BÀI TOÁN DIRICHLET MIỀN NGOÀI TRONG R^2 ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

Nguyễn Thanh Vũ
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
*(Bài nhận ngày 20/06/2000
hoàn chỉnh sửa chữa ngày 5/10/2000)*

TÓM TẮT : *Trong bài báo này, chúng tôi tìm lời giải cho bài toán Dirichlet đối với phương trình Laplace trong miền ngoài của mặt cầu đơn vị trong R^2.*

I. GIỚI THIỆU

Bài toán giá trị biên Dirichlet miền ngoài của phương trình Laplace là bài toán tìm nghiệm $u \in C^2(R^2 \backslash D) \cap (R^2 \backslash D)$ của phương trình

$\Delta u(x) = 0, \forall x \in R^2 \backslash \bar{D}$

với điều kiện biên $\quad u(x) = f(x), \forall x \in \partial D$

trong đó D là một miền trong R^2 (thông thường D là miền đơn liên và bị chặn) và f là một hàm liên tục trên biên ∂D.

Bài toán này có vô số nghiệm nên người ta đã thêm một trong các điều kiện tương đương như sau

– Hàm u bị chặn ở vô cực

– $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x)$ tồn tại (hữu hạn)

– Hàm u bị chặn trong một lân cận của vô cực.

Khi thêm điều kiện ở vô cực thì bài toán trở thành bài toán quen thuộc và được trình bày trong hầu hết các sách về phương trình đạo hàm riêng.

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán Dirichlet miền ngoài và đưa ra dạng nghiệm tổng quát chung cho các trường hợp khác nhau về điều kiện ở vô cực, cụ thể là tìm nghiệm $u \in C^2(R^2 \backslash \bar{B}) \cap C(R^2 \backslash B)$ thỏa

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in R^2 \backslash \bar{B} \\ u(x) = f(x), & \forall x \in \partial B \end{cases}$$

trong đó $B = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ và f là một hàm liên tục trên ∂B ($\partial B = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ là biên của B)

II. MỘT SỐ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ :

– Định lý 1 (định lý Bôcher)

Nếu hàm số w điều hòa trên $B\backslash\{0\} = \{x \in R^2 : 0 < |x| < 1\}$, đồng thời w dương trong một lân cận của 0 thì w có dạng

$$w(x) = k\log\frac{1}{|x|} + c + p(x) \qquad , \forall x \in B \backslash \{0\}$$

trong đó k là hằng số dương, c là hằng số, p là hàm điều hòa trên B.

– Định nghĩa 2 :

• Phép biến đổi K biến đổi hàm số $h : R^2\backslash B \to R$ thành một hàm số được xác định như sau :

$K[h] : \overline{B} \to R$

Một điểm x tùy ý thuộc $\overline{B}$ có tọa độ cực $(r, \theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi)$,ảnh của x qua hàm số K[h] là

$$K[h](r,\theta) = h\left(\frac{1}{r}, \ \theta\right)$$

• Phép biến đổi K biến đổi hàm số $g : \overline{B} \to R$ thành một hàm số được xác định như sau :

$K[g] : R^2\backslash B \to R$

Một điểm x tùy ý thuộc $R^2\backslash B$ có tọa độ cực $(r, \theta) \in [1, \infty) \times [0, 2\pi)\pi)$,ảnh của x qua hàm số K[g] là

$$K[g](r, \theta) = g\left(\frac{1}{r}, \ \theta\right)$$

– Định lý 3 :

(i) Nếu $h : R^2\backslash B \to R$ là hàm điều hòa trên $R^2 \backslash \overline{B}$ thì K[h] điều hòa trên B.

(ii) Nếu $g : \overline{B} \to R$ là hàm điều hòa trên B thì K[g] điều hòa trên $R^2 \backslash \overline{B}$

(iii) $g = K[h] \Leftrightarrow h = K[g]$

Chứng minh

(i) Đặt $g = K[h]$ và $t = \dfrac{1}{r}$

Ta có $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial h}{\partial t} \cdot \dfrac{-1}{r^2}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}\left(\dfrac{-1}{r^2}\right)^2 + \dfrac{\partial h}{\partial t} \cdot \dfrac{2}{r^3}$

Do đó $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = t^4\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\right) = 0$

Vậy g là hàm điều hòa

– (ii) và (iii) : hiển nhiên

III. ĐỊNH LÝ VỀ NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN DIRICHLET

– Định lý 4

• Xét bài toán giá trị biên Dirichlet đối với miền ngoài

$\Delta u(x) = 0,\ \forall x \in R^2 \setminus \overline{B}$

$u(x) = f(x)\ ,\ \forall x \in \partial B$

trong đó $B = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ và f là hàm số liên tục trên ∂B

• Nghiệm $u \in C^2(R^2 \setminus \overline{B}) \cap C(R^2 \setminus B)$ của bài toán có dạng

$$u(r,\theta) = w\left(\frac{1}{r}, \theta\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1 - 2r\cos(\theta - \varphi)} f(\varphi)\, d\varphi$$

trong đó

.$(r, \theta) \in (1, \infty) \times [0, 2\pi)$ là tọa độ cực của $x \in R^2 \setminus \overline{B}$

.w là hàm điều hòa trên $B \setminus \{0\}$, liên tục trên $\overline{B} \setminus \{0\}$, có giá trị trên biên ∂B bằng 0.

