VỀ MỘT BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP : DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA LỜI GIẢI

Bùi Tiến Dũng

Trường Đại học Kiến trúc

Trần Minh Thuyết

Trường Đại học Kinh tế

(Bài nhận ngày 15/ 07/2000)

TÓM TẮT *: Xét bài toán biên :*

$$\frac{-1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}(x^\gamma |u'(x)|^{p-2}u'(x)) + f(x,u(x)) = F(x), \; 0<x<1, \quad (1)$$

$$\left|\lim_{x\to 0_+} x^{\frac{\gamma}{p}}u'(x)\right| < +\infty \quad , |u'(1)|^{p-2}u'(1) + h.u(1) = g \quad (2)$$

trong đó các hằng số $\gamma > 0$, $p \geq 2$, $h > 0$, g và các hàm số f, F là cho trước. Trong bài nầy, chúng tôi dùng phương pháp Galerkin vàCompact trong không gian Sobolev cótrong lượng thích hợp để chứng minh sự tồn tại và duy nhất lời giải của bài toán (1), (2). Sau đó, Chúng tôi cũng nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của lời giải u_h phụ thuộc vào h khi $h \to 0_+$. Hơn nữa, hàm số $h \mapsto |u_h(1)|$ là không tăng trên $(0,+\infty)$.

1. GIỚI THIỆU

Chúng tôi xét bài toán biên phi tuyến sau

$$\frac{-1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}M(x,u'(x)) + f(x,u(x)) = F(x), \quad 0<x<1 , \qquad (1.1)$$

$$\left|\lim_{x\to 0_+} x^{\gamma/p}u'(x)\right| < +\infty, \qquad (1.2a)$$

$$M(1,u'(1)) + h.u(1) = g, \qquad (1.2b)$$

$$M(x,u'(x)) = x^\gamma |u'(x)|^{p-2}u'(x), \qquad (1.3)$$

trong đó các hằng số $\gamma > 0$, $p \geq 2$, $h > 0$, g và các hàm số f, F là cho trước. Trong trường hợp $\gamma = 0$, bài toán (1.1),(1.2b) ,(1.3) và (1.4) $u(0) = 0$, có liên quan đến bài toán uốn một thanh đàn hồi phi tuyến có khối lượng riêng γ_0 được nhúng trong một chất lỏng khối lượng riêngγ_1 mà Tucsnak [10] đã thiết lập trong trường hợp $f(x,u) - F(x) = [-\lambda + (\gamma_0 - \gamma_1)g(x) - G'(1)]\sin u$,trong đó λ là một hằng số dương, $g(x), G(x)$ là các hàm cho trước có ý nghĩa cơ học nào đó, $u(x)$ là góc giữa tiếp tuyến với thanh ở trạng thái bị uốn tại điểm của thanh có hoành độ cong x và trục thẳng đứng Oy. Trong trường hợp $g(x)$ là hằng số, $M(x,u') = M(u')$ chỉ phụ thuộc vào u' ,đơn điệu tăng và đủ trơn, Tucsnak đã nghiên cứu sự phân nhánh của các phương trình tích phân tương đương với (1.1),(1.2b),(1.3),(1.4) phụ thuộc vào tham số λ.Ta chú ý rằng phương trình (1.1) với $\gamma = 0, u'.M(x,u') \geq C_1|u'|^p$, $p > 1$, $C_1 > 0$ độc lập với x, đã được xét bởi các tác giả trong [2].

Trong [9] các tác giả đã nghiên cứu bài toán (1.1)-(1.3) với $p = 2$.

Trong [3],[4] các tác giả đã nghiên cứu phương trình vi phân Bessel phi tuyến sau

$$\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}(xu'(x)) + u^2 - u = 0, \quad x > 0. \qquad (1.5)$$

Trong bài nầy, chúng tôi dùng phương pháp Galerkin và compact trong các không gian hàm Sobolev có trọng lượng thích hợp để chứng minh sự tồn tại và duy nhất của lời giải yếu. Chúng tôi cũng nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của lời giải u_h phụ thuộc vào h khi $h \to 0_+$. Chúng tôi cũng thu được rằng hàm số $h \mapsto |u_h(1)|$ là không tăng trên $(0,+\infty)$.Kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [2],[3], [4],[6],[7],[10].

2 .CÁC KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

Đặt $\Omega = (0,1)$, Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông dụng: $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$.

