2\left(\sin\left(-1+\sqrt{2(x+1)}\right)\right)\\ \qquad+\dfrac{1}{300}g_3\left(-1+\sqrt{2(x+1)}\right), & -1\le x\le 1\end{cases}\tag{3.15}$$

Tính toán bởi thuật giải (3.10) với các bước lặp p = 1,2,... sao cho

$$\max_{\substack{1\le i\le 3\\ 0\le j\le N}} \left| f_{ij}^{(p)} - f_{ij}^{(p-1)} \right| < 10^{-6}. \qquad (3.16)$$

Sau đó, cho N tăng dần lần lượt với N=5, 10, 15, 20. Bảng 1,2,3 cho kết quả so sánh giá trị tính toán $f_{ij}^{(p)}$ với giá trị chính xác $f_i^{ex}(x_j)$ tại các nút x_j với i = 1,2,3 và j = 0, ..., N. Bảng A cho các sai số thay đổi theo số nút N tăng dần.

Bảng 1: N=5 , $\max_{0\le j\le 5} E_{1j} = 2.47E-10$

j	$f_{1j}^{(p)}$	$f_1^{ex}(x_j)$	$E_{1j} = \left\| f_{1j}^{(p)} - f_1^{ex}(x_j) \right\|$
0	-0.999999999753	-1.000000000000	0.000000000247
1	-0.599999999771	-0.600000000000	0.000000000229
2	-0.199999999824	-0.200000000000	0.000000000176
3	0.199999999982	0.200000000000	0.000000000018
4	0.599999999984	0.600000000000	0.000000000016
5	0.999999999985	1.000000000000	0.000000000015

Bảng 2: N=5 , $\max_{0\le j\le 5} E_{2j} = 3.82E-11$

j	$f_{2j}^{(p)}$	$f_2^{ex}(x_j)$	$E_{2j} = \left\| f_{2j}^{(p)} - f_2^{ex}(x_j) \right\|$
0	0.000000000038	0.000000000000	0.000000000038
1	-0.000000000033	0.000000000000	0.000000000033
2	-0.000000000035	0.000000000000	0.000000000035
3	-0.000000000035	0.000000000000	0.000000000035
4	-0.000000000037	0.000000000000	0.000000000037
5	-0.000000000033	0.000000000000	0.000000000033

Bảng 3: N=5 , $\max_{0\le j\le 5} E_{3j} = 3.82E-11$

j	$f_{3j}^{(p)}$	$f_3^{ex}(x_j)$	$E_{3j} = \left\| f_{3j}^{(p)} - f_3^{ex}(x_j) \right\|$
0	0.000000000038	0.000000000000	0.000000000038
1	-0.000000000033	0.000000000000	0.000000000033
2	-0.000000000035	0.000000000000	0.000000000035
3	-0.000000000037	0.000000000000	0.000000000037
4	-0.000000000036	0.000000000000	0.000000000036
5	-0.000000000029	0.000000000000	0.000000000029

N	Bảng A 1 $e_{1N} = \max_{0 \le j \le N} E_{1j}$	Bảng A 2 $e_{2N} = \max_{0 \le j \le N} E_{2j}$	Bảng A 3 $e_{3N} = \max_{0 \le j \le N} E_{3j}$
5	2.47E-10	3.82E-11	3.82E-11
10	3.28E-10	3.07E-10	3.07E-10
15	2.97E-10	4.06E-10	4.06E-10
20	4.77E-10	6.13E-10	6.13E-10

NUMERICAL SOLUTIONS OF FUNCTIONAL EQUATION SYSTEM

Nguyễn Kim Khoi - Nguyen Hoi Nghia

ABSTRACT : We consider the system of linear functional equations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(A_{ij}(x)) = g_i(x), \qquad \forall x \in I \subset R, \quad 1 \le i \le n \qquad (1)$$

where I *is a bounded or unbounded interval,* $g_i : I \to R$, $A_{ij} : I \to I$, $1 \le i, j \le n$ *are the given continuous functions. We prove the existence and uniqueness of solution of the system (1) . Numerical results are given.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Q. Wu, Q. W. Xuan, D. Y. Zhu, *The system of the functional equations and the fourth problem of hyperbolic system, SEA. Bull. Math.* 15, (1991) , 109-115.

[2] T. Kostrzewski, *Existence and uniqueness of BC[a, b] solutions of nonlinear functional equation, Demonstratio Math.* 26, (1993), 61-74.

[3] T. Kostrzewski, *BC-solutions of nonlinear functional equation. A uniqueness case, Demonstratio Math.* 26, (1993), 275-285.

[4] M. Lupa, *On solutions of a functional equation in a special class of functions, Demonstratio Math.* 26, (1993), 137-147.

[5] Đinh Văn Ruy, Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Xuân Ngọc,*Về một hệ phương trình hàm , Báo cáo Hội nghị Khoa học và Công nghệ lần 6, Trường Đại học Bách Khoa TpHCM* 16-17/2/1995, tóm tắt , trang 98.

[6] Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Hội Nghĩa, Đinh Văn Ruy, *On a linear functional system, Báo cáo Hội nghị Toán học Toàn quốc lần 5, Hà Nội* 17-20/9/1997, tóm tắt, trang 52.

[7] Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Kim Khoi, Dinh Van Ruy, *On a system of functional equations , Demonstratio Math.* 31, (1998), 313-324.

[8] Nguyen Thanh Long,Nguyen Hoi Nghia, On a system of functional equations in a multi-dimensional domain.J. *for Analysis and its Applications,* 19 (2000) (sắp đăng).

[9] Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Về một hệ phương trình hàm tuyến tính, (Bài gửi đăng).