CHỈNH HOÁ BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH HELMHOLTZ TRONG DẢI KHÔNG CHÍNH QUI : CÁC ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

Võ Thị Thanh Nhiều
Trường Cao đẳng Sư phạm Tây Ninh
Nguyễn Công Tâm
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Chu Văn Thọ
Trường Đại học Y Dược TP.HCM
(Bài nhận ngày 12/07/2000,
hoàn chỉnh sửa chữa ngày 25/08/2000)

TÓM TẮT *: Bài toán tìm nghiệm của phương trình Helmholtz trong dải không chính quy giới hạn bởi một đường thẳng và một đường cong C : y = γ(x) với dữ kiện Cauchy trên C được đưa về một phương trình tích phân loại 1. Phương trình tích phân này được chuyển về phương trình tích chập tương đương và được chỉnh hoá bằng phép chỉnh hoá Tikhonov với các đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hoá tuỳ vào độ trơn của nghiệm chính xác.*

1- DẪN NHẬP

Chúng tôi khảo sát bài toán tìm hàm số u thoả phương trình Helmholtz trong một miền D từ dữ kiện Cauchy trên một phần biên của D. Bài toán này là bài toán không chỉnh theo nghĩa của J.Hadamard. Đọc giả có thể tham khảo về các bào toán Cauchy cho phương trình eliptic trong các bài báo [1, 3, 4, 5]. Bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz trong R^3 được khảo sát trong [6,7].

Trong bài toán này chúng tôi tìm hàm u, thỏa phương trình Helmholtz trên miền D xác định bởi.

$$D = \{(x, y)|\ -\infty < x < +\infty, 0 < y < \gamma(x)\}$$

Từ những dữ kiện đo đạc của u, u_x, u_y trên phần biên của D biểu diễn bởi đường cong $y = \gamma(x)$, trong đó u khả vi liên tục trên $\overline{D}$ và γ là hàm thuộc lớp C^2.

Tiếp nối phương pháp khảo sát trong [4,5], bằng cách sử dụng ẩn hàm $v(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$, chúng tôi chứng tỏ rằng nếu sai số giữa dữ kiện chính xác và dữ kiện do đo đạc của u, u_x, u_y trên đường cong $y = \gamma(x)$ không quá ε thì tuỳ vào độ trơn của nghiệm chính xác υ_0, sai số giữa nghiệm chính xác υ_0 và nghiệm chỉnh hoá có cấp $\sqrt{\varepsilon}$ hay $(\ln(\frac{1}{\varepsilon}))^{-s}$, s > 0 khi $\varepsilon \to 0$.

2- PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN THEO V :

Xét phương trình Helmholtz trong dải $D = \{ (x,y) \mid x \in R , 0 < y < \gamma (x)\}$

$$\Delta u - c^2 u = 0$$

thỏa các điều kiện biên

$$u_x(x, \gamma (x)) = f (x)$$
$$u_y(x, \gamma (x)) = g (x)$$
$$u(x, \gamma (x)) = u_1(x)$$

trong đó c là một hằng số dương, γ, f, g, u_1 là dữ kiện cho.

Giả sử rằng

(i) γ, u_1 thuộc lớp C^1 trên R.

(ii) $\gamma'(x) = 0$ khi $|x|$ đủ lớn.

(iii) f, g và u_1 tiến về 0 đủ nhanh ở ∞, chẳng hạn cùng cấp với $\frac{1}{|x|}$ khi $|x| \to \infty$.

Đặt

$$K_0(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt$$

$$\Gamma(x,y,\zeta,\eta) = \frac{1}{2\pi} K_0(c \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2})$$

$$N(x,y,\zeta,\eta) = \Gamma(x,y,\zeta,\eta) + \Gamma(x,-y,\zeta,\eta)$$

trong đó Γ là nghiệm tổng quát của phương trình Helmholtz và N là hàm Green ứng với điều kiện biên Neumann tại biên y = 0.