Ta ký hiệu bởi $L^p_\gamma(\Omega) \equiv L^p_\gamma$ là tập hợp tất cả các hàm số u xác định và đo được trên Ω, sao cho

$$\|u\|_{p,\gamma} < \infty, \qquad (2.1)$$

trong đó $$\|u\|_{p,\gamma} = \begin{cases} \left(\int_0^1 x^\gamma |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<x<1} |u(x)| & , p = \infty. \end{cases}$$

Ta đồng nhất L^p_γ các hàm bằng nhau hầu hết trên Ω. Các phần tử của L^p_γ thật ra là các lớp tương đương của các hàm đo được thỏa mãn (2.1),hai hàm là tương đương nếu chúng bằng nhau hầu hết trongΩ. Khi đó L^p_γ cũng là không gian Banach đối với chuẩn $\|\cdot\|_{p,\gamma}$.Trong trường hợp riêng , L^2_γ là một không gian Hilbert đối với tích vô hướng và chuẩn tương ứng

$$\langle u,v\rangle = \int_0^1 x^\gamma u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|_{2,\gamma} = \sqrt{\langle u,u\rangle}. \qquad (2.2)$$

Ta ký hiệu bởi : $W^{1,p}_\gamma(\Omega) \equiv W^{1,p}_\gamma = \left\{ v \in L^p_\gamma : v' \in L^p_\gamma \right\}$

là không gian Banach thực đối với chuẩn

$$\| v \|_{1,p,\gamma} = \begin{cases} \left(\|v\|^p_{p,\gamma} + \|v'\|^p_{p,\gamma} \right)^{1/p} & , \ 0 \le p < \infty, \\ \max\{\|v\|_{\infty,\gamma}, \|v'\|_{\infty,\gamma}\} & , \ p = \infty. \end{cases} \qquad (2.3)$$

với đạo hàm được hiểu theo nghĩa phân bố [8].

Mặt khác,trong việc định nghĩa không gian hàm $W^{1,p}_\gamma(\Omega)$ với trọng lượng x^γ, chúng ta cũng có thể định nghĩa $W^{1,p}_\gamma(\Omega)$ như là đầy đủ hoá của không gian

$$S_1 = \{ \ u \in C^1(\overline{\Omega}) : \| u \|_{1,p,\gamma} < \infty \ \}$$

đối với chuẩn $\| \,.\, \|_{1,p,\gamma}$.(Xem Adams [1]).

Khi đó ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Cho $\gamma > 0$, $p > 1$, tồn tại các hằng số dương K_1, K_2, K_3 và K_4 chỉ phụ thuộc vào p, γ sao cho $\forall \ u \in C^1(\overline{\Omega})$, ta có*

$$\| u \|^p_{p,\gamma} \le |u(1)|^p + K_1 \| u' \|^p_{p,\gamma} \qquad (2.4),$$

$$|u(1)| \le K_2 \| u \|_{1,p,\gamma} \qquad (2.5),$$

$$x^{\gamma/p} \, | u(x) | \le K_3 \| u \|_{1,p,\gamma} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \qquad (2.6),$$

$$\le K_4 \| u \|_{1,p,\gamma} \left(\ |u(1)|^p + \| u' \|^p_{p,\gamma} \right)^{1/p}, \textit{ nếu } p \ge 2 - \frac{1}{\gamma} \qquad (2.7),$$

Bổ đề 2. *Phép nhúng* $W^{1,p}_\gamma(\Omega)$ *N* $L^2_\gamma(\Omega)$, $p > 1$ *là liên tục nếu* $p \ge 2 - \frac{1}{\gamma}$, *và compact nếu* $p \ge 2$.

Chứng minh của các bổ đề 1 và 2 có thể được tìm thấy trong [6].

Chú thích 1 . Ta cũng chú ý rằng

$$\lim_{x \to 0_+} x^{\gamma/p} u(x) = 0 , \ \ \forall \ \ u \in W^{1,p}_\gamma(\Omega) \,. \, (2.8)$$

(Xem [1], Bổ đề 5.40 , p.128).