Chứng minh

Gọi g là hàm điều hòa trên B, liên tục trên $\overline{B}$, có giá trị biên bằng f.

Theo công thức Poisson ta có

$$g(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 + 1 - 2r\cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$$

với $(r, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi)$ là tọa độ cực của $x \in B$.

Gọi $h = K[g]$.

Ta có h điều hòa trên $R^2 \setminus \overline{B}$ (do định lý 5)

Vì $\lim\limits_{r \to 1} h(r,\theta) = \lim\limits_{r \to 1} g\left(\dfrac{1}{r}, \theta\right) = f(\theta)$, đồng thời g liên tục trên $\overline{B}$, ta suy ra h liên tục trên $R^2 \setminus B$ và h có giá trị trên biên ∂B bằng f.

Vậy h là một nghiệm của bài toán trên và có biểu thức

$$h(r,\theta) = g\left(\frac{1}{r},\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\dfrac{1}{r^2}}{\dfrac{1}{r^2}+1-\dfrac{2}{r}\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-1}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi$$

Giả sử u là nghiệm của bài toán

Đặt $v = u - h$

Ta thấy v là hàm điều hòa trên $R^2 \setminus \overline{B}$, liên tục trên $R^2 \setminus B$, có giá trị bằng 0 trên biên ∂B.

$w = K[v]$ hàm điều hòa trên $B \setminus \{0\}$, liên tục trên $\overline{B} \setminus \{0\}$, có giá trị biên bằng 0.

Theo định lý 3 thì $v = K[w]$

Vậy u có dạng như trong định lý 4.

– Định lý 5:

Xét bài toán như trong định lý 4 và đặt

$$h(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-1}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi$$

(i) Nếu $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta)$ tồn tại (hữu hạn) thì hàm w trong kết quả nghiệm là hàm luôn bằng 0.

(ii) Nếu tồn tại tập compact E (chứa B) thỏa $u > h$ trong miền $R^2 \setminus E$ (tức $u > h$ trong một lân cận ở vô cực)thì nghiệm u có dạng

$$u(r,\theta) = k\log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-1}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi$$

với k là hằng số dương.

(iii) Nếu tồn tại tập compact E (chứa B) thỏa $u < h$ trong miền $R^2 \setminus E$ (tức $u < h$ trong một lân cận ở vô cực)thì nghiệm u có dạng

$$u(r,\theta) = -k\log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-1}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi$$

với k là hằng số dương.

Chứng minh

(i) Bổ sung giá trị của w tại $x = 0$ thì w điều hòa trên B, suy ra $w \equiv 0$

(ii) Hàm số v=u-h dương trên miền $R^2 \setminus E$,suy ra w=K[v] là hàm dương trên một lân cận của 0,từ định lý 1 ta có

$$w(x) = k\log\frac{1}{|x|} + c + p(x) \qquad ,\forall x \in \overline{B} \setminus \{0\}$$

Hàm w có giá trị trên biên ∂B bằng 0,suy ra hàm điều hòa c +p(x) có giá trị trên biên ∂B bằng 0,do đó hàm điều hòa c+p(x) luôn bằng 0 trên B.Ta có

$$w(x) = k\log\frac{1}{|x|} \qquad ,\forall x \in \bar{B}\setminus\{0\}$$

$$w\left(\frac{1}{r}\right) = k\log\frac{1}{\left|\frac{1}{r}\right|} = k\log r \qquad ,\forall r \geq 1$$

Từ định lý 4,ta suy ra nghiệm u như trong định lý 5.

(iii) w là hàm âm và (−w) thỏa định lý 1, do đó ta có kết quả như trong định lý 5.

IV.KẾT LUẬN

Trong định lý 4,chúng tôi đưa ra dạng tổng quát của nghiệm.Còn các nghiệm cụ thể ứng với các trường hợp khác nhau về tính chất của u ở vô cực được trình bày trong định lý 5.

THE EXTERIOR DIRICHLET PROBLEM IN R^2 FOR LAPLACE'S EQUATION

Nguyen Thanh Vu

ABSTRACT : We solve the exterier Dirichlet problem for Laplace's equation in the exterior of the R^2-unit sphere

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lawrence C.Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society , 1998.

[2] Fritz John, Partial Differential Equations, Springer Verlag, 1982.

[3] V.P. Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir publishers Moscow, 1978

[4] David Colton, Partial Differential Equations, Random House New York, 1988.