Với $\upsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$ là ẩn hàm, $x \in R$, $0 < y < \gamma (x)$, và bằng cách lấy phân đẳng thức.

$$u\Delta N - Nu\Delta = u c^2 N - N c^2 u = 0$$

trên miền $D_\varepsilon = D \backslash B_\varepsilon'$, trong đó

$$D = \{(\zeta, \eta) \mid \zeta \in R, 0 < \eta < \gamma (\zeta)\}$$
$$B\varepsilon' = \{(\zeta, \eta) \mid (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 \le \varepsilon^2\}$$

Và cho $\varepsilon \to 0$, ta nhận được đẳng thức.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(c \sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2})\ v(\zeta)\, d\zeta = - u(x,y)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} N_1(x,y;\zeta,\gamma(\zeta))u_1(\zeta))d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} N(x,y;\zeta,\gamma(\zeta))u_2(\zeta))d\zeta \qquad (1)$$

với

$$N_1(x,y;\zeta,\eta) = N_\eta(x,y;\zeta,\gamma,(\zeta)) - N_\zeta(x,y;\zeta,\gamma,(\zeta)).\gamma_\zeta(\zeta)$$

$$u_2(\zeta) = u_\eta(\zeta,\gamma,(\zeta)) - u_\zeta(\zeta,\gamma(\zeta)).\gamma(\zeta)) = g(\zeta) - f(\zeta).\gamma_\zeta(\zeta)$$

Cho $y \uparrow \gamma(x)$ trong (1) ta nhận được phương trình tích phân theo v(x)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(c\sqrt{(x-\zeta)^2+\gamma^2(x)}\, v(\zeta)d\zeta = -\frac{3}{2}u_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} N_1(x,\gamma(x);\zeta,\gamma(\zeta))u_1(\zeta)d\zeta$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} N(x,\gamma(x):\zeta,\gamma(\zeta)u_2(\zeta)d\zeta \qquad (2)$$

Đây là phương trình tích phân loại 1 và người ta có thể chỉnh hoá bằng phương pháp Tikhonov. Tuy nhiên việc đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hoá và nghiệm chính xác rất khó.

Trong phần tiếp, chúng tôi chuyển phương trình tích phân (2) về một phương trình tích phân loại tích chập và bằng công cụ biến đổi tích phân Fourier chúng tôi có thể xây dựng được nghiệm chỉnh hoá cho bài toán và đưa ra các đánh giá sai số tuỳ vào độ trơn của nghiệm chính xác,

3- PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CHẬP VÀ NGHIỆM CHỈNH HÓA

Với nhận xét là hàm số

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(c\sqrt{(x-\zeta)^2+y^2})\, v(\zeta)d\zeta$$

thỏa phương trình Helmholtz

$$\Delta U - c^2 U = 0$$

Trên nữa mặt phẳng y > 0. Giá trị U (x, γ(x)) chính là vế phải của (2) và $\frac{\partial U}{\partial n}$ (x,γ(x)) chính là giới hạn từ bên dưới của đạo hàm theo hướng của vế phải của (1) khi $(x, y) \to (x, \gamma(x))$ trong đó n là pháp vectơ đơn vị trong của đường cong y = γ (x) đối vời miền D.

Đặt

$$\lambda(x) = U(x,\gamma(x))$$

$$\mu(x) = \frac{\partial U}{\partial n}(x,\gamma(x))$$

thì U (x, y) có thể được biểu diễn như các hàm thế vị của λ và μ trên miền y > γ(x).

Thực vậy, bằng cách tích phân đẳng thức

$$U\Delta\Gamma - \Gamma\Delta U = 0$$

trên miền.

$$D_R = \{(x,y) \mid |x| < R, \gamma(x) < y < R\}$$

và cho $R \to \infty$, ta nhận được

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y:\zeta,\gamma(\zeta))\mu(\zeta)d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(x,y:\zeta,\gamma(\zeta))\lambda(\zeta)d\zeta$$

với $-\infty < x < \infty$, $y > \gamma(x)$ và

$$\Gamma_1(x,y;\zeta,\gamma(\zeta)) = \Gamma_\zeta(x,y;\zeta,\gamma(\zeta)).\gamma_\zeta(\zeta) - \Gamma_\eta(x,y;;\zeta,\gamma(\zeta))$$

Đánh giá U (x,y) tại (x,k) với k là một hằng số lớn hơn mọi $\gamma(x)$, ta nhận được phương trình

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(c\sqrt{(x-\zeta)^2 + k^2})\, v(\zeta)d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,k;\zeta,\gamma(\zeta))\mu(\zeta)d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(x,k;\zeta,\gamma(\zeta))\lambda(\zeta)d\zeta = F(x) \qquad (3)$$

Đặt

$$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, K_0(c\sqrt{x^2+k^2})$$

Khi đó

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{-ix\omega}dx = (c^2+\omega^2)^{-\frac{1}{2}}\; e^{-k(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Phương trình (3) được viết lại là

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\zeta)v(\zeta)d\zeta = F(x)$$

và ta nhận được phương trình tích chập theo v là

$$(G * v)(x) = F(x) \qquad (4)$$

Định lý 1 :

Giả sử nghiệm chính xác v_0 của phương trình (4) (ứng với F_0 ở vế phải) thuộc

$H^s(R) \cap L^1(R)$, $s > 0$, $|F - F_0|_2 < \varepsilon$ ($|.|_2$ là chuẩn trong $L^2(R)$)

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε của (4) sao cho

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 < K(\ln(\frac{1}{\varepsilon}))^{-s} \quad \text{với } \varepsilon \to 0.$$

K là hằng số chỉ phụ thuộc vào $|v_0|$ trong H^s.