Mặt khác, do $W^{1,p}(\varepsilon,1)$ N $C^0([\varepsilon, 1]), 0 < \varepsilon < 1$; và

$$\varepsilon^{\gamma/p} \| u \|_{W^{1,p}(\varepsilon,1)} \le \| u \|_{1,p,\gamma} \ , \ \forall \ u \in W^{1,p}_\gamma(\Omega) \, , \ 0 < \varepsilon < 1, \qquad (2.9)$$

ta suy ra

$$u|[\varepsilon,1] \in C^0([\varepsilon,1]), \ \forall \varepsilon, 0<\varepsilon<1. \quad (2.10)$$

Từ (2.8),(2.10) t a suy ra

$$x^{\gamma/p} u \in C^0(\overline{\Omega}), \ \forall \ u \in W_\gamma^{1,p}(\Omega). \quad (2.11)$$

Ta đặt $H = L_\gamma^2(\Omega)$, $V = W_\gamma^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, $p \geq 2 - \frac{1}{\gamma}$.

Từ kết quả của bổ đề2, với $p \geq 2 - \frac{1}{\gamma}$, V được nhúng liên tục trong H. Hơn nữa V trù mật trong H, vì $C^1(\overline{\Omega})$ trù mật trong H; đồng nhất H với H' (đối ngẫu của H), ta có V N H N V'.Mặt khác, ký hiệu$\langle .,. \rangle$ được dùng để chỉ cặp đối ngẫu giữa V và V'.

3.ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT

Ta giả sử rằng $p \geq 2$. Đặt $p' = \frac{p}{p-1}$.

Ta thành lập các giả thiết sau

(H1) $f : \Omega \times R \to R$ thỏa điều kiện Caratheodory.

(H2) $\exists\, C_1 > 0 \ \exists\, q_1 \in L_\gamma^1(\Omega) : y f(x,y) \geq C_1 |y|^p - |q_1(x)|, \forall\, y \in R$, a.e., $x \in \Omega$.

(H3) $\exists\, C_2 > 0 \ \exists\, q_2 \in L_\gamma^{p'}(\Omega) : |f(x,y)| \leq C_2 |y|^{p-1} + |q_2(x)|, \forall\, y \in R$, a.e., $x \in \Omega$.

(H4) $F \in V'$.

Lời giải yếu của bài toán (1.1) -(1.3) được thành lập từ bài toán biến phân sau đây.

Tìm $u \in V$ sao cho

$$\int_0^1 x^\gamma A(u'(x))v'(x)\,dx + h.u(1)v(1) + \langle f(x,u(x)), v \rangle = \langle F, v \rangle + g.v(1), \forall\, v \in V. \quad (3.1)$$

trong đó

$$A(u'(x)) = |u'(x)|^{p-2} u'(x). \quad (3.2)$$

Chú thích 2. Do (2.11) , các số hạng u(1) và v(1) xuất hiện trong (3.1) được xác định $\forall$ u , v $\in V$ .Ta thu được (3.1) bằng cách nhân một cách hình thức cả hai vế của (1.1) bởi x^γ v $\in$ V ,sau đó sử dụng tích phân từng phần và các điều kiện (1.2) và (2.8) .

Khi đó ta có định lý sau đây.

Định lý 1. *Giả sử $h > 0$, $g \in R$ và (H1) - (H4) được thỏa .Khi đó bài toán biến phân (3.1) có lời giải.*

Hơn nữa, nếu f(x,y) là không giảm đối với biến y , i.e., (H5) $\left(f(x,y)-f(x,\tilde{y})\right)\left(y-\tilde{y}\right) \geq 0 \quad \forall\ y, \tilde{y} \in R$, a.e., $x \in \Omega$.

Khi đó lời giải là duy nhất.

Chứng minh – Gọi $\{w_j\}$ là cơ sở đếm được của V . Đặt $u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}\, w_j$, trong đó c_{mj} thỏa hệ phương trình phi tuyến sau

$$\int_0^1 x^\gamma A(u_m'(x))\, w_j'(x)\, dx + h.u_m(1)\, w_j(1) + \left\langle f(x,u_m(x)), w_j \right\rangle \tag{3.3}$$

$$= \left\langle F, w_j \right\rangle + g.w_j(1), \qquad 1 \leq j \leq m$$

Từ bổ đề Brouwer (xem [8],bổ đề 4.3 , p.53), ta suy từ các giả thiết (H1)- (H4) rằng hệ (3.3) có lời giải u_m .

