MỘT THUẬT GIẢI CẤP HAI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Xuân Mỹ
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
(Bài nhận ngày /09/2000)

TÓM TẮT : *Trong bài nầy, chúng tôi cho điều kiện hội tụ cấp hai cho hệ phương trình hàm sau:*

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[x, f_j(S_{ijk}(x))] + g_i(x)\ , i = \overline{1,n}\ \ ,\ x \in \Omega_i\ ,$$

trong đó $\Omega_i \subset R^p$ *là tập compact hoặc không compact ,* $g_i : \Omega_i \to R$, $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$, a_{ijk} : $\Omega_i \times R \to R$, $1 \le i, j \le n$, $1 \le k \le m$ *,là các hàm liên tục cho trước,* $f_i : \Omega_i \to R$ *là các ẩn hàm.*

1. GIỚI THIỆU

Xét hệ phương trình hàm sau đây :

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[x, f_j(S_{ijk}(x))] + g_i(x)\ , i = \overline{1,n}\ \ ,\ x \in \Omega_i \qquad (1)$$

trong đó $\Omega_i \subset R^p$ là tập compact hoặc không compact , $g_i : \Omega_i \to R$, $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$, a_{ijk} : $\Omega_i \times R \to R$, $1 \le i, j \le n$, $1 \le k \le m$,là các hàm liên tục cho trước, $f_i : \Omega_i \to R$ là các ẩn hàm. Trong [1], các tác giả Wu, Xuan, Zhu đã nghiên cứu hệ(1) với $\Omega_i = [-b,b]$, $p = 1$, $m = n = 2$, $S_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất và

$a_{ijk}(x,y) = \tilde{a}_{ijk}\, y$ (2), trong đó $\tilde{a}_{ijk}$ là các hằng số thực.Trong trường hợp này lời giải của hệ (1), (2) được xấp xỉ bằng một dãy qui nạp hội tụ đều và nó cũng ổn định đối với các hàm g_i .Trường hợp $m = n = p = 1$, các tác giả Kostrzewski [2],[3], Lupa [4]đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất lời giải trong không gian hàm BC[a,b] của phương trình hàm sau

$f(x) = a(x, f(S(x)))$, $x \in [a,b]$. (3)

Trong [5] ,các tác giả đã nghiên cứu trường hợp đặc biệt của(1) với $p = 1$, $\Omega_i = \Omega \subset R$, $i = \overline{1,n}$, là khoảng đóng bị chặn hay không bị chặn. Bằng định lý điểm bất động Banach các tác giả trong [5] đã thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất lời giải của hệ (1) và lời giải cũng ổn định đối với các hàm g_i .Trong trường hợp a_{ijk} giống như (2) và

$S_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất, $g_i \in C^r(\Omega, R), \Omega = [-b, b]$, trong [5] thu được khai triển Maclaurin của lời giải hệ (1) đến cấp r. Hơn nữa, nếu $g_i(x)$ là các đa thức bậc r thì lời giải hệ (1),(2) cũng là đa thức bậc r . Các kết quả trên đây đã được các tác giả trong [6] đã tổng quát cho trường hợp nhiều chiều. Trong bài nầy chúng tôi muốn tìm ra một điều kiện đủ trên các hàm $a_{ijk}(x, y)$ để thu được thuật giải hội tụ cấp hai cho hệ (1). Các kết quả thu được một phần nào đã mở rộng các kết quả trong [1],[5], [6] và [7].

2. CÁC KÝ HIỆU,GIẢ THIẾT.

- Giả sử $\Omega_i \subset R^p, 1 \le i \le n$, ta đặt $X_i = C_b(\Omega_i; R)$ là không gian Banach các hàm số liên tục bị chặn $f : \Omega_i \to R$ với chuẩn

$$\|f\|_{X_i} = \sup_{x \in \Omega_i} |f(x)|, \; f \in X_i . \quad (4)$$

Không gian tích Descartes $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ là một không gian Banach đối với chuẩn

$$\|f\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{X_i}, \; f = (f_1, ..., f_n) \in X .$$

Ta viết hệ phương trình hàm (1) dưới dạng phương trình toán tử trong X như sau

$$f = Tf, \quad (5)$$

trong đó $f = (f_1, ..., f_n)$, $Tf = ((Tf)_1, ..., (Tf)_n)$,

$$(Tf)_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}(x, f_j(S_{ijk}(x))) + g_i(x), x \in \Omega_i, \mathrm{i} = \overline{1,n} . \quad (6)$$

Chúng ta thiết lập các giả thiết sau:

(H_1) $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$ là các hàm liên tục ,