Chứng minh

Từ (4) suy ra phương trình $\hat{G}(\omega).\hat{v}_0(\omega) = \hat{F}_0(\omega)$ $(\omega \in R)$ (5)

Với mỗi $\beta > 0$

Đặt

$$\Psi(\omega) = \frac{\hat{G}(\omega)}{\beta + \hat{G}^2(\omega)} \hat{F}(\omega) \qquad (6)$$

Ta có $\psi \in L^2(R)$

Đặt

$$v_\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Thế thì $\hat{v}_\beta = \psi$, $v_\beta \in L^2(R)$ và v_β thỏa phương trình.

$$\beta \hat{v}_\beta + \hat{v}_\beta(\omega).\hat{G}^2(\omega) = \hat{G}(\omega).\hat{F}(\omega) \quad (\omega \in R) \qquad (7)$$

v_β phụ thuộc liên tục theo F.

từ (5) và (7) ta suy ra

$$\hat{G}^2(\omega).\hat{v}_0(\omega) = \hat{F}_0(\omega).\hat{G}(\omega)$$

$$\beta(\hat{v}_\beta(\omega) - \hat{v}_0(\omega)) + \hat{G}^2(\omega)(\hat{v}_\beta(\omega) - \hat{v}_0(\omega)) = -\beta \hat{v}_0(\omega) + \hat{G}(\omega)(\hat{F}(\omega) - \hat{F}_0(\omega)) \qquad (8)$$

Nhân 2 vế của (8) cho $\overline{\hat{v}_\beta(\omega) - \hat{v}_0(\omega)}$, rồi lấy tích phân 2 vế trên R và sau đó cho $\beta = \varepsilon < 1$ ta có

$$\varepsilon |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 + |\hat{G}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon(|\hat{v}_0|_2 + |\hat{G}|_\infty) |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2$$

trong đó $|\hat{G}|_\infty = \sup_{\omega \in R} |\hat{G}(\omega)| < \infty$

Suy ra

$$|\hat{G}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon(|(\hat{v}_0)_2 + |\hat{G}|_\infty)^2 \qquad (9)$$

Đặt $\alpha(\omega) = (c^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}$

Với $\beta = \varepsilon < 1$, nhân 2 vế của (8) cho $\overline{\alpha^{2s}(\omega)((\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0(\omega))}$ và lấy tích phân 2 vế trên R ta có

$$\varepsilon |\alpha^s(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 + |\alpha^s \hat{G}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon |\alpha^s \hat{v}_0|_2 |\alpha^s(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2 + |\alpha^s \hat{G}|_\infty |\hat{F} - \hat{F}_0|_2 |\alpha^s (\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2$$

trong đó $|\alpha^s \hat{G}|_\infty = \sup_{\omega \in R} |\alpha^s(\omega)| |\hat{G}(\omega)| < \infty$

Suy ra

$$|\alpha^s(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2 \le |\alpha^s \hat{v}_0|_2 + |\alpha^s \hat{G}|_\infty \qquad (10)$$

Đặt

$$A = \max(|\alpha^s \hat{v}_0|_2 + |\alpha^s \hat{G}|_\infty ; |\hat{v}|_2 + |\hat{G}|_\infty) \qquad (11)$$

Từ (9), (10), (11) ta suy ra

$$|\alpha^s(\hat{v}_\varepsilon.\hat{v}_0)|_2^2 \le A^2$$

$$|\hat{G}(\hat{v}_\varepsilon.\hat{v}_0)|_2^2 \le A^2_\varepsilon$$

Với mọi $a_\varepsilon > |\omega|$ ta có : $\hat{G}^2(\omega) \ge \dfrac{1}{c^2 + a_\varepsilon^2}\, e^{-2k(c^2+a_\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$

Với mọi $a_\varepsilon < |\omega|$ ta có : $\alpha^{2s}(\omega) = (c^2+\omega^2)^s \ge (c^2 + a_\varepsilon^2)^s$