- Nhân phương trình thứ j của hệ (3.5) bởi c_{mj}, sau đó tổng theo j = 1,...,m, ta được

$$\int_0^1 x^\gamma |u_m'(x)|^p\, dx + h.u_m^2(1) + \left\langle f(x,u_m(x)), u_m \right\rangle = \left\langle F, u_m \right\rangle + g.u_m(1). \tag{3.4}$$

Từ các giả thiết (H2), (H4) và từ bất đẳng thức (2.5) ta thu được

$$\min\{1, C_1\} \| u_m \|_{1,p,\gamma}^p + h.u_m^2(1) \leq \| q_1 \|_{1,\gamma} + (\|F\|_{V'} + |g| K_2) \| u_m \|_{1,p,\gamma} \tag{3.5}$$

Từ (3.5) ta suy ra

$$\| u_m \|_{1,p,\gamma} \leq C \qquad (3.6),$$

trong đó C là một hằng số độc lập với m .

Ta suy ra từ (3.6) rằng

$$\left\| x^{\gamma/p'} A(u_m') \right\|_{L^{p'}} = \| u_m' \|_{p,\gamma}^{p-1} \leq C. \tag{3.7}$$

Mặt khác, ta suy ra từ (H3),(3.6) , rằng

$$\left\| x^{\gamma/p'} f(x,u_m) \right\|_{L^{p'}}^{p'} \leq C_2 \| u_m \|_{p,\gamma}^p + \| q_4 \|_{p',\gamma}^{p'} \leq C. \tag{3.8}$$

trong đó C là một hằng số độc lập với m.

- Nhờ (3.6),(3.7) và bổ đề 2 , dãy $\{u_m\}$ có một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$u_m \to u$ trong V yếu, (3.9)

$u_m \to u$ trong H mạnh và hầu hết trong Ω, (3.10)

$x^{\gamma/p'} A(u_m') \to \chi$ trong $L^{p'}$ yếu. (3.11)

Chú ý rằng, phép nhúng $W^{1,p}(\varepsilon,1)$ N $C^0([\varepsilon,1])$, $0<\varepsilon<1$ là compact, do (2.9), (3.6), $\{u_m\}$ có một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$$u_m|[\varepsilon,1] \to u|[\varepsilon,1] \quad \text{trong} \quad C^0([\varepsilon,1]). \qquad (3.12)$$

Mặt khác, ta suy ra từ (H1) và(3.8) , rằng

$$x^{\gamma/p'} f(x,u_m) \to x^{\gamma/p'} f(x,u) \qquad \text{a.e. } x \in \Omega. \qquad (3.13)$$

Sử dụng một bổ đề trong [8](bổ đề 1.3,p.12), ta suy từ (3.8) ,(3.13) rằng

$$x^{\gamma/p'} f(x,u_m) \to x^{\gamma/p'} f(x,u) \quad \text{trong } L^{p'} \text{ yếu}. \qquad (3.14)$$

- Qua giới hạn trong (3.3) không khó khăn gì từ (3.9),(3.11),(3.12) và (3.14) ta suy ra rằng u thỏa phương trình

$$\int_0^1 x^{\gamma/p} \chi\, v'(x)dx + h.u(1)v(1) + \langle f(x,u),v\rangle = \langle F,v\rangle + g.v(1),\ \forall v \in V. \qquad (3.15)$$

Để chứng minh sự tồn tại lời giải của bài toán biến phân (3.1) ta chỉ cần chứng minh

$$\chi = x^{\gamma/p'} A(u').$$

Ta suy từ (3.14),(3.15), ta có (xem [6]).

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^1 x^{\gamma} A(u_m'(x))u_m'(x)\,dx = \int_0^1 x^{\gamma/p} \chi(x)\, u'(x)dx. \qquad (3.16)$$

Sử dụng tính chất đơn điệu của A và lý luận quen thuộc ta chứng minh được rằng (xem [6]):

$$\chi = x^{\gamma/p'} A(u').$$

Sự tồn tại được chứng minh.

- *Sự duy nhất*. Giả sử u và v là hai lời giải của bài toán biến phân (3.1) . Khi đó w = u – v thỏa đẳng thức sau

$$\int_0^1 x^{\gamma}|u'(x)|^p\,dx + h.w^2(1) = -\langle f(x,u)-f(x,v),w\rangle \le 0. \qquad (3.17)$$

Vậy w = 0.

Định lý 1 được chứng minh đầy đủ.

Chú thích 3.Tương ứng với $p=2, \gamma=1$,các tác giả trong [3] đã chứng minh phương trình vi phân Bessel phi tuyến (1.5) liên kết với điều kiện biên $u(0)=1, u(+\infty)=0$ có ít nhất một lời giải. Ở đó số hạng phi tuyến u^2-u là không đơn điệu. Một trong số các lời giải trên được thiết lập từ bài toán biên (1.5) trong khoảng $a<x<b$ liên kết với điều kiện

biên $u(a) = 1, u(b) = 0$,trong đó , $x_i < a < b < x_{i+1}$ và x_i, x_{i+1} là hai zêro liên tiếp của hàm Bessel $J_0(x)$. Sự thành lập một phản ví dụ cho hàm $f(x,u)$ không thỏa giả thiết (H4) sao cho lời giải của (3.1) là không duy nhất là một bài toán mở.