(H_2) $g \in X$,

(H_3) $a_{ijk} : \Omega_i \times R \to R$ liên tục và thỏa điều kiện: tồn tại $\tilde{\alpha}_{ijk} : \Omega_i \to R$ bị chặn và không âm sao cho

$$|a_{ijk}(x, y) - a_{ijk}(x, \tilde{y})| \le \tilde{\alpha}_{ijk}(x)|y - \tilde{y}|, \forall x \in \Omega_i , \forall y, \tilde{y} \in R , \quad (7)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega_i} \tilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1 ; \quad (8)$$

$a_{ijk}(.,0) \in X_i$. (điều kiện này bỏ qua nếu Ω_i là compact) (9)

Khi đó ta có kết quả sau

Định lý 1.(xem [6]) *Dưới giả thiết $(H_1)-(H_3)$, tồn tại duy nhất một hàm $f \in X$ sao cho $f = Tf$. Hơn nữa, lời giải f ổn định đối với g trong X.*

Chú thích 1. Trong định lý 1 , với $p=1, \Omega_i = \Omega$, $\forall i = \overline{1,n}$, là khoảng đóng bị chận hay không bị chận và điều kiện (8) được thay bởi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\Omega} \widetilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1 \qquad (10)$$

chúng tôi tìm lại kết quả như trong [5]. Mặt khác, điều kiện (10) yếu hơn điều kiện vì

$$\sigma \le \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\Omega} \widetilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1 . \qquad (11)$$

Chú thích 2. Định lý 1 cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp

(12) $f^{(\nu)} = Tf^{(\nu-1)}$, $\nu = 1,2,\dots, f^{(0)} \in X$ cho trước .

Khi đó dãy $\{f^{(\nu)}\}$ hội tụ trong X về lời giải f của (5) và ta có một đánh giá sai số

$$\left\| f - f^{(\nu)} \right\|_X \le \frac{\left\| f^{(0)} - Tf^{(0)} \right\|_X}{1-\sigma} \sigma^{\nu} , \ \forall \nu = 1,2,\dots \qquad (13)$$

3.THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI

Trong định lý 1 đã cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp (12), theo nguyên tắc ánh xạ co, là một thuật giải hội tụ cấp 1.Trong phần này chúng ta nghiên cứu một thuật giải cấp hai cho hệ (1) . Ta giả sử các hàm $a_{ijk}(x,y)$ khả vi liên tục đến cấp hai và kèm thêm một số điều kiện phụ mà sẽ đặt sau.

Ta xét giải thuật sau đây cho hệ (1)

_ Cho trước $f^{(0)} = \left(f_1^{(0)},\dots,f_n^{(0)}\right) \in X$.

_ Giả sử biết $f^{(\nu-1)} = \left(f_1^{(\nu-1)},\dots,f_n^{(\nu-1)}\right) \in X$,ta xác định $f^{(\nu)} = \left(f_1^{(\nu)},\dots,f_n^{(\nu)}\right) \in X$ bởi

$$\begin{aligned} f_i^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \Big\{ & a_{ijk}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right] + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right] \times \\ & \times \left[f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) - f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x)) \right] \Big\} + g_i(x) \\ & , x \in \Omega_i , 1 \le i \le n , \nu = 1,2,\dots \end{aligned} \qquad (14)$$

Ta viết lại dưới dạng

$$f_i^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) + g_i^{(\nu)}(x),\ x \in \Omega_i\ , 1 \le i \le n\ , \nu = 1,2,... \quad (15)$$

trong đó

$$\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right], \quad (16)$$

$$g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\{a_{ijk}[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))] - \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right\},. \quad (17)$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 2. *Giả sử* (H_1) *và* $g \in X$ *là đúng* .

Giả sử $a_{ijk}, \dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial y} : \Omega_i \times R \to R$ *liên tục và thỏa các điều kiện*

$a_{ijk}, \dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial y} \in C_b(\Omega_i \times [-M, M]; R), \forall M > 0$. *(điều kiện nầy bỏ qua nếu* Ω_i *là compact) (18)*

Giả sử $f^{(\nu-1)} \in X$ *thỏa*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega_i}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| < 1. \quad (19)$$

Khi đó tồn tại duy nhất $f^{(\nu)} \in X$ *là lời giải của (12)-(14)* .

Một phần của chứng minh định lý2 có thể tìm thấy trong [7].