Do đó ta có :

$$\int_{|\omega|\le a_\varepsilon} |\hat{v}_\varepsilon(\omega) - \hat{v}_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega \le (c^2 + a_\varepsilon^2)\, e^{2k(c^2+a_\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\, A^2\varepsilon$$

$$\int_{|\omega|\ge a_\varepsilon} {}_{|\omega|\ge a\varepsilon} |\hat{v}_\varepsilon(\omega) - \hat{v}_0(\omega)|^2 d\omega \le \frac{1}{(c^2 + a_\varepsilon^2)^s} A^2$$

xét phương trình

$$y^2 e^{2ky} A^2 \varepsilon = \frac{A^2}{y^{2s}}$$

phương trình trên có nghiệm duy nhất y_ε. Nếu lấy $y_\varepsilon = (c^2 + a_\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ thì ta tìm được

$a_\varepsilon = (y_\varepsilon^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$

Suy ra

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le K.(\ln(\frac{1}{\varepsilon}))^{-s} \quad \text{với } K = \sqrt{2A^2 2^{2s}(s+1+k)^{2s}}$$

Định lý 1 đã được chứng minh.

Định lý 2 :

Trong các điều kiện của định lý 1, nếu có thêm điều kiện :

$$(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}\; e^{k(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\, \hat{v}_0(\omega) \in L^2(R)$$

thì tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε sao cho

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le K_1.\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

K_1 là hằng số chỉ phụ thuộc v_0.

Chứng minh

Từ (8), nhân 2 vế cho $\overline{\hat{v}_\beta(\omega) - \hat{v}_0(\omega)}$, cho $\beta = \varepsilon$, lấy tích phân trên R ta có

$$\varepsilon|v_\varepsilon - v_0|_2^2 + |\hat{G}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon|\hat{G}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2 (1 + |(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}} e^{k(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{v}_0|_2)$$

Do đó

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 = |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2 \le \sqrt{\varepsilon}.K_1 \quad \text{với } K_1 = 1 + |(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}} e^{k(c^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{v}_0|_2$$

Định lý 2 đã được chứng minh.

REGULARIZED SOLUTIONS OF A CAUCHY PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION IN AN IRREGULAR STRIP : THE ERROR ESTIMATES

Vo Thi Thanh Nhieu – Nguyen Cong Tam – Chu Van Tho

ABSTRACT *: The problem of finding a solution of the Helmholtz equation in an irregular strip bounded by a line and a curve C : y = γ(x) with data specified on C is formulated as an integral of the first kind. The latter is converted in to an equivalent convolution equation which is regularized using Tikhonov method. The error estimates between the regularized solutions and the exact one are given upon the smoothness of the exact one.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D.D.Ang, D.N. Thanh and V.V.Thanh, Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregelaı strip, J. of Integral Equation and Aplications, Vol.6, No.4, (1993).

[2] D.D.Ang, N.H. Nghia and N.C.Tam, Regularized solutions of a Cauchy problem for the Laplace equation in an irregelar layer : A three dimensional model, Acta Mathematica Vietnamica, Vol.23, No.1, p.p 65-74, (1998).

[3] J. Douglas, Approximated solution of physical unstable problems, Ecole C.E.A.E.D.F, Paris. (1965).

[4] R.Lattes and J.L.Lions, Methode de quasi-reversibilite et applications, Dunod, Paris (1967).

[5] M.M.Lavrentiev, On the Cauchy problem for the Laplace equation, (in Russian), Isvestia Akad, Nauk, 20, 819-842 (1956).

[6] V.T.T.Nhiều, N.C.Tâm và C.V.Thọ, Nghiệm chỉnh hóa của bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz trong tầng gồ ghề của R^3, Hội nghị Quốc gia về Ứng dụng Toán học, Hà Nội, (1999).

[7] V.T.T.Nhiều, N.C.Tâm và C.V.Thọ, Regularized Solution of a Cauchy Problem for the Hemholzt Equation in Irregular Layers, Preprints Japan-USA-Vietnam Workshop on Research and Education in Systems, Computation Control Engineering, Vietnam, p.p 292-303, (2000).

[8] V.T.T.Nhiều, N.C.Tâm, D.N.Thanh và C.V.Thọ, Nghiệm chỉnh hóa của bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz trong dải không chính quy, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học (Lần II) Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Tp. HCM, p.p 98-102, (2000).

[9] W.J.Sternberg and T.L.Smith, The theory of potential and spherical harmonics, The University of Toronto Press, Toronto, Canada, (1952).

[10] A.N.Tikhonov and V.Y.Arsenin, Solution of ill-posed problems, Winston, Wiley, Newyork, (1977).