4.DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA LỜI GIẢI KHI $h \to 0_+$

Trong phần nầy, ta giả sử rằng (H1)-(H5) đúng. Do định lý 1 bài toán biến phân (3.1) có một lời giải duy nhất $u = u_h, h > 0$. Ta sẽ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của lời giải u_h khi $h \to 0_+$.

Ta thêm vào hàm f một giả thiết phụ sau đây.

(H6) $\exists\, C_3 > 0 : \left(f(x,y) - f(x,\tilde{y})\right)\left(y - \tilde{y}\right) \geq C_3\, |y - \tilde{y}|^p \quad \forall\, y, \tilde{y} \in \mathrm{R}$, a.e., $x \in \Omega$.

Định lý sau đây là một tổng quát kết quả trong {9}.

Định lý 2. *Giả sử (H1) - (H5) và* $g \in R$ *là đúng. Khi đó*

i) Bài toán (3.2) với $h = 0$ *có một lời giải duy nhất* $u_0 \in V$.

ii) Hơn nữa, nếu f *thỏa (H5), khi đó ta có một đánh giá tiệm cận*

$$\|u_h - u_0\|_{1,p,\gamma} \leq C.h^{1/p-1},$$

với $h > 0$ *đủ nhỏ, trong đó* C *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* $\gamma, p, C_1, C_2, C_3, g, q_1, q_2, \|F\|_{V'}$.

Chứng minh.

(i) Trước hết, ta chú ý rằng hằng số C trong đánh giá (3.6) thì độc lập với $h > 0$. Vậy, giới hạn yếu u_h trong V của dãy $\{u_m\}$ khi $m \to +\infty$, là một lời giải duy nhất của bài toán (3.1) thỏa đánh giá

$$\|u_h\|_{1,p,\gamma} \leq \mathrm{C}, \qquad (4.1)$$

trong đó C là một hằng số độc lập với $h > 0$.

Khi đó, ta có thể chứng minh theo một cách tương tự của chứng minh định lý 1, rằng giới hạn u_0 của họ $\{u_h\}$ khi $h \to 0_+$, là một lời giải duy nhất của bài toán (3.1) tương ứng với $h = 0$.

(ii) Bây giờ, giả sử u_h (tương ứng $u_{h'}$) là một lời giải duy nhất của bài toán (3.1) với tham số h (tương ứng h'). Đặt $v = u_h - u_{h'}$, $\hat{h} = h - h'$. Khi đó v thỏa

$$\left\langle A(u_h') - A(u_{h'}'), w' \right\rangle + hv(1)\,w(1) + \left\langle f(x,u_h) - f(x,u_{h'}), w \right\rangle = -\hat{h}.u_{h'}(1)\,w(1),$$

$\forall w \in V$. (4.2)

Lấy $w = v$ trong (4.2), khi đó từ (H5), (2.8),(4.1) và bất đẳng thức sau

$$\forall p \geq 2, \exists C_p > 0 : (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x-y) \geq C_p|x-y|^p, \forall x, y \in R, \quad (4.3)$$

ta thu được

$$\min\{C_p, C_3\}\|v\|_{1,p,\gamma}^p + hv^2(1) \leq -\hat{h}.u_{h'}(1)v(1) \leq |\hat{h}|K_2{}^2C\|v\|_{1,p,\gamma} \quad (4.4)$$

Do đó, ta suy từ (4.4) rằng

$$\|u_h - u_{h'}\|_{1,p,\gamma} = \|v\|_{1,p,\gamma} \leq C_4|h-h'|^{1/p-1}. \quad (4.5)$$

Coi $\{h_m\}$ là một dãy số thực sao cho $h_m > 0, h_m \to 0_+$ khi $m \to +\infty$. ta suy từ (4.5) rằng $\{u_{h_m}\}$ là dãy Cauchy trong V. Do đó, tồn tại $w_0 \in V$ sao cho

$u_{h_m} \to w_0$ mạnh trong V. (4.6)

Bằng cách qua giới hạn như trong chứng minh của định lý 1, ta suyra rằng w_0 là lời giải của bài toán biến phân (3.1) tương ứng với $h = 0$.