Với mỗi $M > 0$ ta đặt

$$A_{ijk}^{(0)}(M) = \sup_{x\in\Omega_i, |y|\le M}\left|a_{ijk}(x,y)\right|, \quad A_{ijk}^{(2)}(M) = \sup_{x\in\Omega_i, |y|\le M}\left|\frac{\partial^2 a_{ijk}(x,y)}{\partial y^2}\right|.$$

$$A_{ijk}^{(1)}(M) = \sup_{x\in\Omega_i, |y|\le M}\left|\frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}(x,y)\right|, \qquad \sigma_M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(1)}(M).$$

Khi đó ta có định lý sau

Định lý 3.(xem [7]) *Giả sử* (H_1) , $g \in X$ *đúng.*

Giả sử $a_{ijk}, \dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2} : \Omega_i \times R \to R$ *liên tục và thỏa các điều kiện*

$$a_{ijk}, \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}, \frac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2} \in C_b(\Omega_i \times [-M, M]; R), \forall M > 0. \quad (20)$$

(điều kiện nầy bỏ qua nếu Ω_i *là compact).*

Tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho $\|g\|_X + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(0)}(M) + 2M\sigma_M \le M$. *(21)*

Khi đó

(i) Thuật giải (11) là cấp 2. Chính xác hơn, nếu $\left\|f^{(0)}\right\|_X \le M$ *thì*

$$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \le \Gamma_M \left\|f^{(\nu-1)} - f\right\|_X^2, \quad \forall \nu = 1,2,... \qquad (22)$$

trong đó $\Gamma_M = \dfrac{1}{2(1-\sigma_M)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(2)}(M)$, *và f là lời giải của hệ (1).*

(ii) Nếu $f^{(0)}$ *được chọn đủ gần f sao cho* $\Gamma_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X < 1$, *thì thuật giải (14) hội tụ đến cấp 2 và thỏa một đánh giá sai số*

$$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \le \frac{1}{\Gamma_M}\left(\Gamma_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X\right)^{2^\nu}, \quad \forall \nu = 1,2,...$$

Chú thích 3. Việc chọn bước lặp ban đầu $f^{(0)}$ trong thuật giải cấp hai ta tiến hành như sau : Trước hết ta lấy $u^{(0)} \in X$, ta xây dựng dãy lặp đơn như trong Định lý 1

(23) $u^{(\eta)} = Tu^{(\eta-1)}$, $\eta = 1,2,...$

Khi đó dãy $\{u^{(\eta)}\}$ hội tụ trong X về lời giải f của (5) và ta có một đánh giá sai số

$$\left\|f - u^{(\eta)}\right\|_X \le \left\|u^{(0)} - Tu^{(0)}\right\|_X \times \frac{\sigma^\eta}{1-\sigma}, \quad \forall \eta = 1,2,... \qquad (24)$$

Từ đây ta chọn $\eta_0 \in N$ sao cho

$$\Gamma_M \left\|f - u^{(\eta_0)}\right\|_X \le \Gamma_M \left\|u^{(0)} - Tu^{(0)}\right\|_X \times \frac{\sigma^{\eta_0}}{1-\sigma} < 1. \qquad (25)$$

Vậy ta chọn $f^{(0)} = u^{(\eta_0)}$.

A SECOND ORDER ALGORITHM FOR SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Nguyen Xuan My

ABSTRACT : *In this paper, we give a condition for the quadratic convergence of the following system of functional equations*

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[x, f_j(S_{ijk}(x))] + g_i(x), \; i = \overline{1,n}, \quad x \in \Omega_i, \; i = 1,...,n,$$

where $\Omega_i \subset R^p$ *are compact or noncompact domains ,the given functions* $g_i : \Omega_i \to R$, $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$, a_{ijk} : $\Omega_i \times R \to R$ $, 1 \le i, j \le n, 1 \le k \le m$, *are continuous and* $f_i : \Omega_i \to R$ *are unknown functions.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C.Q.Wu, Q.W.Xuan, D.Y.Zhu, The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system, *SEA. Bull.Math.* 15 (1991), 109 -115.

[2] T.Kostrzewski, Existence and uniqueness of BC[a,b] solutions of nonlinear functional equation, *Demonstratio Math.* 26 (1993), 61-74.

[3] T.Kostrzewski, BC-solutions of nonlinear functional equation. A nonuniqueness case, *Demonstratio Math.* 26 (1993), 275-285.

[4] M.Lupa, On solutions of a functional equation in a special class of functions, *Demonstratio Math.* 26 (1993),137-147.

[5] Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Kim Khoi, Dinh Văn Ruy, On a system of functional equations, *Demonstratio Math.* 31 (1998), 313-324.

[6] Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, On a system of functional equations in a multi-dimensional domain, *Z. Anal. Anwen.*19 (2000) (*nhận đăng*).

[7] Nguyễn Xuân Mỹ, Hệ phương trình hàm trong miền nhiều chiều,*Luận văn Thạc sỹ Toán học, Đại học KHTN Tp.HCM.*(1999).