ĐỊNH LÝ LIOUVILLE ĐỐI VỚI HÀM ĐIỀU HÒA

Nguyễn Thanh Vũ
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

(Bài nhận ngày 20/06/2000)

TÓM TẮT : *Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng định lý Liouville (định lý về tính chất của hàm điều hòa)*

1. GIỚI THIỆU

– Trong hầu hết các sách về phương trình đạo hàm riêng (chẳng hạn trong [1], [2], [3], [4]) đều trình bày định lý Liouville, nội dung định lý như sau :

• ***Định lý Liouville :***

Giả sử hàm điều hòa $f : R^n \to R$ thỏa

$\forall x \in R^n$, $|f(x)| \leq M$ với M là hằng số

Khi đó f là hàm hằng

– Điều kiện trong định lý Liouville là hàm f bị chặn bởi một hằng số M. Chúng tôi đưa ra trường hợp mà điều kiện về f dễ xảy ra hơn, đó là trường hợp f không bị chặn bởi hằng số, mà kết quả của định lý vẫn đúng.

2. ĐỊNH LÝ

Định lý :

Giả sử hàm điều hòa $f : R^n \to R$ thỏa

$\forall x \in R^n$, $|f(x)| \leq M + A|x|^\alpha$

trong đó M, A, α là các hằng số dương và $\alpha < 1$

Khi đó f là hàm hằng trên R^n.

Chứng minh

Gọi x tùy ý thuộc $R^n \setminus \{0\}$. Xét $r > |x|$

Gọi $B(x, r) = B_x$ là quả cầu tâm x, bán kính r.

$B(0, r) = B_0$ là quả cầu tâm 0, bán kính r.

V(r) là thể tích của quả cầu bán kính r

$\Delta(r) = (B(0, r) \cup B(x, r)) \setminus (B(0, r) \cap B(x,r))$

$D(r) = B(0, r + |x|) \setminus B(0, r - |x|)$

Theo định lý giá trị trung bình (coi [1] trang 25) thì

$$f(x) = \frac{1}{V(r)} \int_{B(x,r)} f dV$$

$$= \frac{1}{V(r)} \left[\int_{B_x \cap B_o} f dV + \int_{B_x \setminus B_o} f dV \right]$$

và $f(0) = \frac{1}{V(r)} \left[\int_{B_x \cap B_o} f dV + \int_{B_o \setminus B_x} f dV \right]$

Suy ra

$$| f(x) - f(0) | = \frac{1}{V(r)} \left[\int_{B_x \setminus B_o} f dV - \int_{B_x \setminus B_o} f dV \right].$$

$$\leq \frac{1}{V(r)} \left[\int_{B_x \setminus B_o} | f | dV - \int_{B_o \setminus B_x} | f | dV \right]$$

$$= \frac{1}{V(r)} \int_{\Delta(r)} | f | dV$$

$$\leq \frac{1}{V(r)} \int_{D(r)} | f | dV \text{ (trong đó } \Delta(r) \subset D(r))$$

Mặt khác ta có : $\forall \xi \in D(r)$, $|f(\xi)| \leq M + A|\xi|^\alpha \leq M + A(r + |x|)^\alpha$

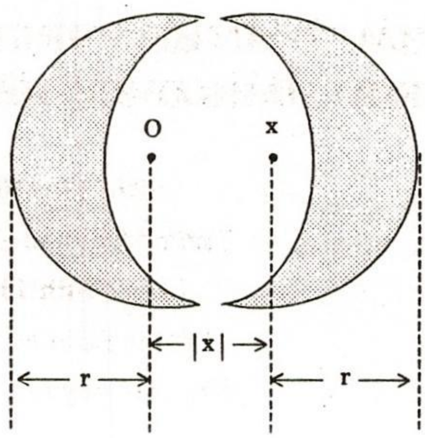
Do đó $\quad |f(x) - f(0)| \leq \frac{M + A(r + |x|)^\alpha}{V(r)} \int_{D(r)} dV$

$$= \frac{M + A(r + |x|)^\alpha}{V(r)} (V(r + |x|) - V(r - |x|))$$

$$= \left(M + A(r + |x|)^\alpha \right) \frac{(r + |x|)^n - (r - |x|)^n}{r^n} \quad (*)$$

Ta thấy $(r + |x|)^n - (r - |x|)^n$ là đa thức có bậc $(n - 1)$ theo r, do đó biểu thức ở (*) tiến về 0 khi $r \to \infty$, tức $|f(x) - f(0)| \to 0$ khi $r \to \infty$, suy ra $f(x) = f(0)$.

Vậy f là hàm hằng trên R^n.



Δ(r) ứng với phần gạch chéo trên hình vẽ

LIOUVILLE'S THEOREM FOR HARMONIC FUNCTIONS

Nguyen Thanh Vu

ABSTRACT : *We give here a result stronger than the Liouville's theorem for harmonic functions.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lawrence C.Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[2] Fritz John, Partial Differential Equations, Springer – Verlag, 1982.

[3] V. P. Mikhailov, Partial Differential Equations, Mir publishers Moscow, 1978

[4] David Colton, Partial Differential Equations, Ransom House New York, 1988