Tính duy nhất được chứng minh theo một cách tương tự như ở định lý 1.

Do đó, $w_0 = u_0$.

Cho $h' \to 0_+$ trong (4.5), ta có

$$\|u_h - u_0\|_{1,p,\gamma} \leq C_4|h|^{1/p-1}. \quad (4.7)$$

Định lý 2 được chứng minh đầy đủ.

Định lý 3. Giả sử *(H1)-(H4),(H6) là đúng , cho g* $\in$ *R. Khi đó ta có*

(i) Hàm số $h \mapsto |u_h(1)|$ *không tăng trên* $(0,+\infty)$*;*

(ii) $|u_0(1)| = \sup_{h>0}|u_h(1)|$.

Chứng minh . Coi $0 < h < h', \hat{h} = h - h' < 0$. Khi đó $v = u_h - u_{h'}$ thỏa (4.4), ta thu được $-\hat{h}.u_{h'}(1)(u_h(1) - u_{h'}(1)) \geq 0$.

Do đó, $|u_{h'}(1)|^2 \leq u_{h'}(1)u_h(1)$.

Vậy,

$|u_{h'}(1)| \leq |u_h(1)|$, (4.8)

và (i) được chứng minh.

Cho $h \to 0_+$ trong (4.8), ta thu được (ii)

Định lý 3 được chứng minh đầy đủ.

ON A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A MIXED BOUNDARY CONDITION: ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF A SOLUTION

Bui Tien Dung - Tran Minh Thuyet

ABSTRACT : We study the following nonlinear boundary value problem

$$\frac{-1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}(x^\gamma |u'(x)|^{p-2}u'(x)) + f(x,u(x)) = F(x),\ 0 < x < 1\ , \tag{1}$$

$$\left|\lim_{x\to 0_+} x^{\gamma/p}u'(x)\right| < +\infty \quad , |u'(1)|^{p-2}u'(1) + h.u(1) = g \tag{2}$$

where $\gamma > 0$, $p \geq 2$, $h > 0$, g *are given constants* , f, F *are given functions. In this paper,we use the Galerkin and compactness method in appropriate Sobolev spaces with weight to prove the existence of a unique weak solution of the problem* (1),(2). *Afterwards, we also study the asymptotic behavior of the solution* u_h *depending on h as* $h \to 0_+$. *We also obtain that the function* $h \mapsto |u_h(1)|$ *is nonincreasing on* $(0,+\infty)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *R.A.Adams* , Sobolev Spaces , *Academic Press, NewYork* , 1975.

[2] *Nguyen Thanh Long ,Tran Van Lang* ,The problem of buckling of a nonlinearly elastic bar immersed in a fluid, *Vietnam J.Math.* 24 (1996) , 131-142.

[3]*Nguyen Thanh Long,E.L.Ortiz ,Alain Pham Ngoc Dinh* ,On the existence of a solu-tion of a boundary value problem for a nonlinear Bessel equation on an unbounded interval , *Proc. Royal Irish Acad.* 95A (1995) , 237-247.

[4] *Nguyen Thanh Long, E.L.Ortiz , Alain Pham Ngoc Dinh*,A nonlinear Bessel differ-ential equation associated with Cauchy condition,*Computers Math.Appl.* 31(1996), 131-139.

[5] *Nguyen Thanh Long , Alain Pham Ngoc Dinh* , Periodic solutions for a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance, *Computers Math. Appl.* 30 (1995) , 63-78 .

[6]*Nguyen Thanh Long, Bui Tien Dung, Tran Minh Thuyet,*A nonlinear boundary value problem for nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces, *J. for Analysis and its Applications*.(Submitted).

[7]*Nguyen Thanh Long,Bui Tien Dung,Nguyen Hoi Nghia,Tran Minh Thuyet,* On a nonlinear boundary value with a mixed nonhomogeneous condition: Asymptotic behavior of a solution, *Demonstratio Math.* (Submitted).

[8]*J.L.Lions*,Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, *Dunod , Gauthier-Villars , Paris* , 1969.

[9]*Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Thanh Long*, On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition , *Vietnam J.Math.* 26 (1998) , 301-309 .

[10]*M.Tucsnak*,Buckling of nonlinearly elastic rods immersed in a fluid,*Bull.Math.Soc. Sci.Math. R.S.Roumanie*. 33 (1989) ,173-181.